G. BRATU

**Sur les équations intégrales non linéaires**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 41 (1913), p. 346-350
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__346_1>

## SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES;

Par M. G. Bratu.

**1.** Soit l'équation intégrale du premier ordre

$$\Phi[x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, F[y, \varphi(y)]\, dy, \tag{1}$$

dans laquelle nous supposons le noyau $K(x, y)$ une fonction continue et les fonctions données $\Phi(x, z)$, $F(y, z)$ des séries *entières* en $z$ pour $0 \leqq x \leqq 1$ et $0 \leqq y \leqq 1$.

Soit, pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$ une solution de cette équation. En faisant $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $\varphi = \varphi_0 + \psi$, la *forme intégrale linéaire* en $\psi$ est

$$(2) \qquad \Phi'(x, \varphi_0)\Psi(x) - \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) F'(y, \varphi_0)\Psi(y)\,dy,$$

$\Phi'$ et $F'$ désignant des dérivées par rapport à $\varphi$. Il y a trois cas à distinguer :

1° Si $\Phi'(x, \varphi_0) \neq 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, la solution $\varphi_0(x)$ sera de *deuxième espèce*.

2° Si $\Phi'(x, \varphi_0)$ admet des racines isolées dans l'intervalle $(0, 1)$, $\varphi_0(x)$ sera une solution de *troisième espèce*.

3° Si $\Phi'(x, \varphi_0) \equiv 0$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, la solution $\varphi_0(x)$ sera de *première espèce*.

Dans le premier cas, le noyau de l'expression (2) peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad K_{\varphi_0}(x, y) = K(x, y) F'[y, \varphi_0(y)] \frac{1}{\Phi'[x, \varphi_0(x)]}.$$

**2.** Si $\varphi = \varphi_0(x)$, *finie* pour $0 \leqq x \leqq 1$, annule l'expression $\Phi(x, \varphi)$, l'équation (1) admet *pour* $\lambda = 0$ la solution $\varphi = \varphi_0(x)$ de *deuxième espèce*. Comme la fonction déterminante de Fredholm $D(\lambda)$ formée avec le noyau (3) est égale à 1 pour $\lambda = 0$, il résulte d'après le *théorème de Schmidt* [1] que l'équation (1) admet une solution et une seule $\varphi(x, \lambda)$ se réduisant à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = 0$.

Ainsi le nombre des solutions de l'équation (1), régulières autour de $\lambda = 0$, est au moins égal au nombre des solutions finies de l'équation $\Phi(x, \varphi) = 0$.

Dans le plan de la variable imaginaire $\lambda$, en dehors de l'origine, on peut, après M. Schmidt, énoncer le théorème suivant :

*Si l'équation* (1) *admet, pour* $\lambda = \lambda_0$, *la solution finie*

---

[1] *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* (*Math. Ann.*, t. LXV, 1908).

$\varphi = \varphi_0(x)$ *et si le déterminant de Fredholm* $D(\lambda)$ *formé avec le noyau* (3) *est différent de zéro pour* $\lambda = \lambda_0$ *et* $\varphi = \varphi_0$, *l'équation* (1) *admet une solution et une seule* $\varphi(x, \lambda)$, *holomorphe en* $\lambda$ *autour de* $\lambda_0$ *et se réduisant à* $\varphi_0(x)$ *pour* $\lambda = \lambda_0$.

Si $D(\lambda)$ est nul pour $\lambda = \lambda_0$ et $\varphi = \varphi_0$, il y a *ramification* autour de $\lambda_0$, et $\varphi_0(x)$ est une *solution limite*.

3. La forme particulière $K(x, y)A(x)B(y)$, sous laquelle se présente le noyau (3), nous permet de faire une remarque pour le cas où le noyau donné $K(x, y)$ serait *symétrique* et *défini*. Le noyau (3) est alors symétrisable et toutes ses constantes caractéristiques sont *réelles*. Donc si l'équation (1) admet une solution *finie* $\varphi_0(x)$ pour une valeur $\lambda_0$ en dehors de l'axe réel, cette solution est régulière autour de $\lambda_0$.

Le théorème de M. Schmidt ne nous apprend rien sur les solutions de première et de troisième espèce. On peut remarquer que, si $\Phi(x, \varphi)$ est de premier degré en $\varphi$, toutes les solutions de l'équation (1) sont *de même espèce*.

4. Si $K(x, y) = 0$ pour $y > x$, on a l'équation du type de Volterra. Comme dans ce cas le noyau (3) n'admet aucune constante caractéristique, l'équation (1) ne peut pas admettre des solutions limites.

5. *Équations intégrales algébriques.* — C'est le cas des équations de la forme (1) dans lesquelles les fonctions $\Phi$ et $F$ sont des polynomes en $\varphi$.

