BULLETIN DE LA S. M. F.

BARRÉ

Théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 242-339
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__242_1>

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE;

Par M. Barré.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons, dans les pages suivantes, d'étudier systématiquement les surfaces engendrées par une hélice circulaire dont jusqu'ici on n'a guère, à notre connaissance, poursuivi l'étude que pour la variété formée par les hélicoïdes.

Ce travail comprendra cinq Chapitres. Dans le premier, nous établirons les formules générales de notre théorie; dans le second, nous étudierons les questions afférentes à la répartition des normales à la surface; dans le troisième, nous examinerons quelques problèmes relatifs à la détermination de certaines de ces surfaces par des conditions imposées aux courbures des hélices génératrices, tandis que dans le quatrième Chapitre nous envisagerons tout particulièrement des questions relatives à la courbure moyenne et à la courbure totale de ces surfaces. Le cinquième sera constitué par un essai de classification.

Nous rencontrerons au cours de ces études quelques surfaces particulièrement intéressantes dont nous nous réservons d'aborder ultérieurement la monographie détaillée.

CHAPITRE I.

ÉTABLISSEMENT ET PREMIÈRES APPLICATIONS DES FORMULES GÉNÉRALES.

1. Les équations canoniques de l'hélice circulaire sont :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = K\varphi \end{cases}$$

Lorsque cette hélice varie en dépendant d'un paramètre, ρ et K sont fonctions d'un paramètre t dont dépend également le déplacement du trièdre de référence. J'appellerai *cercle principal* de l'hélice le cercle défini par les relations $z = 0$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$; K *n'est autre que le pas réduit de l'hélice. Nous l'appellerons aussi pas linéaire* (1) par opposition *au pas angulaire défini dans d'autres Mémoires* (2) *et égal dans le cas présent à* $\frac{K}{\rho}$. Je ne reviendrai pas ici sur l'établissement des formules générales de Géométrie cinématique que j'ai données ailleurs (3); je me bornerai à les appliquer. J'appellerai *trièdre fondamental* le trièdre de référence dont il vient d'être question. Nous supposerons toujours laissé de côté le cas où le plan xOy enveloppe le cercle de l'infini, toutes les formules et la définition même des axes tombant alors en défaut. Dans ces conditions,

---

(1) Dans ce qui suit, quand il sera question de pas, sans autre mention, il s'agira toujours du pas linéaire K.

(2) Cf. *Étude sur le déplacement d'une hélice de forme variable* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXVII, 1909); *Contribution à la théorie des hélices* (*Revue du Génie militaire*, 2e semestre, 1910).

(3) Cf. *Applications de la Géométrie cinématique à l'étude des surfaces engendrées par une courbe variable* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1912).

on peut faire $q = 0$, dans les formules générales du déplacement, l'hélice étant toujours représentée par les équations (1) [1].

Les formules générales donnant les composantes du déplacement élémentaire absolu sur les trois axes mobiles d'un point de l'hélice de coordonnéer x, y, z sont :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= -\rho \sin\varphi\, d\varphi + \mathcal{L}\, dt,\\ \delta y &= \rho\cos\varphi\, d\varphi + \mathfrak{M}\, dt,\\ \delta z &= \mathrm{K}\, d\varphi + \mathfrak{N}\, dt,\end{aligned}\right.$$

avec

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{L} &= u + qz - ry + \rho'\cos\varphi,\\ \mathfrak{M} &= v + rx - pz + \rho'\sin\varphi,\\ \mathfrak{N} &= w + py - qx + \mathrm{K}'\varphi,\end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles x, y et z sont données en fonction de ρ et de φ par les relations (1) et les lettres accentuées représentent des dérivées par rapport à la variable indépendante, de telle sorte que

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{L} &= u + q\mathrm{K}\varphi - r\rho\sin\varphi + \rho'\cos\varphi,\\ \mathfrak{M} &= v - p\mathrm{K}\varphi + r\rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi,\\ \mathfrak{N} &= w + \mathrm{K}'\varphi + \rho(p\sin\varphi - q\cos\varphi).\end{aligned}\right.$$

L'élément linéaire de la surface est donné par la formule

$$(5)\qquad \delta s^2 = \mathrm{E}\, dt^2 + 2\mathrm{F}\, dt\, d\varphi + \mathrm{G}\, d\varphi^2,$$

dans laquelle on pose

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathcal{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2\\ &= \varphi^2[(p^2+q^2)\mathrm{K}^2 + \mathrm{K}'^2]\\ &\quad - 2\varphi[\mathrm{K}r\rho(q\sin\varphi + p\cos\varphi)\\ &\qquad + (p\sin\varphi - q\cos\varphi)(\mathrm{K}\rho' - \mathrm{K}'\rho) + \mathrm{K}(pv - qu) - w\mathrm{K}']\\ &\quad + u^2 + v^2 + w^2 + \rho'^2 + 2\rho'(u\cos\varphi + v\sin\varphi)\\ &\quad + \rho^2[r^2 + (p\sin\varphi - q\cos\varphi)^2]\\ &\quad - 2\rho[r(u\sin\varphi - v\cos\varphi) - w(p\sin\varphi - q\cos\varphi)],\\ \mathrm{F} &= -\rho(\mathcal{L}\sin\varphi - \mathfrak{M}\cos\varphi) + \mathrm{K}\mathfrak{N}\\ &= \mathrm{K}\varphi[\mathrm{K}' - \rho(q\sin\varphi + p\cos\varphi)]\\ &\quad + w\mathrm{K} + \rho[\mathrm{K}(p\sin\varphi - q\cos\varphi) - u\sin\varphi + v\cos\varphi + r\rho],\\ \mathrm{G} &= \mathrm{K}^2 + \rho^2.\end{aligned}\right.$$

Dans certains calculs il y a avantage à mettre en évidence

---

[1] Cf. *Applications, etc.*, n° 2.

les fonctions

$$L = \mathfrak{M} \cos\varphi - \mathfrak{L} \sin\varphi, \qquad M = \mathfrak{L} \cos\varphi + \mathfrak{M} \sin\varphi.$$

Aussi reprendrons-nous l'exposé des formules précédentes en y introduisant ces fonctions. En développant et posant pour la symétrie des notations $N = \mathfrak{N}$, on trouve les expressions

$$(10)\quad \begin{cases} L = -u \sin\varphi + v \cos\varphi + r\rho - K\varphi(q \sin\varphi + p \cos\varphi), \\ M = u \cos\varphi + v \sin\varphi + \rho' + K\varphi(q \cos\varphi - p \sin\varphi), \\ N = w + \rho(p \sin\varphi - q \cos\varphi) + K'\varphi, \end{cases}$$

$$(11)\quad KL - N\rho = -\varphi[K^2(q \sin\varphi + p \cos\varphi) + K'\rho] + \cos\varphi(Kv + q\rho^2) - \sin\varphi(Ku + p\rho^2) + \rho(Kr - w).$$

Les formules du déplacement élémentaire d'un point de l'hélice génératrice deviennent avec ces notations

$$(11)\quad \begin{cases} \delta x = M \cos\varphi\, dt - (\rho\, d\varphi + L\, dt) \sin\varphi, \\ \delta y = M \sin\varphi\, dt + (\rho\, d\varphi + L\, dt) \cos\varphi, \\ \delta z = N\, dt + K\, d\varphi. \end{cases}$$

L'élément linéaire prend la forme

$$(12)\quad \delta s^2 = M^2\, dt^2 + (\rho\, d\varphi + L\, dt)^2 + (N\, dt + K\, d\varphi)^2$$

ou la forme (5) en posant

$$(13)\quad E = L^2 + M^2 + N^2, \qquad F = L\rho + KN, \qquad G = K^2 + \rho^2.$$

La formule (12) conduit aussi à la suivante :

$$(14)\quad (\rho^2 + K^2)\, \delta s^2 = [(\rho^2 + K^2) M^2 + (KL - N\rho)^2]\, dt^2 + [(\rho^2 + K^2)\, d\varphi + (L\rho + KN)\, dt]^2,$$

qui met immédiatement en évidence l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des génératrices

$$(15)\quad (\rho^2 + K^2)\, d\varphi + (L\rho + KN)\, dt = 0.$$

2. Normale et plan tangent. — On obtient les paramètres directeurs A, B, C de la normale en un point de la surface en écrivant que cette droite est perpendiculaire aux deux déplace-

ments correspondant à $d\varphi = 0$ et $dt = 0$; on a ainsi :

$$(16) \quad \begin{cases} A = \rho \mathfrak{N} \cos\varphi - K\mathfrak{M} = -KM \sin\varphi - (KL - N\rho)\cos\varphi, \\ B = \rho\mathfrak{N} \sin\varphi + K\mathfrak{L} = \quad KM\cos\varphi - (KL - N\rho)\sin\varphi, \\ C = -\rho(\mathfrak{L}\cos\varphi + \mathfrak{M}\sin\varphi) = -\rho M. \end{cases}$$

Nous poserons

$$(17) \qquad H = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

d'où

$$(18) \quad \begin{aligned} H^2 &= M^2(\rho^2 + K^2) + (KL - N\rho)^2 \\ &= [\rho\mathfrak{N} - K(\mathfrak{M}\cos\varphi - \mathfrak{L}\sin\varphi)]^2 + (\rho^2 + K^2)(\mathfrak{L}\cos\varphi + \mathfrak{M}\sin\varphi)^2. \end{aligned}$$

Angle de la normale à la surface avec le plan osculateur de la génératrice. — Les cosinus directeurs de la normale à la surface ont pour expressions

$$(19) \qquad \lambda = \frac{A}{H}, \qquad \mu = \frac{B}{H}, \qquad \gamma = \frac{C}{H}.$$

Ceux de la normale principale sont évidemment : $-\cos\varphi$, $-\sin\varphi$, 0, en adoptant une fois pour toutes le signe $+$ devant H et, en désignant par ϖ l'angle de la normale principale de la génératrice avec la normale à la surface :

$$(20) \quad \cos\varpi = \frac{-\mathfrak{N}\rho + K(\mathfrak{M}\cos\varphi - \mathfrak{L}\sin\varphi)}{\sqrt{[-\mathfrak{N}\rho + K(\mathfrak{M}\cos\varphi - \mathfrak{L}\sin\varphi)]^2 + (\rho^2 + K^2)(\mathfrak{L}\cos\varphi + \mathfrak{M}\sin\varphi)^2}}$$

ou

$$(21) \qquad \cos\varpi = \frac{KL - N\rho}{[KL - N\rho)^2 + M^2(\rho^2 + K^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

On a d'ailleurs, au signe près,

$$(22) \qquad \tan g\varpi = (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} \frac{M}{KL - N\rho}.$$

Cet angle, si l'on veut préciser la signification du signe adopté pour son cosinus, est celui de la demi-droite de paramètres directeurs A, B, C avec la direction de la normale principale dirigée vers le centre de courbure de la courbe.

On remarque que l'équation

$$KL - N\rho = 0$$

définit sur la surface le lieu des points où la génératrice touche l'une des asymptotiques.

En effet, c'est le lieu des points pour lesquels $\cos\varpi$ est nul.

3. Théorème I. — *Le cylindre circulaire droit est la seule surface dont une famille de géodésiques soit constituée par des hélices circulaires.*

Pour qu'une génératrice déterminée soit une géodésique, il faut et il suffit qu'en chacun de ses points on ait

$$\cos^2\varpi = 1,$$

c'est-à-dire

$$(\rho^2 + K^2)M^2 = 0,$$

et, si on laisse de côté, ce que nous ferons systématiquement dans ce qui suit, la solution $\rho^2 + K^2 = 0$ qui conduit à une ligne de longueur nulle, on est amené à écrire que l'équation

$$M \equiv u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho' + K\varphi(q\cos\varphi - p\sin\varphi) = 0$$

est vérifiée pour toute valeur de φ.

Si l'on suppose $K \neq 0$ (c'est-à-dire que la génératrice considérée ne soit pas un cercle), on obtient immédiatement les conditions

$$u = v = \rho' = q = p = 0. \tag{23}$$

Si, comme l'indique l'énoncé, ces relations doivent être vérifiées pour toutes les hélices génératrices, les équations (23) devront être vérifiées pour toutes valeurs de t et la surface engendrée sera visiblement un cylindre droit.

Ceci suppose essentiellement que l'on n'ait pas $K(t) \equiv 0$, c'est-à-dire que la surface ne dégénère pas en une surface cerclée. On pourrait étudier ce cas et l'on trouverait les surfaces canaux [1].

---

[1] Nous laisserons ici de côté l'étude des surfaces cerclées qui rentreraient comme cas particulier dans celle des surfaces hélicées; nous signalerons à leur sujet la Thèse de M. Demartres, *Sur les surfaces à génératrices circulaires* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 123), et un second Mémoire du même auteur inséré dans les *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. IV, p. 145.

