BULLETIN DE LA S. M. F.

F. BOULAD

Sur la représentation de l'équation d'ordre nomographique 4 à quatre variables par double alignement

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 366-369
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__366_1>

SUR LA REPRÉSENTATION DE L'ÉQUATION D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE 4 A QUATRE VARIABLES PAR DOUBLE ALIGNEMENT;

PAR M. FARID BOULAD, BEY.

On sait que toute équation à quatre variables d'ordre nomographique 4, représentable par un nomogramme à double alignement, peut être mise sous la forme suivante [1] :

$$\frac{f_1 f_2 + \gamma_{34}}{\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \rho} = -\frac{\delta_3 f_3 + \delta_4 f_4 + \rho}{\rho(f_3 f_4 + \gamma_{12})}. \tag{1}$$

---

(1) D'OCAGNE, *Cours de Calcul graphique et Nomographie*, p. 328.

Grâce à la notion des valeurs critiques de M. d'Ocagne, M. Soreau [1] a pu retrouver très simplement les conditions pour qu'une équation $F_{1234} = 0$ soit réductible à la forme (1), ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes

$$\frac{\delta_1 \delta_2}{\rho^2 \gamma} = \frac{\gamma_{34}}{\delta_3 \delta_4} = \frac{1}{\rho}, \tag{2}$$

qu'il avait précédemment établies pour que les coniques du nomogramme soient superposables.

Nous nous proposons de faire voir que ces résultats ressortent de notre méthode de disjonction des variables pour les équations de la forme

$$F_{123} = F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0, \tag{3}$$

méthode également fondée sur la considération des valeurs critiques.

Cette méthode consiste à résoudre les deux identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_2 F_{23} + G_2 G_{23} + H_2 H_{23} \equiv 0 & (\text{quel que soit } z_3), \\ F_3 F_{23} + G_3 G_{23} + H_3 H_{23} \equiv 0 & (\text{quel que soit } z_2), \end{array} \right. \tag{4}$$

en y appliquant le procédé de M. d'Ocagne pour la recherche des valeurs critiques.

Nous ferons remarquer que, si la fonction H_{23} est nulle, on lui attribuera l'expression suivante :

$$H_{23} = \Sigma \alpha f_2 f_3 + \Sigma \beta f_2 + \Sigma \gamma f_3 + \theta,$$

où f_2 et f_3 sont les fonctions par rapport auxquelles F_{23}, G_{23}, H_{23} seront prises nomographiquement rationnelles dans la résolution des identités (4), et α, β, γ, θ sont des paramètres assujettis à un certain nombre de relations qui seront déterminées de telle sorte que chacun des deux systèmes d'équations linéaires en F_2, G_2, H_2 et F_3, G_3, H_3 obtenus en résolvant les deux identités (4), soit compatible.

Cela posé, en représentant par f la valeur commune des deux rapports (1) et en posant

$$F = f, \qquad G = -1, \qquad H = 0,$$

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. CXLIV, 1907, p. 1027.

on aura à représenter les deux équations suivantes :

$$(5)\quad F(\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \rho) + G(f_1 f_2 + \gamma_{34}) + H(\alpha f_1 f_2 + \beta f_1 + \gamma f_2 + \theta) = 0,$$

$$(6)\quad F\rho(f_3 f_4 + \gamma_{12}) - G(\delta_3 f_3 + \delta_4 f_4 + \rho) + H(\alpha' f_1 f_2 + \beta' f_1 + \gamma' f_2 + \theta') = 0;$$

α, β, γ, θ, α', β', γ', θ' sont, d'après la remarque ci-dessus, des paramètres assujettis aux trois relations (11) déterminées ci-après.

Pour avoir les éléments F_1, G_1, H_1 et F_2, G_2, H_2 du déterminant générateur de l'équation (5), appliquons notre méthode précitée; nous aurons les deux systèmes d'équations linéaires

$$(7)\quad \begin{cases} \delta_2 F_1 + G_1 f_1 + H_1(\alpha f_1 + \gamma) = 0, \\ F_1(\delta_1 f_1 + \rho) + G_1 \gamma_{34} + H_1(\beta f_1 + \theta) = 0, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \delta_1 F_2 + G_2 f_2 + H_2(\alpha f_2 + \beta) = 0, \\ F_2(\delta_2 f_2 + \rho) + G_2 \gamma_{34} + H_2(\gamma f_2 + \theta) = 0. \end{cases}$$

A présent, cherchons l'équation du support commun des deux échelles (z_1) et (z_2) en employant les formules générales

$$x = \frac{F_i}{H_i}, \qquad y = \frac{G_i}{H_i},$$

qui définissent en coordonnées cartésiennes l'échelle (z_i) et d'après lesquelles la *charnière* (z) est, dans ce cas, rejetée à l'infini. Pour cela, éliminons f_i dans chacun des deux systèmes d'équations (7) et (8), après y avoir substitué à F_i, G_i, H_i respectivement x, y, 1. Nous aurons alors la même équation suivante du support commun des deux échelles (z_1) et (z_2) :

$$(9)\quad \delta_1\delta_2 x^2 - \gamma_{34} y^2 - \rho xy - (\alpha\rho - \beta\delta_2 - \gamma\delta_1)x - \theta y - (\alpha\theta - \beta\gamma) = 0$$

De même, si l'on applique la même marche ci-dessus à l'équation (6) pour avoir les éléments F_3, G_3, H_3 et F_4, G_4, H_4, on aura aisément les deux systèmes d'équations linéaires définissant ces éléments, et l'on en déduira l'équation suivante du support commun des deux échelles (z_3) et (z_4) :

$$(10)\quad \begin{aligned} &\rho^2\gamma_{12} x^2 - \delta_3\delta_4 y^2 - \rho^2 xy + \rho(\theta' + \alpha'\gamma_{12})x \\ &\qquad + (\delta_3\gamma' - \alpha'\rho + \beta'\delta_4)y + (\alpha'\theta' - \gamma'\beta') = 0. \end{aligned}$$

Or, pour que les deux supports ci-dessus coïncident, il faut et il suffit que les deux équations (9) et (10) soient identiques, c'est-à-dire que les deux conditions (2) soient remplies ainsi que les trois relations suivantes entre les paramètres α, β, ..., θ :

$$(11) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{-\alpha\rho + \beta\delta_2 + \delta_1\theta}{\rho(\theta' + \alpha'\gamma_{12})} = \frac{-\theta}{\delta_3\gamma - \alpha'\rho + \delta_4\beta'} = \frac{-\alpha\theta + \beta\gamma}{\alpha'\theta' - \beta'\gamma'}.$$

Comme ces relations peuvent être satisfaites par une infinité de valeurs données à ces huit paramètres, il résulte que les conditions (2) sont les seules nécessaires et suffisantes.