P. FATOU

Sur la convergence absolue des séries trigonométriques

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 47-53
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__47_1>

SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. P. FATOU.

J'ai indiqué dans ma Thèse (*Acta mathematica*, t. XXX, p. 398 et suiv.) l'intérêt qu'il y a à distinguer, parmi les points de convergence des séries trigonométriques, les points de convergence absolue et j'ai montré qu'une telle série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ne peut être absolument convergente en tous les points d'un intervalle si petit qu'il soit que si la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est elle-même convergente. Plus récemment, MM. Lusin (*C. R.*, t. 155, p. 580) et M. Denjoy (*C. R.*, t. 155, p. 135) sont revenus sur ce sujet et ont démontré que si la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est divergente, l'ensemble des points de convergence absolue de la série trigonométrique est de mesure nulle. M. Denjoy fait reposer sa démonstration sur le théorème de M. Baire relatif aux fonctions de première classe, comme je l'avais fait moi-même dans le cas particulier que j'avais traité, et M. Lusin s'appuie pour arriver au même résultat sur un intéressant théorème de M. Egoroff. J'ai remarqué qu'on pouvait démontrer simplement la proposition en question sans recourir à des théorèmes aussi cachés de la théorie des fonctions et en ne s'appuyant que sur les principes essentiels de la théorie de la mesure. C'est ce que nous allons d'abord exposer ici.

Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ des fonctions continues bornées d'une variable x, ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Pour que la série $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ soit convergente en un point x_0, il faut et il suffit qu'il existe un nombre fini positif A tel que l'inégalité

$$S_n(x_0) \leqq A$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs de n, $S_n(x)$ désignant la somme $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$. L'ensemble des points x_0 pour lesquels ceci a lieu, est un ensemble fermé F, comme il résulte immédiatement de la continuité de $S_n(x)$.

Considérons maintenant une suite de nombres positifs A_1, $A_2, \ldots, A_i, \ldots$ indéfiniment croissants. A chacun des A_i correspond, comme il vient d'être dit, un ensemble fermé F_i, et l'ensemble E des points de convergence de la série est l'ensemble des points qui figurent dans l'un au moins des F_i. Chacun des F_i est évidemment contenu dans ceux de rang plus élevé, et par suite dans E. On peut encore dire, en appelant $F_{i+1}-F_i$ l'ensemble des points de F_{i+1} qui n'appartiennent pas à F_i, que E est la somme des ensembles F_1, F_2-F_1, $F_3-F_2, \ldots$, qui sont sans points communs deux à deux et, en appelant m la mesure de E, m_i la mesure de F_i, on aura, d'après les propriétés de la mesure,

$$m = m_1+(m_2-m_1)+(m_3-m_2)+\ldots+(m_i-m_{i-1})+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$m = \lim_{i=\infty} m_i.$$

Si donc $m > 0$, on pourra prendre i assez grand pour que m_i soit positif et non nul. L'ensemble E contiendra donc un ensemble fermé de mesure non nulle, sur lequel les fonctions S_n sont bornées dans leur ensemble : on peut, si l'on veut, remplacer cet ensemble fermé par un ensemble parfait P de même mesure $p > 0$. L'intégrale de $S_n(x)$ étendue à l'ensemble P reste bornée quel que soit n, c'est-à-dire que la série (à termes positifs)

$$\int_P f_1\,dx+\int_P f_2\,dx+\ldots+\int_P f_n\,dx+\ldots$$

est convergente.

Appliquons ce résultat aux fonctions

$$f_n = \rho_n\,|\cos(nx+\omega_n)|,$$

le signe $|\;|$ désignant la valeur absolue, et, conservant les hypothèses et notations précédentes, évaluons $\int_P f_n\,dx$.

Les points x sont supposés ici portés sur la circonférence de rayon 1. Soient i_1, i_2, ..., i_k, ..., les intervalles contigus à P. On a

$$\int_P = \int_0^{2\pi} - \int_{i_1} - \int_{i_2} - \cdots - \int_{i_k} - \int_{i_{k+1}} - \cdots$$

$$\text{mesure de P} = \mu = 2\pi - s_1 - s_2 - \cdots - s_k - s_{k+1} - \cdots$$

en appelant s_k la longueur de i_k.