On est ainsi amené dès à présent à faire une remarque très importante et qui sera utile dans tout le cours de cette étude :

Dans les problèmes de ce genre, nous supposerons essentiellement que K *n'est pas nul, c'est-à-dire que l'hélice étudiée n'est pas un cercle, sauf mention expresse du contraire. Si donc on envisage une propriété qui doive être réalisée pour certaines hélices de la famille étudiée, il peut y avoir exception aux conclusions énoncées pour les génératrices dégénérées en cercles correspondant aux racines de l'équation* $K(t) = 0$, *et une étude spéciale s'impose si l'on désire savoir si ces génératrices particulières répondent à la question.*

S'il existe une ou plusieurs valeurs du paramètre t pour lesquelles les équations (23) soient vérifiées sans pourtant être identiques, on est conduit au théorème suivant :

Théorème II. — *Si dans le mouvement d'une hélice circulaire, pour une position de celle-ci correspondant à une variation nulle du rayon du cercle principal de la génératrice, le mouvement du trièdre fondamental admet comme axe hélicoïdal instantané l'axe de l'hélice correspondante, celle-ci est une géodésique de la surface. Ces conditions suffisantes sont aussi nécessaires.*

Remarques. — I. Si l'on observe que la présence d'un plan de base stationnaire nécessitée par les conditions $p = q = 0$ permet d'introduire pour la génératrice correspondante la relation $r = 0$ [1], on est amené à un énoncé un peu différent du théorème II :

Si dans le mouvement d'une hélice circulaire, pour une position de celle-ci correspondant à une variation nulle du rayon du cercle principal, le mouvement élémentaire du trièdre fondamental se réduit à une translation suivant l'axe de

---

[1] Pour la démonstration de ce fait et des divers résultats généraux rappelés dans ce travail, *voir* par exemple notre Mémoire *Application de la Géométrie cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1912).

l'hélice considérée, celle-ci est une géodésique de la surface. Ces conditions suffisantes sont aussi nécessaires;

Si une génératrice est une géodésique, la variation du rayon de son cercle principal est nulle et l'on peut lui associer un trièdre de référence fondamental dont le mouvement élémentaire dans la position considérée se réduise à une translation.

II. La propriété qui fait l'objet du théorème I est presque évidente géométriquement si l'on observe que la surface en question doit être l'enveloppe du cylindre principal de la génératrice, ce qui ne peut arriver que si la surface enveloppe coïncide avec l'enveloppée, la caractéristique d'un cylindre circulaire ne pouvant être une hélice circulaire si elle est bien déterminée.

4. Conditions pour qu'une hélice génératrice soit asymptotique. Surface dont toutes les génératrices sont asymptotiques. — Pour qu'une génératrice déterminée soit une asymptotique de la surface, il faut et il suffit que, pour tous les points de cette génératrice, $\cos\varpi$ soit nul, ce qui s'exprime par la condition

$$KL - N\rho = 0.$$

En se reportant à l'expression [formule(11)] de $KL - N\rho$, on doit donc écrire que l'équation

$$-\varphi[K^2(q\sin\varphi + p\cos\varphi) + K'\rho] + \cos\varphi(Kv + q\rho^2) - \sin\varphi(Ku + p\rho^2) + \rho(Kv - w) = 0$$

est vérifiée pour toute valeur de φ, d'où l'on tire, comme dans la question précédente, le résultat suivant : Une génératrice asymptotique est caractérisée par les relations

$$(24)\qquad p = q = r = K' = 0, \qquad u = v = w = 0.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une hélice génératrice soit une asymptotique de la surface qu'elle engendre en l'une de ses positions, est que son axe et son pas soient stationnaires et qu'on puisse lui associer un trièdre fondamental tel que le plan de son cercle principal soit également stationnaire dans la position considérée.*

Dans le cas où les relations sont vérifiées quel que soit t, le pas est constant, le trièdre fondamental correspondant est fixe et les équations de la surface par rapport à ces axes se réduisent à

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = K_0\varphi,$$

en désignant par K_0 la valeur constante du pas, notation que nous adopterons dans tous les cas analogues.

On reconnaît les équations de l'hélicoïde gauche minimum; donc :

THÉORÈME IV. — *L'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface à génératrices hélices circulaires dont celles-ci forment une famille d'asymptotiques.*

5. AUTRES FORMULES RELATIVES A LA NORMALE A LA SURFACE. ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DIVERS. — Les cosinus directeurs de la normale sont donnés par les formules déjà signalées :

$$(19) \qquad \lambda = \frac{A}{H}, \qquad \mu = \frac{B}{H}, \qquad \nu = \frac{C}{H}.$$

On peut poser

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{KM}{H} &= -\sin V \sin W, \\ \frac{KL - \rho N}{H} &= -\sin V \cos W, \\ \frac{\rho M}{H} &= \cos V. \end{aligned} \right.$$

On voit immédiatement que $\cos V = -\nu$. Donc :

V n'est autre que le supplément de l'angle précédemment défini du plan tangent en un point avec le plan de base de la génératrice correspondante.

L'angle W est défini par la relation

$$(26) \qquad \operatorname{tang} W = \frac{KM}{KL - \rho N}.$$

Cet angle W est lié aux éléments géométriques V et ϖ par l'une ou l'autre des relations

$$(27) \quad \operatorname{tang} W = \frac{K}{\rho}\,\frac{\cos V}{\cos\varpi} = K_1\frac{\cos V}{\cos\varpi} \qquad \text{ou} \qquad \sin W = -K_1 \cot V,$$

formules dans lesquelles K_1 représente le pas angulaire de la courbe.

Expressions nouvelles de λ, μ *et* ν. — En développant les valeurs de A, B, C données par le second groupe de formules (16) et y remplaçant les éléments qui y figurent par leurs expressions en V et W, on trouve les formules suivantes :

$$(28)\qquad \lambda = \sin V \cos(\varphi - W), \qquad \mu = \sin V \sin(\varphi - W), \qquad \nu = -\cos V.$$

6. Variation des paramètres directeurs et des cosinus directeurs. — 1° Ces variations des paramètres directeurs sont données par les formules générales dont je me borne à écrire la première :

$$(29)\qquad \delta A = \frac{\partial A}{\partial \varphi}\, d\varphi + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + q\,C - r\,B\right) dt,$$

expressions dans lesquelles on remplacera A, B, C par leurs valeurs données par l'un ou l'autre des groupes (16).

Le développement de ces calculs ne présente pas d'intérêt spécial pour le moment et n'offre aucune difficulté.

2° *Variations des cosinus directeurs.* — On obtient immédiatement

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} d\lambda &= -\sin V \sin(\varphi - W)(d\varphi - dW) + \cos V \cos(\varphi - W)\, dV,\\ d\mu &= \sin V \cos(\varphi - W),\\ d\nu &= \sin V\, dV \end{aligned}\right.$$

et, en posant,

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} -d\psi &= d\varphi - dW + r\,dt + \cot V[p\cos(\varphi - W) + q \sin(\varphi - W)]\, dt,\\ d\chi &= dV + [p \sin(\varphi - W) - q\cos(\varphi - W]\, dt, \end{aligned}\right.$$

on trouve, par substitution dans les formules générales du déplacement, des valeurs de $d\lambda$, ..., données par les formules (30) :

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\lambda &= \sin V \sin(\varphi - W)\, d\psi + \cos V \cos(\varphi - W)\, d\chi,\\ \delta\mu &= -\sin V \cos(\varphi - W)\, d\psi + \cos V \sin(\varphi - W)\, d\chi,\\ \delta\nu &= \sin V\, d\chi. \end{aligned}\right.$$

Soit $d\omega$ l'arc de l'indicatrice des normales correspondant à un déplacement quelconque, on obtient immédiatement la formule

$$(33) \qquad d\omega^2 = d\chi^2 + \sin^2 V\, d\psi^2.$$

Lorsque dans les formules de ce numéro et du précédent, on suppose K *égal à zéro, elles se simplifient considérablement et l'on obtient les formules données par M. Demartres dans son Mémoire sur les surfaces cerclées* (*Annales de l'École Normale supérieure*, mai 1885).

L'examen de la formule (33) montre que $d\chi$ n'est autre que la variation de l'angle du plan tangent avec un plan fixe qui, à l'origine, coïnciderait avec le plan de base de l'hélice sur laquelle se trouve l'origine du déplacement; $d\psi$ serait l'angle des plans menés par l'axe de l'hélice en question parallèlement aux deux normales infiniment voisines, ou, ce qui revient au même, l'angle élémentaire dont doit tourner, dans le plan xOy fixe et coïncidant à l'origine avec le plan de base de l'hélice précédente, la trace du plan tangent sur ce plan.

Dans un Mémoire inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1907), je rappelais l'attention sur un élément proposé par M. Demartres en 1887, la flexion.

De ce qui précède on déduit sans difficulté pour expression de la flexion $\mathcal{F}$ d'un déplacement par rapport au plan de base de la génératrice de son origine :

$$(33) \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{\sin^2 V}\frac{dz}{d\psi}.$$

7. Dans la surface cerclée l'angle W devient nul identiquement; il en est de même dans les cylindres droits et dans ces deux cas seulement. Cela résulte immédiatement de ce que tang W devant être nulle, le produit KM doit être identiquement nul.

Proposons-nous maintenant de chercher s'il existe des surfaces pour lesquelles l'angle W *réponde à l'une des conditions suivantes :*

I. *Rester constant lorsqu'on se déplace sur une hélice génératrice tout en pouvant varier d'une génératrice à une autre.*

II. *Rester constant sur toute la surface.*

Les deux parties peuvent se traiter en même temps, la deuxième étant un cas particulier de la première; nous écrirons que

$$\tang W$$

se réduit à une fonction de t, $f(t)$; dans le cas où f est une simple constante on aura la solution de la deuxième partie.

Nous devons donc écrire qu'il existe une fonction $f(t)$ telle qu'on ait identiquement

$$KM - f(t)[KL - \rho N] \equiv 0. \tag{34}$$

En égalant à zéro la fonction trigonométrique coefficient du terme en φ dans le premier membre de cette identité, on doit exprimer que la fonction linéaire en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$,

$$K^2(q\cos\varphi - p\sin\varphi) + f(t)[K^2(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + K'\rho]$$

est identiquement nulle; d'où les trois relations

$$\left\{\begin{aligned} K^2(q + fp) &= 0,\\ K^2(fq - p) &= 0,\\ fK' &= 0. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Outre les solutions $K = 0$, ou $f = M = 0$ qui donnent des surfaces cerclées ou des hélices engendrant un cylindre droit, on trouve finalement (¹)

$$p = q = K' = 0. \tag{35 bis}$$

La surface est à plan directeur et ses génératrices sont à pas constant.

Le terme trigonométrique du premier membre de l'équation (34) se réduit alors à

$$f\rho w + K_0 u\cos\varphi + K_0 v\sin\varphi + K_0\rho' + f(t)K_0(u\sin\varphi - v\cos\varphi).$$

(¹) On laisse de côté le cas de $f = \pm i$. Dans cette hypothèse spéciale l'angle W ne serait plus bien défini par sa tangente. D'ailleurs, en effectuant les calculs, on trouve des surfaces engendrées par des hélices imaginaires dont le pas est constant, dont le plan de base conserve une direction fixe et dont le lieu du centre du cercle principal est enveloppé par un des plans passant par l'axe de l'hélice et l'une des asymptotes du cercle principal. En réalité, si $f = \pm i$, les équations (35) admettraient la solution $p^2 + q^2 = 0$ qui est à rejeter en dehors du cas où $p = q = 0$

En écrivant qu'il est identiquement nul et laissant de côté les cas déjà cités, on trouve

$$(36) \qquad u = v = 0, \qquad K_0 \rho' + f \rho w = 0.$$

Donc l'axe de l'hélice et son pas linéaire sont fixes. Il est évident que ces conditions caractérisent les hélicoïdes.

Nous pouvons aussi le vérifier en remarquant que les équations de la surface, par rapport à des axes fixes évidents, sont

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = F(t) + K_0 \varphi,$$

relations dans lesquelles on a

$$F = \int w \, dt.$$

On peut d'ailleurs les écrire en prenant ρ pour variable indépendante, car supposer ρ fixe conduirait à un cylindre droit, engendré par des hélices parallèles, ce qui rentre dans un cas déjà étudié et plus général. L'hélicoïde pourra donc être déterminé par les équations

$$(37) \qquad x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = F(\rho) + K_0 \varphi,$$

la fonction $F(\rho)$ devant satisfaire à la dernière équation (36), qui est la dernière condition du problème. Ce qui montre qu'à une forme $f(\rho)$ donnée correspondra toujours une surface répondant à la question, la fonction F étant déterminée par l'équation différentielle

$$K_0 + \rho f(\rho) \frac{dF}{d\rho} = 0$$

ou

$$F = - K_0 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho f(\rho)},$$

la limite ρ_0 étant d'ailleurs arbitraire. Son indétermination n'équivaut d'ailleurs qu'à une translation des axes.