Soit, par exemple, l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, P_n[y, \varphi(y)]\, dy + f(x), \tag{4}$$

dans laquelle

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{p} X_i(x)\, Y_i(y)$$

et

$$P_n(y, \varphi) = A_0(y) + A_1(y)\varphi + \ldots + A_n(y)\varphi^n.$$

En posant

$$t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y)\, P_n[y, \varphi(y)]\, dy,$$

la solution de l'équation (4) prend la forme

$$(5) \qquad \varphi(x) = \sum_{i=0}^{p} X_i(x)\, t_i(\lambda) + f(x),$$

les fonctions $t_i(\lambda)$ étant les solutions du système d'équations algébriques

$$(6) \qquad t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y)\, P_n\left[ y, \sum_{j=0}^{p} X_j(y) t_j + f(y) \right] dy,$$

que nous appellerons *système implicite adjoint à l'équation intégrale* (4).

Par suite :

1° Toute solution de l'équation (4) est *fonction algébrique de* $\lambda$.

2° Autour de $\lambda = 0$, *une solution et une seule est holomorphe;* elle s'annule pour $\lambda = 0$. *Toutes les autres branches ont* $\lambda = 0$ *comme pôle ou point critique d'ordre négatif.*

3° Pour $\lambda \neq 0$, l'équation (4) admet en général et au plus $n^p$ solutions.

4° Toutes ces solutions n'admettent comme points singuliers $\lambda \neq 0$ que *des points critiques de deuxième ordre*, c'est-à-dire qu'autour de toute solution *limite* $\varphi_0(x)$ il y a *biramification.*

Comme les fonctions $t_i(\lambda)$ peuvent se mettre sous la forme $t_i = R_i(\lambda, \Lambda)$, $R_i$ étant *rationnelle* en $\lambda$ et $\Lambda$, et $\Lambda$ représentant une *fonction algébrique* de $\lambda$ (1), l'expression (5) prend la forme

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{F_1(x, \lambda, \Lambda)}{F_2(\lambda, \Lambda)},$$

$F_1$ et $F_2$ étant des polynomes entiers en $\lambda$ et $\Lambda$.

6. Le cas de $p = \infty$ est beaucoup plus difficile, car on a à résoudre un nombre infini d'équations implicites à une infinité d'inconnues.

M. R. d'Adhémar (2), en employant la méthode de M. E. Picard,

---

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 53 et 470.

(2) R. d'Adhémar, *Les fonctions implicites en nombre infini et l'équation intégrale non linéaire* (*Bull. Soc. math.*, 1908, p. 195).

a démontré l'existence d'une solution holomorphe autour de $\lambda = 0$. Nous l'avons démontrée dans un cas plus général à l'aide des majorantes [1].

7. *Équations intégrales transcendantes.* — Soit l'équation avec un *noyau de M. Goursat*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sum_{i=1}^{p} A_i(x) B_i(y) F[\varphi(y)]\, dy, \tag{7}$$

dans laquelle $F(\varphi)$ est une fonction *entière* en $\varphi$. Sa résolution se réduit à celle du système implicite adjoint

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i = \lambda \displaystyle\int_0^1 B_i(y) F[A_1(y)t_1 + A_2(y)t_2 + \ldots + A_p(y)t_p]\, dy \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{array} \right. \tag{8}$$

Si, pour $\lambda = \lambda_0$, ce système admet les solutions $t_1^0, t_2^0, \ldots, t_p^0$ et si le jacobien correspondant $D(\lambda, t_1, t_2, \ldots, t_p)$ est différent de zéro pour ces valeurs, le système (8) admet des solutions $t_1$, $t_2, \ldots, t_p$ régulières autour de $\lambda = \lambda_0$. Or, si l'on désigne par $F'_\varphi$ la dérivée de $F(\varphi)$ et si l'on pose

$$X_i = A_i, \qquad Y_i = B_i F'_\varphi(A_1 t_1 + A_2 t_2 + \ldots + A_p t_p),$$

d'après un calcul de M. Goursat [2] dans le cas de l'équation de Fredholm, on trouve comme jacobien le polynome intégral

$$D(\lambda, t_1, t_2, \ldots, t_p)$$
$$= \sum (-1)^{p-\nu} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\nu \\ x_1, x_2, \ldots, x_\nu \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{\nu} F'_\varphi[\varphi(x_i)]\, dx_1 \ldots dx_\nu$$

qui n'est que le déterminant de Fredholm correspondant au noyau $K(x, y) F'_\varphi[\varphi(y)]$. On retrouve ainsi, dans ce cas, le théorème de M. Schmidt.

---

(1) G. Bratu, *Sur l'équation intégrale exponentielle* (*C. R. Acad. Sc.*, 18 avril 1911).

(2) E. Goursat, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXV, 1907, p. 163).