On peut prendre k assez grand pour que la somme

$$\eta = s_{k+1} + s_{k+2} + \cdots$$

soit aussi petite qu'on le veut; la somme

$$\int_{i_{k+1}} f_n\,dx + \int_{i_{k+2}} f_n\,dx + \cdots$$

est inférieure à $\eta.\rho_n$, puisque la fonction à intégrer est au plus égale à ρ_n.

Évaluons maintenant les intégrales $\int_{i_1}$, $\int_{i_2}\cdots$, soit

$$\int_a^b \rho_n |\cos(nx + \omega_n)|\,dx.$$

On peut diviser l'intervalle d'intégration en intervalles partiels où le cosinus garde un signe constant; l'intégrale indéfinie de $\cos(nx + \omega_n)$ étant $\frac{1}{n}\sin(nx + \omega_n) + \text{const.}$, chaque intégrale partielle a pour valeur $\frac{2}{n}\rho_n$ et est étendue à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{n}$, sauf la première et la dernière, qui sont étendues à des intervalles ε, ε' plus petits que $\frac{\pi}{n}$. On a donc

$$\int_a^b \rho_n |\cos(nx + \omega_n)|\,dx = \rho_n\left(\theta\varepsilon + \mathrm{N}\frac{2}{n} + \theta'\varepsilon'\right),$$

où

$$0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{\pi}{n}, \qquad 0 \leqq \varepsilon' \leqq \frac{\pi}{n}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1, \qquad 0 \leqq \theta' \leqq 1.$$

N est un entier qui vérifie l'égalité

$$\varepsilon + \mathrm{N}\frac{\pi}{n} + \varepsilon' = b - a = s,$$

d'où

$$N = \frac{n}{\pi}(s - \varepsilon - \varepsilon').$$

On déduit de là

$$\int_a^b \rho_n |\cos(nx + \omega_n)| \, dx = \rho_n \left(\frac{2}{\pi} s + \frac{A}{n}\right)$$

(A compris entre -2 et $+2$).

Posons

$$\int_P \rho_n |\cos(nx + \omega_n)| \, dx = J_n.$$

On aura, par ce qui précède,

$$\frac{J_n}{\rho_n} = \frac{2}{\pi}(2\pi - s_1 - s_2 - \ldots - s_k) + \frac{2\lambda}{n} + \lambda'\eta,$$

λ, λ' étant compris entre -1 et $+1$, ou

$$\frac{J_n}{\rho_n} = \frac{2}{\pi}(\mu + \eta) + \frac{2\lambda k}{n} + \lambda'\eta.$$

Les limites d'indétermination de $\frac{J_n}{\rho_n}$ pour n infini sont donc égales à $\frac{2}{\pi}\mu$, à des quantités près de l'ordre de η, et comme η est aussi petit qu'on le veut, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{J_n}{\rho_n} = \frac{2}{\pi}\mu \qquad (\mu > 0).$$

La série ΣJ_n étant convergente, il faut que la série $\Sigma \rho_n$ le soit également.

Donc, si la série $\Sigma \rho_n$ n'est pas convergente, l'ensemble E est nécessairement de mesure nulle. C. Q. F. D.

Revenons maintenant sur le rôle des points de convergence absolue. Posons

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$
$$B_n = a_n \sin nx - b_n \cos nx,$$

et soit x_0 un point de convergence absolue de la série ΣA_n. On a

$$A_n(x_0 + h) + A_n(x_0 - h) = 2 A_n(x_0) \cos nh,$$
$$B_n(x_0 + h) - B_n(x_0 - h) = 2 A_n(x_0) \sin nh.$$

Les séries ayant pour termes généraux les seconds nombres de ces égalités sont absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de h et représentent des fonctions continues de h. Si donc, pour une valeur de h, la série $\Sigma A_n(x_0+h)$ est convergente, absolument convergente, divergente, sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, la série $\Sigma A_n(x_0-h)$ jouira de la même propriété; même remarque pour les séries $\Sigma B_n(x_0+h)$, $\Sigma B_n(x_0-h)$.

On voit que les points de convergence absolue, de convergence ordinaire, de divergence, de sommabilité, les arcs de convergence uniforme d'une série trigonométrique donnée ou de la série associée, sont deux à deux symétriques par rapport aux points de convergence absolue de la série donnée.