Les surfaces répondant à la question sont [outre les cylindres pour lesquels la fonction $f(t)$ se réduit à zéro] des hélicoïdes. A une fonction $f(\rho)$ donnée correspond une famille d'hélicoïdes de pas arbitraire et définie par les équations (37) *dans* *lesquelles on fera*

$$F(\rho) = -K_0 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho f(\rho)}.$$

Si $f(t)$ se réduit à une constante a non nulle, on trouve

$$F = \frac{K_0}{a} \operatorname{Log} b\rho \qquad (b \text{ const.})$$

Donc :

Les surfaces pour lesquelles l'angle W *est constant et différent de zéro ou de* $\frac{\pi}{2}$ *sont des hélicoïdes ayant pour méridienne une logarithmique.*

Dans ce qui précède on a laissé de côté le cas de $W = \frac{\pi}{2}$ correspondant à $f(t)$ infini. On voit directement que ce cas correspond à l'identité

$$KL - N\rho \equiv 0.$$

La surface pour laquelle W *est constamment droit est la surface de vis à filet carré.*

8. Théorème V. — *Les hélicoïdes et les cylindres droits* [1] *sont les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire telle que le plan tangent en chaque point d'une génératrice quelconque fasse un angle constant avec le plan de base de la génératrice considérée, angle dont la valeur dépend d'ailleurs en général de la génératrice considérée.*

Pour exprimer que l'angle V ne dépend que de la génératrice, nous écrirons que $\frac{1}{\cos^2 V}$ est fonction de t seul, et en se reportant à la dernière des formules (25) que l'expression

$$K^2 + \rho^2 + \left(\frac{KL - \rho N}{M}\right)^2,$$

et plus simplement que $\frac{KL - \rho N}{M}$ est fonction de t.

---

[1] Bien que le cylindre droit puisse être considéré comme cas limite de l'hélicoïde, il y a lieu d'en faire mention, ces surfaces pouvant être considérées comme résultant du mouvement d'une hélice à pas variable. Cette remarque s'applique dans des questions analogues.

Comme $\frac{KL - \rho N}{M}$ ne dépend que de t en même temps que

$$\frac{KL - \rho M}{KM},$$

on retombe sur les calculs rencontrés dans la question précédente : on trouve les hélicoïdes ou les cylindres $\left(\text{pour lesquels } V = \frac{\pi}{2}\right)$.

Si l'on veut que l'angle V soit le même sur la surface, il résulte de là que, hors le cas des cylindres pour lesquels $V = \frac{\pi}{2}$, on trouve les hélicoïdes développables. Donc :

Corollaire. — *L'hélicoïde développable est la seule surface pour laquelle le plan tangent en chaque point fasse avec le plan de base de la génératrice correspondante un angle non droit constant sur toute la surface.*

Des calculs développés dans le n° 7 on déduit aussi sans difficulté la proposition suivante :

Théorème VI. — *L'angle ϖ formé par le plan osculateur à l'hélice génératrice avec la normale à la surface ne reste constant, le long d'une même génératrice, que dans les deux cas suivants :*

1° *Dans les hélicoïdes* [1];

2° *Dans les surfaces à plan directeur et à pas constant engendrées par une hélice imaginaire dont l'axe décrit un plan isotrope et pour lesquelles* $w\rho + k_0 i \rho' = 0$.

Remarques. — 1° Dans ce dernier cas, l'angle ϖ est donné par la formule

$$\tan g\,\varpi = \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0 i}.$$

2° Dans ces deux séries de surfaces l'hélice génératrice est un cercle géodésique (*cf.* Chap. III).

---

[1] Cette première série a été donnée par M. Demartres dans une Note suivant son Mémoire *Détermination des surfaces* (W) *à lignes de courbure isothermes*, inséré dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IV.

9. Composantes d'un déplacement suivant la génératrice et sa trajectoire orthogonale. Cosinus directeurs du déplacement par rapport aux axes du trièdre fondamental mobile. — Soit i l'inclinaison du déplacement sur la génératrice. La considération de la formule (14) donne immédiatement

$$(38)\quad \begin{cases} ds\cos i = (\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi + (L\rho + KN)(\rho^2+K^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt,\\ ds\sin i = H(\rho^2+K^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt,\end{cases}$$

d'où l'on tire les suivantes :

$$(39)\quad \begin{cases} dt = \dfrac{\sin i}{H}(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}\,ds,\\ d\varphi = \dfrac{(\rho^2+K^2)^{-\frac{1}{2}}}{H}[H\cos i - (L\rho + KN)\sin i]\,ds.\end{cases}$$

Si l'on se reporte aux formules générales (11), on obtient, en appelant α, β, γ les cosinus directeurs du déplacement,

$$\alpha\,ds = M\cos\varphi\,dt - (\rho\,d\varphi + L\,dt)\sin\varphi$$

et les deux analogues. En remplaçant dans ces formules dt et $d\varphi$ par leurs valeurs tirées des relations (39) on en déduit

$$(40)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}\cos\varphi\cos V\sin i - \sin\varphi\left[\dfrac{\rho\cos i}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{K\sin i\sin V\cos W}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}\right],\\ \beta = \dfrac{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}\sin\varphi\cos V\sin i + \cos\varphi\left[\dfrac{\rho\cos i}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{K\sin i\sin V\cos W}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}\right],\\ \gamma = \dfrac{K\cos i}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\rho}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}\sin i\sin V\cos W.\end{cases}$$

Des formules (39) on tire pour expression de $\dfrac{d\psi}{ds}$ et de $\dfrac{d\chi}{ds}$:

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{ds} = \left(\dfrac{\partial W}{\partial\varphi} - 1\right)(\rho^2+K^2)^{-\frac{1}{2}}\cos i - \dfrac{\sin i}{H(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}\\ \qquad\times\left\{(\rho^2+K^2)\left[r + \cot V(p\cos\overline{\varphi - W} + q\sin\overline{\varphi - W}) - \dfrac{\partial W}{\partial t}\right]\right.\\ \qquad\qquad\left. + \left(\dfrac{\partial W}{\partial\varphi} - 1\right)(L\rho + KN')\right\},\\ \dfrac{d\chi}{ds} = \dfrac{\partial V}{\partial\varphi}(\rho^2+K^2)^{-\frac{1}{2}}\cos i + \dfrac{\sin i}{H(\rho^2+K^2)}\\ \qquad\times\left[(\rho^2+K^2)\left(\dfrac{\partial V}{\partial t} + p\sin\overline{\varphi - W} - q\cos\overline{\varphi - W}\right) - (L\rho + KN)\right].\end{cases}$$

Ces développements trouveront leur emploi dans les calculs ci-après.

10. Expression générale de la courbure normale. — On sait que la courbure normale d'un élément est donnée par l'expression

$$\frac{\alpha\delta\lambda+\beta\delta\mu+\gamma\delta\nu}{ds}.$$

Si, pour abréger, on pose

$$(42)\qquad P=\frac{(K^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho},\qquad Q=\frac{\rho\cos i}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{K\sin i\sin V\cos W}{(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on obtient :

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l}\alpha=P\cos\varphi\cos V\sin i-Q\sin\varphi,\qquad \beta=P\sin\varphi\cos V\sin i+Q\cos\varphi,\\ \gamma=\dfrac{K}{P\rho}\cos i+\dfrac{1}{P}\sin i\sin V\cos W.\end{array}\right.$$

En employant ces formules, on trouve pour expression de la courbure normale $\frac{1}{R_n}$

$$(44)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{R_n}=\frac{d\chi}{ds}\Big[&\frac{\sin i\cos W}{P}(\sin^2 V+P^2\cos^2 V)\\ &+\frac{K\sin V\cos i}{P\rho}-Q\cos V\sin W\Big]\\ -\frac{d\psi}{ds}&[P\sin i\sin V\cos V\sin W+Q\sin V\cos W],\end{aligned}$$

formule dans laquelle il faudrait remplacer $\frac{d\psi}{ds}$ et $\frac{d\chi}{ds}$ par leurs valeurs tirées des formules (41). On obtient ainsi

$$\frac{1}{R_n}=\mathcal{A}\cos^2 i+2\mathcal{B}\sin i\cos i+\mathcal{C}\sin^2 i.$$

Étant donnée la complication des calculs, il est sans intérêt d'expliciter les expressions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ qui sont évidemment des fonctions de $\sin\varphi, \cos\varphi$, L, N, V et W.

11. Expression de la torsion géodésique. — Soit $\frac{1}{T_g}$ la torsion géodésique. Nous aurons

$$\frac{1}{T_g}=-\frac{dT_g}{ds}$$

en prenant

$$dT_g = \Sigma\alpha(\mu\,\delta\nu - \nu\,\delta\mu).$$

Or on déduit sans difficulté des expressions (28) et (32) les formules suivantes :

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\,\delta\nu - \nu\,\delta\mu &= -\sin V\cos V\cos(\varphi - W)\,d\psi + \sin(\varphi - W)\,d\chi,\\ \nu\,\delta\lambda - \lambda\,\delta\nu &= -\sin V\cos V\sin(\varphi - W)\,d\psi - \cos(\varphi - W)\,d\chi,\\ \lambda\,\delta\mu - \mu\,\delta\lambda &= -\sin^2 V\,d\psi,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire, tous calculs faits après remplacement de α, β et γ par leurs valeurs (43),

$$(46)\quad \begin{aligned}\frac{1}{T_g} &= \frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds}\\ &= \frac{d\psi}{ds}\,\frac{\sin V\left\{\begin{array}{l}\rho\cos i(K\sin V - \rho\cos V\sin W)\\ \quad +\sin i\cos W(\rho^2+\rho K\sin V\cos V\sin W + K^2\cos^2 V)\end{array}\right\}}{\rho(\rho^2+K^2)^{\frac{1}{2}}}\\ &\quad + \frac{d\chi}{ds}[Q\cos W + P\sin i\cos V\sin W].\end{aligned}$$

Les formules (45) et (46) donnent lieu à une remarque déjà faite : elles se simplifient considérablement lorsqu'on y fait $K = 0$, et se réduisent alors aux formules données par M. Demartres dans son Mémoire déjà cité.

12. Équation des lignes asymptotiques et des lignes de courbure. — On en aurait une forme en écrivant suivant le cas que $\frac{1}{R_n}$ ou que $\frac{1}{T_g}$ est nul. Nous nous servirons de ce procédé dans une question relative aux lignes de courbure (Chap. III, n° 6, corollaire). On peut encore les écrire :

$$(47)\qquad \delta A\,\delta x + \delta B\,\delta y + \delta C\,\delta z = 0,$$

pour les asymptotiques, et

$$(48)\qquad \begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ \delta A & \delta B & \delta C\\ A & B & C\end{vmatrix} = 0,$$

pour les lignes de courbure.

13. Courbure géodésique, lignes géodésiques. — En se reportant aux formules données dans notre Mémoire déjà cité (*Applications de la Géométrie cinématique*, etc.), on trouve pour expression de la courbure géodésique la formule suivante :

$$(49)\quad \frac{H\sqrt{G}}{\rho_g} = \cos i\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - (KK' + \rho\rho') + H\frac{\partial i}{\partial\varphi}\right] + \sin i\left(\frac{\partial H}{\partial\varphi} + G\frac{\partial i}{\partial t} - F\frac{\partial i}{\partial\varphi}\right),$$

qui devient facilement

$$(50)\quad \begin{aligned}\frac{1}{\rho_g} = \frac{di}{ds} &+ \frac{1}{H}\frac{d\varphi}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi} - KK' - \rho\rho'\right)\\ &+ \frac{1}{GH}\frac{dt}{ds}\left[F\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi} - KK' - \rho\rho'\right) + H\frac{\partial H}{\partial\varphi}\right],\end{aligned}$$

en tenant compte de ce que

$$(51)\quad \cos i = \frac{d}{ds}\sqrt{G} + \frac{F}{\sqrt{G}}\frac{dt}{ds}, \qquad \sin i = \frac{H}{\sqrt{G}}\frac{dt}{ds}.$$

L'équation des lignes géodésiques peut s'obtenir facilement en écrivant la relation $\frac{1}{\rho_g} = 0$, sous l'une ou l'autre des formes précédentes.

14. Condition pour qu'une famille d'hélices circulaires mobiles ait une enveloppe. — En appliquant les résultats du Mémoire précité on trouve que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille d'hélices circulaires mobiles ait une enveloppe est que les équations

$$(53)\quad KL - \rho N = 0, \qquad M = 0$$

admettent une solution commune

$$(54)\quad \mathcal{F}(\varphi, t) = 0.$$

A chaque solution de cette forme correspond une courbe tangente aux diverses génératrices. Leur ensemble constitue l'arête de rebroussement de la surface.

13. Remarque. — Je me borne à signaler ce fait presque évident :

Le cylindre circulaire droit est la seule surface algébrique *sur laquelle on puisse placer une hélice circulaire.*

CHAPITRE II.

RÉPARTITION DES NORMALES AUX DIVERS POINTS D'UNE MÊME GÉNÉRATRICE. POINTS CENTRAUX DE PREMIÈRE ESPÈCE ET DE DEUXIÈME ESPÈCE. LIGNES DE STRICTION. SURFACE POUR LESQUELLES CES DEUX LIGNES COÏNCIDENT. PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION. SURFACE POUR LESQUELLES LES NORMALES AUX DIVERS POINTS DE CHAQUE GÉNÉRATRICE RENCONTRENT UNE MÊME DROITE.

1. Définition. — *Quand l'hélice génératrice conserve une direction d'axe invariable, je dirai que la surface est à plan directeur d'hélices ou simplement (quand aucune confusion n'est à craindre) à plan directeur.*

2. Angle du plan tangent avec le plan de base. — Si l'on se reporte au n° 5 du Chapitre précédent, on voit que cet angle peut être considéré comme égal à V. En réalité, avec les conventions qui ont été adoptées dans ce numéro, c'est son supplément; mais, comme dans ce qui suit, il sera surtout utile de considérer la détermination de l'angle de ces deux plans comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, rien n'empêche de la prendre pour l'angle V lui-même, considéré comme défini par la détermination positive de la tangente [1] donnée par la formule

$$\tag{1} \operatorname{tang}^2 V = \frac{K^2}{\rho^2} + \frac{(KL - \rho N)^2}{\rho^2 M^2}.$$

Nous désignerons par la notation (V) l'angle ainsi défini.

La considération de la formule (25) du Chapitre précédent conduit immédiatement au théorème suivant :

Théorème I. — *L'angle* (V) *du plan tangent en un point d'une génératrice avec le plan de base de celle-ci n'est jamais*

---

[1] Dans le cas des éléments imaginaires on peut faire intervenir la convention suivante : on prendra, pour K la détermination correspondant à une partie réelle positive et celle correspondant à un coefficient positif dans le cas d'une imaginaire pure.

nul. Il a un minimum absolu donné par la formule

$$\operatorname{tang}(V) = \left|\frac{K}{\rho}\right|$$

obtenu pour les points de la génératrice considérée dont les coordonnées satisfont à la relation

$$KL - N\rho = 0,$$

sauf exception possible pour ceux de ces points dont les coordonnées vérifieraient aussi la relation

$$M = 0.$$

Remarque. — Les points d'une génératrice présentant un caractère exceptionnel dans le théorème précédent sont ceux où la génératrice rencontre la génératrice infiniment voisine lorsque ce fait se présente.

En ces points, tang V *se présente sous forme indéterminée.*

Définition. — *J'appelle points centraux de première espèce les points d'une génératrice définis par la relation*

$$(2) \qquad KL - N\rho = 0.$$

Quand la génératrice varie, ils engendrent les diverses branches de la ligne de striction de première espèce.

Ces points sont donc ceux correspondant au minimum de (V) et ceux satisfaisant aux deux relations $KL - N\rho = 0$, $M = 0$. Ces derniers sont en général isolés; dans le cas où ils forment une arête de rebroussement de la surface, cette courbe devra donc être considérée comme faisant partie de la ligne de striction. Ce sont d'ailleurs, dans un cas comme dans l'autre, des points singuliers de la surface ou tout au moins de la définition de celle-ci par le système de génératrices choisi.

Remarque. — Nous avons été conduit aux définitions précédentes par une analogie évidente avec les surfaces réglées; toutefois, faut-il remarquer que dans celles-ci V sera constamment égal à $\frac{\pi}{2}$ et l'angle intéressant est celui du plan tangent avec le plan central. Sa considération ne paraît pas susceptible d'une extension intéressante au cas des surfaces hélicées. Nous ferons remarquer également que l'étude de l'angle V que nous venons de définir se présente utilement dans le cas des surfaces cerclées. Les résultats correspondants ont été développés par M. Demartres dans le Mémoire déjà cité. On peut également étendre à ces surfaces (il suffit de faire $K = 0$ dans nos formules) la considération des points centraux et de la ligne de striction de première espèce ([*cf.* notre Mémoire *Sur une propriété des surfaces cerclées* (*Bulletin de la Soc. mathém. de France*, t XXXVI, 1908, p. 58)].

3. Revenons aux conséquences de la formule (1). Remarquons qu'on peut écrire

$$KL - \rho N = -\varphi[K^2(q \sin\varphi + p\cos\varphi) + K'\rho] + (KL - \rho N)_T,$$

en désignant par la notation $(KL - \rho N)_T$ la partie de l'expression étudiée qui ne contient que des termes trigonométriques. De même,

$$\rho M = \rho K \varphi(q\cos\varphi - p\sin\varphi) + \rho M_T.$$

Que devient l'angle (V) quand le point eonsidéré s'éloigne indéfiniment sur la génératrice, c'est-à-dire quand φ croît indéfiniment?

Faisons croître φ indéfiniment de la manière suivante.

Nous poserons

$$\varphi = \varphi_0 + 2n\pi,$$

où n est un nombre entier croissant indéfiniment (autrement dit, nous prenons les points qui s'éloignent sur l'hélice génératrice en restant sur une même génératrice de son cylindre principal). Le premier terme de $\tang^2 V$ est évidemment invariable pour un déplacement sur une génératrice; quant au second, il a pour valeur

$$\frac{\{-[K^2(q\sin\varphi_0 + p\cos\varphi_0) + K'\rho]^2(\varphi_0 + 2n\pi) + \text{const.}\}}{[(\varphi_0 + 2n\pi)K\rho(q\cos\varphi_0 - p\sin\varphi_0) + \text{const.}]^2}.$$

Les termes simplement trigonométriques des fonctions

$$KL - \rho N \quad \text{et} \quad \rho M$$

conservent une valeur fixe pour la variation imposée à φ.

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression précédente tend vers une limite définie par l'expression

$$\left[\frac{K^2(q\sin\varphi_0 + p\cos\varphi_0) + K'\rho}{K\rho(q\cos\varphi_0 - p\sin\varphi_0)}\right]^2. \tag{3}$$

Mais cette expression a une valeur qui, en général, dépend essentiellement de la valeur φ_0 choisie. Donc :

En général, l'angle du plan tangent et du plan de base d'une génératrice n'a pas de limite déterminée quand le point de contact s'éloigne indéfiniment sur cette génératrice.

Cette conclusion pourra être en défaut si le coefficient (3) est indépendant de φ_0, c'est-à-dire si le quotient

$$\frac{K^2(q\sin\varphi + p\cos\varphi + K'\rho)}{(q\cos\varphi - p\sin\varphi)K\rho}$$

se réduit à une simple fonction de t que nous désignerons par $\lambda(t)$.

On sera donc conduit à écrire l'identité en φ

$$K^2(q\sin\varphi + p\cos\varphi) + K'\rho - \rho K\lambda(q\cos\varphi - p\sin\varphi) = 0,$$

équivalente aux trois suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} qK + p\rho\lambda &= 0,\\ -q\rho\lambda + pK &= 0,\\ K' &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Dans tous les cas, la variation du pas doit être nulle.

Les deux premières équations conduisent aux relations

$$p = q = 0$$

tant que le déterminant de ces quantités

$$K^2 + \lambda^2\rho^2$$

n'est pas nul. Laissons de côté le dernier cas qui ne convient qu'à des génératrices imaginaires tout à fait particulières ([1]).

On a donc

$$p = q = 0.$$

([1]) On vérifie que dans ce cas le plan de base est à caractéristique isotrope.

Mais alors le dénominateur de l'expression (3) est identiquement nul et nos calculs sont en défaut. D'ailleurs ici la relation $K' = o$ montre que tang V se réduit à une fonction trigonométrique de φ. Nous étudierons ce cas ultérieurement.

Ainsi qu'il vient d'être dit, l'analyse précédente laisse de côté le cas où le dénominateur de (3) serait nul. Si le numérateur n'est pas nul en même temps, tang V croît indéfiniment et V a pour limite $\frac{\pi}{2}$ quand le point s'éloigne indéfiniment.

Ce fait se présente quand

$$p = q = o, \qquad \text{avec} \qquad K' \neq o.$$

Donc dans ce cas l'angle V a une limite $\frac{\pi}{2}$ quand le point de contact s'éloigne indéfiniment. Ce cas se présente en particulier pour la génératrice quelconque ($K' \neq o$) d'une surface à plan directeur d'hélice à pas variable.

Il ne nous reste plus qu'à envisager le cas où l'on a à la fois

$$p = q = K' = o.$$

Dans cette hypothèse, la partie de $\text{tang}^2 V$ qui dépend de φ se réduit à l'expression

$$\left[\frac{K_0(u \sin\varphi - v \cos\varphi) + \rho w}{\rho(u \cos\varphi + v \sin\varphi + \rho')}\right]^2.$$

Lorsque φ croît indéfiniment, cette expression ne tend en général vers aucune limite déterminée. Si l'on cherche dans quel cas exceptionnel le contraire se présente, on est conduit à des conditions développées aux n^{os} 7 et 8 du Chapitre précédent; nous y exprimions que pour chaque génératrice l'angle V était constant. Si ces conditions sont vérifiées, non pour toute valeur de t, mais seulement pour certaines de ces valeurs, on trouve le résultat suivant :

Si pour une génératrice à plan de base et à pas stationnaire, l'angle (V) *tend vers une limite quand φ croît indéfiniment, il est constant sur toute cette génératrice. Si l'on fait abstraction du cas des génératrices imaginaires satisfaisant à la condition $u^2 + v^2 = o$ que je me dispense d'interpréter, le plan* *de base se meut normalement au lieu du centre du cercle principal. Cette valeur sera* $\frac{\pi}{2}$ *si, en outre, la variation du rayon de ce cercle est nulle.*

Ces divers résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème II. — *En général, l'angle* (V) *ne tend pas vers une limite déterminée quand le point de contact du plan tangent considéré s'éloigne indéfiniment sur l'hélice génératrice.*

Il y a exception et cet angle devient droit si le point décrit une génératrice dont le plan de base soit stationnaire en direction et dont le pas ait au même instant une variation différente de zéro.

Si le pas était stationnaire en même temps que la direction du plan de base, l'angle (V) *n'aurait pas de limite dans ces conditions, à moins que l'axe de l'hélice ne fût au même instant tangent au lieu du centre du cercle principal : mais dans ce dernier cas l'angle* V *serait constant sur toute la génératrice* (1). *Cette valeur constante serait un droit dans le cas où la variation du rayon du cercle principal serait nulle au même moment.*

Corollaire. — *Pour toute surface à plan directeur d'hélice à pas variable, l'angle* V *du plan tangent en un point d'une génératrice avec le plan directeur tend vers un droit lorsque le point de contact s'éloigne indéfiniment sur la génératrice* [sauf pour quelques génératrices exceptionnelles correspondant à des valeurs de t annulant la fonction $K'(t)$].

4. Détermination des points centraux de première espèce. — Ils sont donnés par l'équation

$$KL - N\rho = 0,$$

qui, étant transcendante, ne peut être résolue en général.

(1) Sa valeur serait donnée par la formule

$$\log^2 V = \frac{K^2}{\rho^2} + \frac{\omega'^2}{\rho'^2}.$$

Si toutefois la surface est donnée numériquement, on peut, en se fixant la valeur numérique de t correspondant à une génératrice, avoir recours à une résolution graphique fondée sur l'emploi simultané d'une spirale et d'une courbe du quatrième degré facile à construire.

La ligne de striction de première espèce se déduit de la résolution précédente lorsqu'on la fait pour une suite de valeurs de t.

Nous nous bornerons à chercher dans quel cas cette équation devient algébrique. Ceci peut se présenter dans trois cas :

1° φ subsiste dans l'équation sans les lignes trigonométriques;

2° φ ne figure dans l'équation que par les lignes trigonométriques;

3° L'équation se décompose en deux facteurs de la nature de ceux définis ci-dessus. Les deux premiers cas peuvent être considérés comme cas particuliers du troisième.

1° L'équation ne doit pas contenir les lignes de l'arc φ. On doit alors avoir

$$p = q = u = v = 0;$$

nous pouvons de plus faire alors $r = 0$ et, si cette condition est vérifiée pour toutes les génératrices, en rapportant la surface à des axes fixes définis dans le n° 7 du Chapitre précédent, ses équations deviennent

$$(5) \qquad x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = f(\rho) + \mathrm{K}(\rho)\varphi,$$

dans lesquelles $f(\rho)$ et $\mathrm{K}(\rho)$ désignent des fonctions de φ d'ailleurs arbitraires (1).

*Nous donnerons à ces surfaces remarquables, généralisation immédiate des hélicoïdes, le nom d'*HÉLICOÏDES DE SECONDE ESPÈCE.

Elles jouent un rôle considérable dans diverses questions.

---

(1) En vérité, ces formules laissent de côté le cas où ρ serait constant et où il faudrait écrire

$$x = \rho_0\cos\varphi, \qquad y = \rho_0\sin\varphi, \qquad z = f(t) + k(t)\varphi.$$

Cette surface est un cylindre droit, cas limite évident des surfaces signalées.

Si f et K sont des fonctions du premier degré de φ, on aura des SURFACES DE VIS DE DEUXIÈME ESPÈCE. L'étude complète de ces surfaces nous entraînerait trop en dehors des limites du travail actuel et nous nous réserverons d'y revenir d'une façon spéciale.

La ligne de striction de première espèce de ces surfaces est définie par l'équation

$$\varphi = -\frac{f'}{K'},$$

f' et K' désignant les dérivées des fonctions f et K par rapport à ρ. [Si la surface se réduisait à un cylindre, (*voir* la note, page 267), elle serait indéterminée.] On voit que, sur chaque hélice génératrice, il y a un point central et un seul. Dans le cas des hélicoïdes ordinaires, ce point est rejeté à l'infini, sauf dans le cas de la surface de vis à filet carré où il est indéterminé. Ces résultats s'expliquent facilement ([1]). Enfin signalons la formule qui donne $\tan^2 V$ pour ces surfaces ; c'est la suivante :

$$\tan^2 V = \frac{K^2}{\rho^2} + (K'\varphi + w)^2. \tag{6}$$

2° φ ne figure que par ses lignes trigonométriques. Les conditions correspondantes sont ici

$$p = q = K' = 0.$$

Si la propriété est vraie pour toutes les génératrices, c'est-à-dire si les relations précédentes sont identiques, on obtient la classe très intéressante des surfaces à plan directeur et pas constant qui comprennent également, comme cas particulier, les hélicoïdes. Sur chaque génératrice les points centraux forment deux suites de points équidistants répartis sur deux génératrices du cylindre principal correspondant.