En particulier, l'ensemble des points de convergence absolue sur la circonférence est symétrique de lui-même par rapport à chacun de ses points. Si ces points sont en nombre fini, ils sont donc nécessairement placés aux sommets d'un polygone régulier inscrit dans la circonférence; s'ils sont en nombre infini, ils sont nécessairement répartis d'une manière dense sur celle-ci; c'est ce qui arrivera en particulier s'il y a deux points de convergence absolue dont la différence des arguments est incommensurable à 2π.

M. Lusin a remarqué que, dans cette hypothèse de l'existence d'une infinité de points de convergence absolue, l'ensemble des points de convergence ne peut avoir pour mesure que 0 ou 2π. On peut établir ce résultat à l'aide de la remarque suivante qui n'est pas indispensable pour ce but, mais qui paraît susceptible d'applications variées.

Considérons un ensemble linéaire de points de mesure non nulle, et soit $\varphi(x)$ la fonction égale à 1 aux points de cet ensemble E et nulle pour les points de l'ensemble complémentaire. L'intégrale $\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx$ représente la mesure de l'ensemble des points de E contenus dans le segment (α, x); d'après un important théorème de M. Lebesgue, cette intégrale, considérée comme fonction de sa limite supérieure a, sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle, une dérivée égale à $\varphi(x)$. Comme E est de mesure non nulle, il existe donc une infinité de points de E pour lesquels cette propriété a lieu. Soit x_0 un tel point. La propriété énoncée peut alors s'exprimer comme il suit : appelons *densité d'un ensemble* E *dans un intervalle* le quotient de la mesure de l'ensemble des points de E contenus dans l'intervalle par la longueur de cet intervalle. *On peut déterminer un nombre positif* η *tel que, dans tout segment de longueur inférieur à* η *renfermant le point* x_0, *la densité de l'ensemble* E *soit supérieure à* $1 - \varepsilon$, ε *étant aussi petit qu'on veut.*

De même, si le complétaire de E est de mesure non nulle, il existe une infinité de points x_0 jouissant de la propriété suivante : on peut trouver un nombre positif η tel que, dans tout segment de longueur inférieure à η renfermant x_0, la densité de E soit inférieure à ε, ε étant aussi petit qu'on veut.

On voit par là qu'un ensemble mesurable qui est de mesure non nulle, ainsi que son complémentaire, est essentiellement *hétérogène.*

Appliquons ceci à la question qui nous occupe. Soit une série trigonométrique ayant une infinité de points de convergence absolue et E l'ensemble de ses points de convergence, de mesure non nulle. On peut donc trouver des segments de longueur finie de la circonférence dans lesquels la densité de E est supérieure à $1 - \varepsilon$, et comme E admet une infinité partout dense de points de symétrie, on pourra recouvrir entièrement la circonférence par des intervalles dans lesquels la densité de E sera supérieure à $1 - \varepsilon$; donc la mesure de E sera au moins $2\pi(1 - \varepsilon)$, c'est-à-dire 2π, puisque ε est aussi petit qu'on veut. Donc, la mesure de E est 0 ou 2π et la même propriété s'applique à l'ensemble des points de convergence de la série associée.

On voit donc que les séries trigonométriques possédant une infinité de points de convergence absolue présentent des particularités remarquables qui permettent de simplifier l'étude de leur convergence. Mais il y a lieu de remarquer que c'est là un fait plutôt exceptionnel, qui ne se présente pas dans les séries trigonométriques qu'on rencontre dans les applications ; c'est ainsi que la série

$$\Sigma a_n \cos nx$$

dans laquelle les a_n décroissent en valeur absolue n'est absolument convergente pour aucune valeur de x, si la série Σa_n n'est pas absolument convergente.

Moyennant les mêmes hypothèses, la série

$$\Sigma a_n \sin nx$$

n'est absolument convergente que pour $x = 0$ ou $x = \pi$.

Nous nous contentons d'énoncer ces faits dont la démonstration est facile.

En revanche, on forme aisément des séries ayant une infinité même non dénombrable de points de convergence absolue, sans être absolument convergentes en tout point et qui, de plus, sont des séries de Fourier correspondant à des fonctions absolument intégrables. Pour toutes les séries trigonométriques

$$\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

de cette sorte que j'ai pu former, la série de Taylor correspondante $\Sigma (a_n - ib_n) z^n$ admet son cercle de convergence comme coupure, et c'est probablement là un fait général, mais dont la démonstration m'échappe encore.