3° Cette hypothèse ne conduit à aucun résultat nouveau.

5. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX GÉNÉRATRICES INFINIMENT

([1]) Sur les hélicoïdes, $\tan V$ est constant quand le point considéré décrit une génératrice. De plus, cette fonction ne se réduit à $\frac{K^2}{\rho^2}$ que dans le cas de la surface de vis à filet carré. Considérée comme définissant un minimum, la ligne de striction d'un hélicoïde quelconque serait indéterminée. Nous préférons conserver entièrement la définition du texte par l'équation $KL - N\rho = 0$.

VOISINES. — En se reportant au n° 9 de notre Mémoire, *Applications de la géométrie cinématique*, etc., on trouve que les points d'une génératrice, dont la distance à la génératrice infiniment voisine soit minima, maxima ou stationnaire, sont donnés par la relation

$$(7)\qquad (KL - N\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}(KL - N\rho) + (\rho^2 + K^2)M\frac{\partial M}{\partial\varphi} = 0,$$

équivalente lorsque H n'est pas nul, c'est-à-dire sauf sur des génératrices isolées, en dehors du cas de la développable isotrope définie par $H \equiv 0$, à l'équation

$$(8)\qquad \frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0.$$

DÉFINITION. — *J'appelle point central de seconde espèce d'une génératrice tout point de celle-ci dont les coordonnées curvilignes, t, φ vérifient l'équation* (7). *Lorsque la génératrice varie, ces points décrivent les diverses branches de la ligne de striction de seconde espèce de la surface.*

6. Si les équations

$$KL - N\rho = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0,$$

admettent une solution commune, $\mathfrak{f}(t, \varphi) = 0$, cette solution définit une branche commune aux deux lignes de striction. Je ne m'arrêterai pas à chercher la condition correspondante qui est compliquée et je me bornerai sur ce sujet à la résolution des questions suivantes :

PROBLÈME. — *Déterminer les surfaces telles que la ligne de striction de première espèce appartienne complètement à la ligne de striction de deuxième espèce.*

Pour qu'une surface réponde à la question, il faut et il suffit que toute solution de l'équation correspondante

$$(9)\qquad KL - N\rho = 0$$

appartienne à l'équation (7) ou, en laissant de côté le cas des hélices isotropes, à l'équation

$$(10) \qquad M\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0.$$

Supposons d'abord que les solutions de l'équation

$$K^2(q\sin\varphi + p\cos\varphi) + K'\rho = 0$$

ne satisfassent pas à l'équation (9). (L'hypothèse contraire ne peut se présenter que lorsque $KL - N\rho$ se décompose, cas dont nous ferons une étude spéciale.)

On peut alors tirer de l'équation (9) l'angle φ en fonction de ses lignes trigonométriques et porter le résultat dans l'équation (10). L'opération est très simple, l'équation (9) étant linéaire en φ, et le résultat obtenu est une équation (A) qui ne contient plus que $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et doit néanmoins admettre toutes les solutions de l'équation transcendante (9). Ceci ne peut avoir lieu que si le premier membre de l'équation (9) se décompose en un produit d'une fonction linéaire en φ par une fonction simplement trigonométrique de l'angle φ, à moins toutefois que (A) ne se réduise à une identité. Le cas où $KL - N\rho$ ne contient pas les lignes trigonométriques ou, au contraire, ne renferme que celles-ci peut d'ailleurs être considéré comme cas limite de la décomposition. Nous commencerons par étudier particulièrement ces deux hypothèses. Notre étude comprendra donc les paragraphes suivants : I. L'équation (9) ne contient pas les lignes de φ ou contient ces lignes seulement; II. L'équation (A) est identique; III. L'équation (9) se décompose.

I. *Premier cas.* — Le premier membre de l'équation (9) ne contient *pas de ligne trigonométrique*. Nous avons vu précédemment que les *surfaces correspondantes étaient des* HÉLICOÏDES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

Pour ces surfaces, il y a un point central de deuxième espèce et un seul sur chaque génératrice; il est défini par la relation [1]

$$\varphi = -\frac{f'}{K'}.$$

[1] Exception faite des hélicoïdes ordinaires où les calculs sont en défaut. *Voir* plus loin la remarque spéciale à ce cas.

Donc :

Les lignes de striction des deux espèces coïncident dans ces surfaces.

Deuxième cas. — Le premier membre de l'équation (9) *est dépourvu de terme non trigonométrique.* On voit facilement que cette hypothèse correspond aux surfaces de plan directeur dont le pas de la génératrice est constant; cette équation se réduit à la suivante :

$$(11) \qquad \mathrm{K}u \sin\varphi - \mathrm{K}v \cos\varphi + \varpi\rho = 0.$$

D'ailleurs on a ici

$$\mathrm{M} = u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho', \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\varphi} = -u\sin\varphi + v\cos\varphi.$$

Deux cas peuvent se présenter :

a. $\varpi = 0$; alors l'équation (11) ne diffère pas de l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\varphi} = 0,$$

tous les points de première espèce sont de seconde espèce. Ces surfaces possèdent en outre des points de deuxième espèce répartis en deux séries sur chaque génératrice, séries données par l'équation

$$(12) \qquad u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho'\left(\frac{\rho^2 + \mathrm{K}^2}{\rho^2}\right) = 0.$$

Il ne pourra y avoir coïncidence complète que si les équations (11) et (12) ont mêmes solutions, c'est-à-dire si

$$(13) \qquad \frac{u}{v} = -\frac{v}{u} = \frac{\rho'}{0},$$

en laissant de côté les hélices isotropes.

Les relations (13) donnent

$$u = v = 0$$

ou

$$u^2 + v^2 = 0, \qquad \text{avec} \qquad \rho' = 0.$$

La première solution conduit aux surfaces de vis à filet carré [1], elle appartient aussi comme cas limite à la série précédente.

La deuxième solution donne des surfaces engendrées par une hélice indéformable munie d'un plan directeur et dont l'axe décrit un plan isotrope perpendiculaire à ce plan directeur. Dans les énoncés qui termineront cette étude, nous ferons abstraction de cette surface spéciale [2].

b. $w \neq 0$; alors une racine de l'équation (11) n'annule jamais l'équation $\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0$. Il faut donc que ces racines satisfassent toutes à l'équation $M = 0$, c'est-à-dire à

$$u \cos\varphi + v \sin\varphi + \rho' = 0.$$

Ceci ne peut arriver que si l'on a

$$\frac{u}{v} = -\frac{v}{u} = \frac{\rho'}{\frac{u\rho}{K}}; \tag{14}$$

étant laissée de côté la surface à génératrices imaginaires satisfaisant à la relation $u^2 + v^2 = 0$, sans que u et v ne soient nuls, on doit avoir

$$u = v = 0,$$

et la deuxième relation (13) est satisfaite d'elle-même. Les surfaces obtenues sont les hélicoïdes. On vérifie que l'équation fondamentale qui détermine les points centraux de deuxième espèce se réduit à une identité. Ce fait s'explique facilement : en effet, pour ces surfaces, les trajectoires orthogonales des hélices génératrices étant des géodésiques, le point central de deuxième espèce sur chaque génératrice est évidemment indéterminé.

II. *L'équation* (A) *est identique.* Le résultat de la substitution de la valeur tirée de l'équation (9) pour l'arc φ en fonction de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ ne peut s'annuler identiquement que si l'un de ses facteurs M ou $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ s'annule identiquement. Donc deux cas à consi-

(1) Pour cette surface, on voit que les équations (9) et (10) se réduisent à des identités.

(2) Cette surface appartient à une série déjà rencontrée (*cf.* n° 3).

dérer : 1° Le résultat de la substitution dans M est identiquement nul ; 2° le résultat de la substitution dans $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ est identiquement nul.

1° Le résultat dans M est identiquement nul. En effectuant les calculs on trouve, après avoir rendu entier le résultat de la substitution, un polynome du second degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ dans lequel :

$$\begin{array}{lll} \text{coefficient de} & \cos^2\varphi & = K^2 pu + Kq(\rho^2 q + Kv), \\ \quad » & \sin^2\varphi & = K^2 vq + Kp(\rho^2 p + Ku), \\ \quad » & \sin\varphi\cos\varphi & = 2K\rho^2 pq. \end{array}$$

D'où les deux relations (K étant $\neq 0$) suivantes obtenues en écrivant l'égalité entre eux des termes carrés et à zéro du terme rectangle

$$p^2 = q^2, \qquad pq = 0,$$

égalités qui donnent de suite $p = q = 0$. La surface doit être à plan directeur. On peut pour simplifier les calculs faire $r = 0$. Mais alors l'équation (9) se réduit à

$$\varphi K'\rho + Ku\sin\varphi - Kv\cos\varphi + \rho w = 0, \tag{15}$$

et l'équation $M = 0$ à

$$u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho' = 0. \tag{16}$$

Pour que cette dernière soit vérifiée par toute racine de l'équation (15), celle-ci ne pouvant visiblement se décomposer sans se réduire à une fonction linéaire ou trigonométrique de φ, on devra avoir soit $u = v = \rho' = 0$, ce qui donne un cylindre droit, soit $K' = 0$ avec $-\frac{u}{v} = +\frac{v}{u} = \frac{\rho'}{\frac{\rho\omega}{K}}$ et l'on trouve une surface à génératrices imaginaires déjà définie, à moins qu'on n'ait $u = v = 0$. De nouveau on obtient les hélicoïdes. En résumé, l'hypothèse actuelle ne conduit à aucune surface nouvelle.

Nous passerons à la suivante :

2° Le résultat de la substitution dans $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ est identiquement nul. En rendant entière l'identité à écrire on est conduit à la condition

$$\begin{aligned} (17)\quad & [K^2(q\sin\varphi + p\cos\varphi) + K'\rho][(Kq + v)\cos\varphi - (Kp + u)\sin\varphi] \\ & - K(p\cos\varphi + q\sin\varphi)[(Kv + q\rho^2)\cos\varphi \\ & \qquad - (Ku + p\rho^2)\sin\varphi + r\rho K - \rho w] \equiv 0. \end{aligned}$$

La considération des termes du second degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ dans cette équation dépourvue de terme indépendant donne les conditions

$$(18) \qquad (K^2-\rho^2)pq=0 \quad \text{et} \quad (K^2-\rho^2)(q^2-p^2)=0.$$

On aura donc deux cas principaux : 1° $K^2-\rho^2$ n'est pas nul nécessairement ; 2° on fait $K^2=\rho^2$.

1° Si l'on ne prend par $K^2-\rho^2=0$, les équations (18) donnent

$$p=q=0.$$

La surface correspondante est à plan directeur. La considération des termes du premier degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ donne les équations

$$K'u=0, \qquad K'v=0,$$

qui peuvent être réalisées soit par les conditions

$$u=v=0,$$

pour lesquelles la surface se réduit aux surfaces hélicoïdales de deuxième espèce, et l'on sait que ces surfaces satisfont en effet à la question, soit par $K'=0$. Mais alors nos calculs ne sont plus légitimes, car, en vertu des conditions $p=q=K'=0$, le coefficient de φ dans $KL-N\rho$ est identiquement nul. La question a été étudiée précédemment par un procédé direct.

Nous sommes donc amenés à rechercher les résultats auxquels conduit la deuxième hypothèse.

2° On prend

$$K^2=\rho^2 \quad \text{ou} \quad K=\varepsilon\rho \quad (\varepsilon=\pm 1).$$

Les trois termes du second degré disparaissent alors sans autre condition. En écrivant que les termes du premier degré s'évanouissent également, on obtient les conditions

$$(19) \qquad \begin{cases} \rho'(v+q\rho\varepsilon)-p(r\rho^2\varepsilon-\rho w)=0, \\ \rho'(u+p\rho\varepsilon)+q(r\rho^2\varepsilon-\rho w)=0, \end{cases}$$

qui, jointes à la condition

$$(20) \qquad K=\varepsilon\rho \quad (\varepsilon=\pm 1),$$

sont nécessaires et suffisantes pour la résolution de la question.

Toute solution $p^2+q^2=0$ sans que p et q soient nuls étant à rejeter, nous pouvons prendre pour Ox une parallèle à la caractéristique du plan de base, ainsi qu'il a été dit, ce qui revient à faire

$$q=0.$$

Les équations (19) se simplifient et deviennent

$$(19\ bis)\qquad \begin{cases} \rho' v - p(r\rho^2\varepsilon - \rho w) = 0, \\ \rho'(u + p\rho\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

La seconde équation (19 *bis*) conduit à deux systèmes de solutions

$$\rho' = 0 \qquad \text{ou} \qquad u + p\rho\varepsilon = 0.$$

Donc deux séries d'études :

α. On prend $\rho'=0$; le rayon du cercle principal est constant, soit $\rho=\rho_0$. Mais $K=K_0=\varepsilon\rho_0$. Le pas est constant : la génératrice est indéformable.

La première équation (19 *bis*) devient alors

$$p(r\rho_0\varepsilon - w) = 0,$$

qui conduit à deux groupes de solutions. Nous remarquerons de suite que le premier correspondant à $p=0$ est à rejeter, car on se trouverait dans le cas où $p=q=K'=0$ et où les calculs actuels sont en défaut. Ce cas a fait l'objet d'une étude spéciale.

Il reste finalement la condition

$$w = r\rho_0\varepsilon.$$

En résumé, nous trouvons une solution caractérisée par les conditions

$$(21)\qquad q=0, \qquad \rho=\rho_0, \qquad K=K_0=\varepsilon\rho_0 \qquad (\varepsilon=\pm 1), \qquad w=r\rho_0\varepsilon.$$

Ces surfaces peuvent être définies géométriquement comme il suit :

Surface engendrée par une hélice de grandeur constante, inclinée à 45° sur son plan de base dont l'axe décrit une surface réglée absolument quelconque, mais dont le trièdre principal possède un mouvement déterminé par la dernière équa-

tion (21); *sa rotation élémentaire autour de l'axe de l'hélice génératrice est à chaque instant égale au quotient de la composante suivant cet axe de la translation élémentaire par le pas linéaire de la génératrice* ([1]).

Les deux équations $KL - \rho N = 0$ et $\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0$ se réduisent l'une et l'autre à la seule équation

$$\varphi K_0 p \cos\varphi + (K_0 p + u)\sin\varphi - v\cos\varphi = 0. \tag{22}$$

Nous allons chercher maintenant si tout point central de deuxième espèce est un point de première espèce.

Remarquons qu'on a identiquement

$$KL - N\rho \equiv K_0 \frac{\partial M}{\partial \varphi};$$

l'équation caractéristique (9) des points de deuxième espèce devient ici

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(KL - N\rho) + 2K_0 M\right] = 0. \tag{22 bis}$$

Nous pouvons laisser de côté la solution $\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0$ de cette équation. Elle conduit en effet aux points qui viennent d'être envisagés. L'équation (22 *bis*) pourra ainsi être remplacée par la suivante

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(KL - N\rho) + 2K_0 M = 0, \tag{22 ter}$$

qui, développée, prend la forme

$$\varphi K_0 p \sin\varphi - v\sin\varphi + \cos\varphi(2K_0 p - u) = 0. \tag{23}$$

Toute solution de (23) doit être solution de (22); ceci exige, comme on l'a déjà dit, que le résultat de l'élimination de φ

([1]) Comme exemple simple d'une classe de ces surfaces, on peut citer *celles qui sont engendrées par l'hélice ci-dessus définie, liée à un trièdre dont le sommet décrit une courbe quelconque tracée sur un cylindre arbitraire dont Ox est la génératrice et Oz la normale. Si la directrice est une hélice circulaire, cette surface est un hélicoïde doublement hélicé et dont les deux systèmes d'hélices circulaires génératrices peuvent être considérés comme satisfaisant à la question actuelle.*

entre (23) et (22) considérées comme équations du premier degré en φ soit identiquement nul, à moins toutefois que $\sin\varphi$ ne soit en facteur dans l'équation (23). La première condition est, en divisant par $K_0 p$ (que nous ne supposerons pas nul, puisqu'on aurait alors $p = q = K' = 0$),

$$(23\ bis) \qquad \cos\varphi[\cos\varphi(2K_0 p - u) - v\sin\varphi] - \sin\varphi[(K_0 p + u)\sin\varphi - v\cos\varphi] \equiv 0,$$

équivalente à

$$p = u = 0.$$

La première condition est contraire à notre hypothèse. On ne peut avec elle supposer $p \neq 0$.

Il reste à voir ce qui arrive si $\sin\varphi$ est en facteur dans l'équation (23). Cette équation se réduit alors à la suivante

$$(23\ ter) \qquad \sin\varphi(\varphi K_0 p - v) = 0,$$

avec la condition

$$2K_0 p = u.$$

Mais toutes les solutions de $\sin\varphi = 0$ ne peuvent convenir à l'équation (22), tant que le terme de celle-ci contenant φ ne disparaît pas. On devrait avoir encore $p = 0$. Donc :

Les séries de surfaces étudiées ne possèdent pas de types à coïncidence complète des lignes de striction.

Mais les équations (19 *bis*) conduisent encore à une autre série de solutions :

$$(\beta) \qquad u + p\rho\varepsilon = 0.$$

Ici, ρ' n'étant pas nul (¹), prenons ρ comme variable indépendante. En tenant compte de la première équation (19 *bis*), on est conduit aux conditions de définition

$$K = \varepsilon\rho, \qquad u = -p\rho\varepsilon, \qquad v = p\rho(r\rho\varepsilon - w), \qquad q = 0.$$

Il semble que la surface correspondante doive satisfaire au problème. Mais ici on se trouve précisément dans un cas exceptionnel signalé tout au début de cette étude; le coefficient de φ est

(¹) Sauf pour un cas limite dont il sera question ultérieurement.

en facteur dans $KL - N\rho$ qui se réduit au produit

$$(\varphi - r\rho + \varepsilon w)(p\rho\cos\varphi + \varepsilon).$$

Voyons alors directement ce qui se passe :

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} \quad \text{se réduit à} \quad \cos\varphi(r\rho\varepsilon - w - \varepsilon\varphi),$$

qui admet bien les racines de $KL - N\rho$ correspondant au facteur

$$\varphi - r\rho + w\varepsilon.$$

Il reste à vérifier si les racines de l'autre facteur de $KL - N\rho$ annulent le produit $M\frac{\partial M}{\partial \varphi}$. D'après ce que nous venons de voir, elles ne peuvent annuler toutes $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$, car elles n'annulent pas $\cos\varphi$, et le deuxième facteur de $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ n'a qu'un seul zéro.

Reste à comparer avec M. Si φ_0 est une racine de l'équation

$$p\rho\cos\varphi + \varepsilon = 0,$$

il en est de même de $\varphi_0 + 2n\pi$ où n est un entier arbitraire. Cette simple remarque montre que, si tous les zéros de $p\rho\cos\varphi + \varepsilon$ conviennent à M : 1° ou bien le terme en φ de cette équation doit disparaître, ce qui exige $p = 0$. Mais alors $p = q = u = v = 0$. Nous retrouvons les surfaces hélicoïdales de deuxième espèce; 2° ou bien M possède $\sin\varphi$ en facteur, ce qui exige $u = \rho' = 0$ et par suite $p = 0$ et $v = 0$. On trouve encore le cylindre droit.

Si l'on fait abstraction des surfaces hélicoïdales de seconde espèce et de leurs variétés, on voit que *les surfaces de cette série ne répondent pas à la question. Elles ont néanmoins une particularité intéressante : la ligne de striction de première espèce se décompose en deux courbes, l'une donnant un point sur chaque génératrice appartient à la ligne de striction de seconde espèce, l'autre qui ne lui appartient pas, au moins entièrement, rencontre chaque génératrice en une infinité de points équidistants sur deux génératrices du cylindre principal de l'hélice en question.* Nous désignerons ces surfaces sous le nom de surfaces Ξ.

Remarque. — Dans cette dernière étude, on a laissé de côté le cas de $\rho' = 0$. Si l'on suppose à la fois $u = -p\rho\varepsilon$ et $\rho' = 0$, on obtient une surface solution de la question, qui n'est autre qu'un cas particulier de la série précédente et dont les caractéristiques sont

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \rho = \rho_0, \qquad q = 0, \qquad u = -p\rho_0\varepsilon, \qquad w = r\rho_0\varepsilon, \\ K_0 = \varepsilon\rho_0. \end{array} \right.$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est très intéressante, mais nous aurons l'occasion d'y revenir dans nos études monographiques.

III. Il ne nous reste plus qu'à étudier le cas où $KL - N\rho$ se décompose en deux facteurs de la forme

$$(A\varphi + B)\,\mathcal{F}_T(\varphi),$$

en désignant par A et B des fonctions de t seul et par $\mathcal{F}_T(\varphi)$ une fonction trigonométrique de φ.

En écrivant l'identité

$$KL - N\rho \equiv (A\varphi + B)\,\mathcal{F}_T(\varphi)$$

ou les identités équivalentes

$$A\mathcal{F}_T = \alpha_T, \qquad \ldots,$$

α_T désignant la fonction trigonométrique facteur de φ dans $KL - N\rho$;

$$B\mathcal{F}_T = \beta_T, \qquad \ldots,$$

β_T désignant le terme simplement trigonométrique de $KL - N\rho$, et en éliminant $\mathcal{F}_T$ on obtient la condition

$$A\beta_T - B\alpha_T \equiv 0.$$

Si on la développe, on trouve sans peine qu'une pareille identité entraîne les relations suivantes :

$$(25) \qquad \frac{Ku + p\rho^2}{K^2 q} = \frac{-(Kv + q\rho^2)}{K^2 p} = \frac{w - rK}{K'\rho}.$$

Introduisons la simplification $q = 0$, nous trouvons

$$p = K' = 0, \qquad \ldots,$$

cas déjà étudié, ou

$$(26)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{K}u + p\rho^2 = 0, \\ & \frac{w - \mathrm{K}r}{\mathrm{K}'} = -\frac{v}{\mathrm{K}p}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces conditions, l'équation $\mathrm{KL} - \mathrm{N}\rho = 0$ se réduit à la suivante

$$(27)\qquad \left(\varphi - \frac{v}{\mathrm{K}p}\right)(\mathrm{K}^2 p \cos\varphi + \mathrm{K}'\rho) = 0,$$

et $\mathrm{M} = 0$ ne pourra admettre toutes les racines du deuxième facteur du premier membre de (27) que :

1° Si M se décompose, ce qui exige $u = \rho' = 0$ et, en vertu des équations (26),

$$p = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{K}' = 0.$$

On est ainsi conduit à un cylindre droit ou à la solution déjà envisagée

$$p = q = \mathrm{K}' = 0.$$

2° Si M n'a pas de terme en φ. On retombe encore sur des solutions rencontrées; sauf ce cas, si M admet une des racines φ_0 de l'équation

$$(27\ bis)\qquad p\mathrm{K}^2 \cos\varphi + \mathrm{K}'\rho = 0,$$

elle ne peut admettre que cette seule racine de la série $\varphi_0 + 2n\pi$, φ étant donnée d'une façon unique en fonction de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ par l'équation $\mathrm{M} = 0$. Reste à voir si les autres racines de (27 *bis*) n'annulent pas $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi}$. On retrouve encore des solutions déjà rencontrées en observant qu'on doit avoir

$$u + \mathrm{K}p = 0,$$

condition qui, jointe à la première équation (26), donne $\mathrm{K}^2 = \rho^2$.

Le problème posé est donc résolu; toutefois, avant d'en résumer la solution, j'introduirai la considération d'une série de surfaces qui, sans être des solutions de la question actuelle, s'y rattachent de très près et jouent un rôle considérable dans nos théories.

Retour sur l'étude des surfaces à plan directeur et à pas *constant.* — Si l'on exprime que, pour ces surfaces, les équations $KL - N\rho$ et $M = 0$ ont une branche commune (sans exiger que toute la ligne de première espèce soit comprise dans celle de deuxième), autrement dit que les hélices génératrices aient une enveloppe, on trouve la condition

$$u^2 + v^2 = \rho'^2 + \frac{\rho^2 w^2}{K_0^2}, \tag{28}$$

qui définit une série de surfaces auquelles nous donnerons le nom de surfaces (Γ).

Remarque. — Il est à peine besoin de faire remarquer que l'étude précédente s'applique immédiatement au cas où, au lieu de rechercher les coïncidences de points centraux sur toutes les génératrices, c'est-à-dire la communauté de branches de lignes de striction, on voudrait trouver si sur quelque génératrice les conditions demandées sont réalisées. Les équations de condition trouvées, au lieu d'être des relations fonctionnelles en t exprimeraient simplement qu'il existe une ou plusieurs valeurs de t, y satisfaisant. Je me dispenserai d'énoncer les interprétations à donner dans ce cas. Nous en avons déjà rencontré des exemples antérieurement et nous retrouverons ultérieurement les mêmes considérations. Cette remarque étant faite une fois pour toutes, je me dispenserai d'y revenir lorsque l'énoncé complet des propriétés des génératrices spéciales trouvées ne paraîtra pas présenter un intérêt suffisant pour être exposé. Dans tous les résultats précédents on suppose, bien entendu, que la génératrice n'est pas un cercle, c'est-à-dire qu'on fait abstraction des valeurs particulières de t racines de la fonction $K(t)$.

RÉSUMÉ DE L'ÉTUDE PRÉCÉDENTE.

Tout d'abord, nous trouvons *comme seule surface, dont la ligne de striction de première espèce appartienne tout entière à celle de seconde espèce, les surfaces appartenant aux trois séries suivantes :*

1° *Les hélicoïdes de seconde espèce.* — En outre, pour ces surfaces, *les lignes de striction des deux espèces coïncident complètement.*

2° *Les surfaces à plan directeur et à pas constant définies par la condition* $w = 0$. — Ces surfaces, que nous désignerons par le nom de *surfaces* (Φ), *dérivent géométriquement de la surface de vis à filet carré* en faisant subir à chacune des asymptotiques de celle-ci une translation parallèle au plan directeur, mais de loi quelconque. Pas de surface à coïncidence complète, sauf l'hélicoïde gauche à plan directeur. Leur ligne de striction de deuxième espèce contient, outre celle de première, la branche définie par l'équation $u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho'\left(\frac{\rho^2+K^2}{\rho^2}\right) = 0$. Parmi ces surfaces, qui forment une classe très intéressante, on peut signaler les surfaces réglées dérivées de l'hélicoïde gauche minimum par une translation rectiligne de ses génératrices, dont l'amplitude est proportionnelle au rayon du cercle principal de l'hélice asymptotique déplacée.

3° *Surfaces engendrées par une hélice de forme invariable inclinée à 45° sur la direction de son axe et dont le mouvement est tel que la rotation élémentaire autour de son axe est égale au quotient de la composante de la translation suivant celui-ci divisée par le pas linéaire de la génératrice.* — Je les appellerai *surfaces* (Ψ). A signaler la classe spéciale de ces surfaces correspondant à un plan de base parallèle à une direction fixe. Pas de coïncidence complète s'il n'y a pas de plan directeur. Dans ce dernier cas, d'ailleurs, on retombe sur une série précédente.

La ligne de striction de seconde espèce de ces surfaces comporte, outre celle de première, la branche définie par l'équation

$$K_0\,\varphi(q\cos\varphi - p\sin\varphi) - [(2qK_0 - v)\sin\varphi + (2pK_0 - u)\cos\varphi] = 0.$$

Outre ces trois séries de surfaces répondant au problème proposé, l'étude précédente met en évidence deux autres classes :

4° *Les surfaces à pas linéaire variable égal au rayon.*

5° *Les surfaces* Γ ou à plan directeur, pas constant et arête de rebroussement définies analytiquement par la condition complémentaire

$$u^2 + v^2 = \rho'^2 + \frac{w^2\rho^2}{K_0^2}.$$

Parmi celles-ci nous désignerons sous le nom de *surfaces* (C) celles qui correspondent à $w = 0$, c'est-à-dire appartiennent aussi à la classe des surfaces Φ. Elles sont définies par les deux conditions complémentaires

$$u^2 + v^2 = \rho'^2, \qquad w = 0.$$

La dernière a déjà été interprétée géométriquement. La première s'interprète ainsi : Le cylindre principal reste osculateur à un cylindre fixe.

7. L'étude précédente met immédiatement en évidence le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Les hélicoïdes de seconde espèce sont les seules surfaces dont les lignes de striction coïncident complètement.*

La condition de compatibilité des équations

$$M = 0, \qquad KL - N\rho = 0,$$

étant la condition nécessaire et suffisante pour que l'hélice génératrice ait une enveloppe, il s'ensuit immédiatement, d'après les calculs précédents, la propriété suivante :

THÉORÈME IV. — *Si l'hélice génératrice admet une enveloppe, celle-ci est une branche commune aux lignes de striction des deux espèces.*

8. On peut se poser le problème inverse de celui traité au n° 6, c'est-à-dire chercher les surfaces telles que toute la ligne de striction de deuxième espèce appartienne à celle de première espèce. On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME V. — *Les surfaces à coïncidence complète, hélicoïdes de seconde espèce, sont les seules pour lesquelles la ligne de striction de première espèce contienne toutes les branches de celle de seconde espèce.*

Démonstration. — La ligne de striction de seconde espèce étant définie par l'équation

$$(29) \qquad (KL - N\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}(KL - N\rho) + (\rho^2 + k^2)M\frac{\partial M}{\partial\varphi} = 0,$$

toute solution de cette équation doit satisfaire à la relation

$$(30) \qquad KL - N\rho = 0,$$

qui définit la ligne de première espèce.

Premier cas. — $p = q = K' = 0$. Les équations (29) et (30) sont réductibles à une forme algébrique; en exprimant les lignes trigonométriques en fonction de $\tang\frac{\varphi}{2}$, l'équation (29) rendue entière se présente comme étant du quatrième degré en $\tang\frac{\varphi}{2}$ et l'équation (30) conduit à une équation du deuxième degré en $\tang\frac{\varphi}{2}$. Si donc l'équation (29) n'a d'autres solutions que celles de l'équation (30), cela exige que les équations aient une racine commune. Celle-ci doit évidemment appartenir à l'équation

$$M\frac{\partial M}{\partial\varphi} = 0,$$

de telle sorte qu'on est amené à résoudre les deux problèmes suivants :

Chercher s'il existe, parmi les surfaces correspondant aux conditions $p = q = K' = 0$, un groupe tel que les équations

$$M = 0 \quad \text{et} \quad KL - N\rho = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial M}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad KL - N\rho = 0$$

aient une racine commune.

La première série est constituée par les surfaces Γ. Je ne m'arrêterai pas à démontrer que leur ligne de striction de seconde espèce n'est pas comprise entièrement dans celle de première espèce.

La seconde série conduit aux seules surfaces Φ. On sait que, sauf pour l'hélicoïde gauche minimum, la ligne de striction de seconde espèce a, sur ces surfaces, des branches distinctes de celle de première espèce.

Deuxième cas. — Le premier membre de l'équation (29) se décompose et prend la forme suivante dans laquelle A, B, C désignent des fonctions de t :

$$(A\varphi^2 + B\varphi + C)(\text{fonct. trig. de } \varphi) = 0. \tag{31}$$

En calculant le terme en φ^2 du premier membre de l'équation (29), on trouve pour expression de la fonction trigonométrique entre parenthèses, au facteur K^2 près, le produit

$$(q\cos\varphi - p\sin\varphi)\,[K'\rho - \rho^2(q\sin\varphi + p\cos\varphi)]. \tag{32}$$

Mais l'équation (29) admet des solutions périodiques puisqu'elle se décompose en deux facteurs dont l'un trigonométrique. Il faut donc que $KL - N\rho$ admette des solutions de période 2π et par suite soit sans terme transcendant, cas étudié précédemment, ou se décompose. S'il en est ainsi, son facteur trigonométrique sera évidemment

$$K'\rho + K^2(p\cos\varphi + q\sin\varphi).$$

Pour que toutes les racines du produit (32) soient racines de l'équation

$$KL - N\rho = 0$$

et, par suite, de l'équation

$$K'\rho + K^2(p\cos\varphi + q\sin\varphi) = 0,$$

il faudrait qu'on ait

$$K' = 0, \qquad p^2 + q^2 = 0,$$

d'où, en écartant le cas d'un plan de base enveloppant le cercle de l'infini,

$$p = q = K' = 0,$$

Mais alors le terme en φ^2 n'existant plus dans le premier membre de l'équation (29), nos calculs sont en défaut. L'étude du cas correspondant à ces dernières conditions est la première que nous ayons traitée dans la question actuelle.

La même observation s'applique si l'on a simplement

$$p = q = 0.$$

Si l'on veut exprimer que $KL - N\rho$ se décompose dans ce cas, condition toujours nécessaire, on est conduit à écrire

$$K = v = 0.$$

En réalité, $KL - N\rho$ ne contient plus de terme trigonométrique. C'est un cas limite de la décomposition. Les surfaces correspondant aux conditions

$$p = q = u = v = 0$$

ne sont autres que les hélicoïdes de seconde espèce. Elles sont à coïncidence complète et satisfont par là même à la question actuelle.

3° *Cas général.* — Soit φ_0 une solution de l'équation (29); si on la porte dans l'équation (30), elle doit y satisfaire par hypothèse. Donc φ_0 peut être exprimée en fonction de $\sin\varphi_0$ et $\cos\varphi_0$ au moyen de l'équation (30), du premier degré en φ_0. Le résultat porté dans l'équation (29) est une équation algébrique en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ qui doit être vérifiée pour $\varphi = \varphi_0$. Soit (A_1) cette équation. La racine φ_0 étant une racine quelconque de l'équation (30), on voit que l'équation trigonométrique (A_1) doit être satisfaite par toute racine de l'équation transcendante (29), ceci exige que celle-ci se décompose, hypothèse qui vient d'être étudiée, ou que l'équation (A_1) soit identique. Or, on voit que (A_1) a été formée comme le (A) du n° 6, à cela près qu'on a substitué dans

$$(KL - N\rho)\frac{\partial}{\partial\varphi}(KL - N\rho) + (\rho' + K^2)M\frac{\partial M}{\partial\varphi},$$

au lieu de substituer dans

$$M\frac{\partial M}{\partial\varphi}.$$

Mais si l'on observe que la première partie de la formule contenant en facteur $KL - N\rho$ s'annule identiquement par la substitution déduite de l'équation (30), on voit que l'équation (A_1) n'est autre que l'équation (A). Les surfaces en question appartiendront donc au groupe des surfaces dont tous les points de première espèce coïncident avec des points de seconde espèce et, comme elles doivent appartenir au groupe inverse, elles appartiennent, si elles existent, au groupe des surfaces à coïncidence complète.

Ce raisonnement pourrait se trouver en défaut si la substitution précédemment définie n'était plus légitime, ce qui, hors le cas de $p = q = K' = 0$, ne peut se présenter que si $KL - N\rho$ se décompose.

Mais alors, par hypothèse, l'équation (29) ne peut avoir que deux séries de racines : d'une part, une racine correspondant au facteur algébrique en φ, et, d'autre part, des racines périodiques correspondant au facteur trigonométrique de $KL - N\rho$. Ceci exige que le premier membre de l'équation (29) se décompose sous la forme (31), ou soit débarrassé de termes transcendants, ce qui est un cas limite de cette forme. Cette étude a été faite et a conduit aux seuls hélicoïdes de seconde espèce.

9. Définition. — Soit $K_1 = \frac{K}{\rho}$ le pas angulaire de l'hélice génératrice.

L'angle V est donné par la formule

$$\tag{33} \operatorname{tang}^2 V = K_1^2 + \left(\frac{LK - \rho N}{\rho M}\right)^2;$$

si l'on pose

$$\tag{34} K_1 = \operatorname{tang} V_1, \qquad \frac{LK - \rho N}{\rho M} = \operatorname{tang} U,$$

on obtient

$$\tag{35} \operatorname{tang}^2 V = \operatorname{tang}^2 V_1 + \operatorname{tang}^2 U.$$

On remarquera que l'angle U est lié simplement à divers éléments géométriques déjà définis par les relations

$$\tag{36} \operatorname{tang} U = -\operatorname{tang} V \cos W, \qquad \operatorname{tang} U \operatorname{tang} W = K_1.$$

J'appelle paramètre de distribution en un point d'une génératrice l'expression [1]

$$\tag{37} \frac{\partial \operatorname{tang} U}{\partial \varphi}.$$

---

[1] On est conduit à cette définition par une analogie évidente avec les surfaces réglées. Dans celles-ci, en effet, si V désigne l'angle du plan tangent en un point d'une génératrice avec le plan central de celle-ci, ϖ le paramètre de distribution de cette génératrice et ρ l'abscisse du point de contact comptée sur la génératrice

10. On est conduit immédiatement à se poser la question suivante :

Existe-t-il des surfaces où cette fonction ait la même valeur en tous les points de chacune des génératrices ainsi que cela se passe pour la quantité analogue dans les surfaces réglées?

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $f(t)$ vérifiant l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{LK-\rho N}{\rho M}\right)=f(t),$$

ou encore

$$LK-\rho N=[\varphi f(t)+\psi(t)]\rho M, \tag{38}$$

$\psi(t)$ désignant une fonction arbitraire de t introduite par intégration.

Les deux membres de l'équation (38) sont des polynomes en φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, mais dans le deuxième membre existe un terme en φ^2

$$\varphi^2\rho K f(t)(q\cos\varphi-p\sin\varphi),$$

tandis que dans le premier membre il n'en existe pas, d'où

$$f(t)=0 \qquad \text{ou} \qquad p=q=0.$$

La condition $f(t)=0$ conduit à $\operatorname{tang}U=\text{const.}$ et par suite $\operatorname{tang}V=\text{const.}$ le long d'une génératrice. Les surfaces correspondantes se réduisent aux hélicoïdes.

Reste la condition $p=q=0$. Rien n'empêche de faire $r=0$.

à partir du point central, on a

$$\operatorname{tang}V=\frac{\rho}{\varpi},$$

ou, sur la génératrice,

$$d\operatorname{tang}V=\frac{1}{\varpi}d\rho,$$

ou

$$\varpi=\frac{d\rho}{d\operatorname{tang}V}=\frac{1}{\frac{d\operatorname{tang}V}{d\rho}}.$$

qu'on peut écrire

$$\varpi=\frac{1}{\frac{\partial\operatorname{tang}V}{\partial\rho}}.$$

Cette formule met en évidence l'analogie annoncée.

L'identité (38) devient :

$$(39)\quad \varphi K'\rho + K u \sin\varphi - K v \cos\varphi + \rho w$$
$$= -\rho f(t)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho')\varphi - \rho\,\psi(t)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho').$$

L'identification des deux membres donne

$$u = v = \rho K' + f\rho\rho' = 0, \qquad \rho\omega = -f(t)\rho'.$$

Si l'on suppose ρ' nul on est conduit à une hélice fixe ou à un cylindre avec valeur infinie de ψ, résultat qu'il est facile d'expliquer. On pourra donc laisser ce cas et s'arrêter aux équations de conditions

$$(40)\qquad u = v = p = q = (r) = 0.$$

Ces conditions étant supposées satisfaites, il existera une fonction $f(t)$ déterminée par la relation

$$(41)\qquad f(t) = -\frac{K'}{\rho'}.$$

On pourra se donner u et la fonction ψ sera déterminée par la formule

$$(42)\qquad \psi(t) = -\frac{\rho w}{\rho'}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème VI. — *Les surfaces hélicoïdales de seconde espèce sont les seules pour lesquelles le paramètre de distribution conserve la même valeur aux divers points d'une génératrice.*

Cette valeur est égale au quotient $-\frac{K'}{\rho'}$.

Remarque. — *Cette valeur du paramètre de distribution sera la même sur toute la surface si le pas est une fonction linéaire du rayon. En particulier, cette valeur est nulle pour les hélicoïdes ordinaires.*

11. Problème. — *Déterminer les conditions pour que la normale à la surface engendrée par une hélice circulaire aux divers points d'une génératrice déterminée rencontre une*

même parallèle à l'axe de celle-ci. En particulier, déterminer les surfaces pour lesquelles chacune des génératrices possède cette propriété.

Soient x_0, y_0 les coordonnées de la parallèle à l'axe de la génératrice (t_0) considérée, dans le système mobile auquel nous rapportons la génératrice.

Les coordonnées d'un point de la normale à la surface en un point x, y, z de la génératrice (t_0) considérée sont

$$x + A\sigma, \quad y + B\sigma, \quad z + B\sigma.$$

Les conditions du problème est donc

$$x + A\sigma = x_0. \qquad y + B\sigma = y_0,$$

d'où, en éliminant σ,

$$(43) \qquad Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0,$$

relation qui doit être vérifiée pour toute valeur de φ, t ayant a valeur t_0 relative à la génératrice considérée. Introduisons la simplification connue $q = 0$. L'équation (43) devient :

$$\begin{aligned}(44)\ K\rho(u\cos\varphi + v\sin\varphi) - pK^2\rho\varphi\sin\varphi + K\rho\rho' \\ \equiv x_0\rho\sin\varphi(w + K'\varphi + p\rho\sin\varphi) + Kx_0(u + \rho'\cos\varphi - r\rho\sin\varphi) \\ - y_0\rho\cos\varphi(w + K'\varphi + p\rho\sin\varphi) \\ + Ky_0(v + r\rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi - pK\varphi).\end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation ne contient pas de terme en φ seul, il doit en être de même du second; d'où la relation

$$K^2 y_0 p = 0,$$

et, si l'on met de côté le cas où t_0 est une racine de $K(t)$, c'est-à-dire où l'hélice dégénère en un cercle, il reste

$$py_0 = 0.$$

1° $y = 0$, la considération des termes trigonométriques de l'équation (44) donne de suite

$$(45) \qquad px_0 = 0,$$

et p n'étant pas supposé nul (*cf.* ci-après), il reste

$$x_0 = 0.$$

La normale à la surface dans ce cas n'est autre que la normale principale à l'hélice. Celle-ci est une géodésique de la surface. On retombe sur une question connue.

2° On satisfait à la relation (45) en prenant $p(t_0) = 0$.

Le plan de base est stationnaire. On peut alors supposer

$$r(t_0) = 0.$$

Le premier membre ne contient que des termes trigonométriques. En écrivant qu'il en est de même du deuxième membre, on trouve

$$K' x_0 = K' y_0 = 0,$$

c'est-à-dire, soit

$$x_0 = y_0 = 0,$$

qui donne une solution déjà trouvée, soit

$$K' = 0.$$

Le pas est stationnaire : soit K_0, sa valeur pour la génératrice en question.

On achève l'identification en écrivant les équations

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} K_0 \rho u &= -\rho w y_0 + K_0 \rho' x_0, \\ K_0 \rho v &= \rho w x_0 + \rho' K_0 y_0, \\ K_0 u x_0 &+ K_0 v y_0 = K_0 \rho \rho', \end{aligned}\right.$$

entre lesquelles l'élimination de x_0 et y_0 donne la condition

$$(47)\qquad \rho'\left(u^2 + v^2 - \rho'^2 - \frac{\rho^2 w^2}{K_0^2}\right) = 0.$$

A. $\rho' = 0$. — On est conduit à une hélice dont le plan de base et la forme sont stationnaires.

B. $u^2 + v^2 - \rho'^2 - \dfrac{\rho^2 w^2}{K_0^2} = 0$. — Cette condition définit une hélice dont le plan de base et le pas sont stationnaires et qui rencontre la génératrice infiniment voisine.

Si les conditions du problème doivent être vérifiées quel que soit t, les relations précédentes où figurait t_0 deviennent des égalités fonctionnelles; x_0, y_0 deviennent des fonctions de t et l'on obtient le théorème suivant :

Théorème VII. — *Les surfaces engendrées par une hélice* *de grandeur constante qui se meut en conservant une direction d'axe fixe, les cylindres droits et les surfaces* Γ, *sont les seules dont la normale aux divers points de chaque génératrice rencontre constamment une parallèle à l'axe de celle-ci.*

12. Problème. — *Déterminer les surfaces telles que la normale aux divers points de chacune de ses hélices génératrices rencontre une même droite.*

Nous commencerons par remarquer qu'on peut laisser de côté le cas où cette droite serait toujours parallèle à l'axe de la génératrice que décrit le pied de la normale, hypothèse qui a fait l'objet de l'étude précédente. Cette remarque sera utile plus loin.

Nous devons donc chercher si l'on peut déterminer des fonctions de la variable t,

$$a_1 b_1 c_1 d_1, \quad a_2 b_2 c_2 d_2,$$

telles qu'on ait, quel que soit φ et pour une valeur quelconque de t, les relations

$$(48)\qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \end{cases}$$

entre les trois coordonnées x, y, z données par les équations

$$x = \rho\cos\varphi + A\sigma, \qquad y = \rho\sin\varphi + B\sigma, \qquad z = K\varphi + C\sigma$$

de la normale à la surface.

L'élimination de σ conduit à l'équation de condition

$$(49)\qquad \begin{aligned} &(Aa_2 + Bb_2 + Cc_2)(a_1\rho\cos\varphi + b_1\rho\sin\varphi + c_1 K\varphi + d_1) \\ &-(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1)(a_2\rho\cos\varphi + b_2\rho\sin\varphi + c_2 K\varphi + d_2) = 0, \end{aligned}$$

qui doit être vérifiée identiquement.

Le premier membre est polynome en φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ du deuxième degré en φ. Le coefficient de φ^2, qui s'obtient sans autre difficulté que la longueur des calculs, est, en faisant $q = 0$,

$$\begin{aligned} &C_1 K[a_2(\rho K'\cos\varphi + pK^2) + b_2\rho K'\sin\varphi + c_2 pK\rho\sin\varphi] \\ &- C_2 K[a_1(\rho K'\cos\varphi + pK^2) + b_1\rho K'\sin\varphi + c_1 pK\rho\sin\varphi]. \end{aligned}$$

Ce coefficient doit être identiquement nul. D'où les équations (50) (en mettant de côté les surfaces cerclées)

$$(50)\quad (a_1c_2-a_2c_1)p=0,\qquad (a_2c_2-a_2c_1)\mathrm{K}'=(b_1c_2-b_2c_1)\mathrm{K}'=0.$$

Les deux dernières de ces relations donnent la condition unique

$$\mathrm{K}'=0$$

ou les deux conditions

$$a_1c_2-a_2c_1=0,\qquad b_1c_2-b_2c_1=0.$$

Premier cas. — Étudions d'abord cette dernière solution. D'après la remarque du début la droite ne sera pas, sauf peut-être dans des positions particulières, parallèle à l'axe de la génératrice, de telle sorte qu'on peut toujours supposer que l'une des quantités, et même les deux, c_1 ou c_2 n'est pas nulle identiquement. Cela étant, posons

$$c_2=\mathrm{P}c_1$$

et portons dans la relation (50), nous obtenons les équations

$$(a_1\mathrm{P}-a_2)c_1=0,\qquad (b_1\mathrm{P}-b_2)c_1=0;$$

c_1 étant supposé différent de zéro, d'après ce qu'on vient de dire, on a finalement les relations

$$(51)\qquad a_2=\mathrm{P}a_1,\qquad b_2=\mathrm{P}b_1,\qquad c_2=\mathrm{P}c_1.$$

L'équation (49) donne alors

$$(\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}b_1+\mathrm{C}c_1)(\mathrm{P}\,d_1-d_2)=0.$$

On ne peut supposer $\mathrm{P}d_1-d_2$ nul, car les deux plans dont nous sommes partis doivent être distincts pour déterminer une droite à distance finie ou infinie. On doit donc avoir nécessairement

$$(52)\qquad \mathrm{A}a_1+\mathrm{B}b_1+\mathrm{C}c_1=0.$$

C'est la condition pour que la normale reste parallèle au plan

$$(53)\qquad a_1x+b_1y+c_1z=0,$$

ce qui était à prévoir, la droite déterminée par les deux plans (48) étant ici rejetée à l'infini.

Il reste à satisfaire à l'identité (52). Son premier membre contient la première puissance de φ avec le facteur

$$a_1 \rho K' \cos\varphi + (b_1 \rho K' + c_1 \rho p K) \sin\varphi + a_1 p K^2,$$

qui doit par suite être identiquement nul. D'où

$$(54) \qquad a_1 p = 0, \qquad a_1 K' = 0, \qquad b_1 K' + c_1 p K = 0.$$

La première de ces relations donne : soit

$$a_1 = 0, \qquad \text{soit} \qquad p = 0.$$

a. En supposant $a_1 = 0$, il reste la seule condition

$$(55) \qquad b_1 K' + c_1 p K = 0.$$

Mais, dans ce cas, l'équation (52) s'écrit

$$b_1[\rho \sin\varphi(w + p\rho \sin\varphi) + K(u - r\rho \sin\varphi + \rho' \cos\varphi)] \\ + c_1(-u\cos\varphi - v\sin\varphi - \rho')\rho = 0,$$

relation d'identité qui est du second degré en $\sin\varphi$ et en $\cos\varphi$ *sans terme en* $\cos^2\varphi$. Le coefficient de $\sin^2\varphi$ est $b_1 p \rho^2$. Comme on n'a pas supposé p nul, on a donc

$$b_1 = 0.$$

Mais alors la condition (55) entraîne *nécessairement* $p = 0$, car les trois coefficients a_1, b_1, c_1 ne peuvent être nuls à la fois.

Dans tous les cas on est amené à supposer $p = 0$ et l'on se trouve ici dans un cas particulier de cette hypothèse.

b. Je prend la solution $p = 0$. Il reste

$$a_1 K' = b_1 K' = 0,$$

ce qui exige : soit

$$a_1 = b_1 = 0, \qquad \text{soit} \qquad K' = 0.$$

La première hypothèse conduit à écrire l'identité

$$u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho' = 0$$

ou

$$u = v = \rho' = 0.$$

Les surfaces obtenues sont les cylindres de révolution.

La deuxième donne

$$K = K_0,$$

valeur constante.

Mais puisque $p = q = 0$, on peut supposer $r = 0$ et l'on est conduit à l'équation d'identification

$$a_1(\rho w \cos\varphi - K_0 v - K_0 \rho' \sin\varphi) + b_1(\rho w \sin\varphi + K_0 u + K_0 \rho' \cos\varphi) - c_1 \rho'(u \cos\varphi + v \sin\varphi + \rho') = 0;$$

d'où les trois relations :

$$(56) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 \rho w + b_1 K_0 \rho' - c_1 \rho u &= 0, \\ - a_1 K_0 \rho' + b_1 \rho w - c_1 \rho v &= 0, \\ - a_1 K_0 v + b_1 K_0 u - c_1 \rho \rho' &= 0, \end{aligned} \right.$$

entre lesquelles l'élimination de a_1, b_1 et c_1 donne la relation

$$\rho' \left(u^2 + v^2 - \rho'^2 - \frac{\rho^2 w^2}{K_0^2} \right) = 0.$$

D'où l'on conclut immédiatement :

Théorème VIII. — *Les surfaces engendrées par une hélice circulaire indéformable qui se meut en conservant la même direction d'axe, les cylindres de révolution et les surfaces* Γ, *sont les seules pour lesquelles la normale aux divers points de chacune de ses génératrices reste parallèle à un plan fixe.*

Remarques. — 1. Il résulte des théorèmes VII et VIII une réciprocité intéressante entre les éléments qui en font l'objet : la normale aux divers points de chaque génératrice rencontre une parallèle à l'axe de celle-ci, d'une part, et elle reste parallèle à un plan fixe d'autre part.

On remarquera aussi que la normale en question décrit un conoïde; c'est un rapprochement avec les surfaces réglées (paraboloïdes des normales).

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers d'un théorème plus général que nous allons établir bientôt.

2. Dans le cas des hélices génératrices de grandeur invariable, le plan auquel la normale reste parallèle est le plan

$$(57) \qquad ux + vy + wz = 0,$$

et la droite qu'elle rencontre est déterminée par les relations

$$(58) \qquad x = K_0 \frac{v}{w}, \qquad y = - K_0 \frac{u}{w}.$$

Si $w = 0$ (la surface est alors une surface Φ), le plan devient parallèle à l'axe et la droite disparaît à l'infini dans ce plan.

Dans le cas des surfaces Γ le plan en question a pour équation

$$(59)\qquad (\rho^2 wu - v_0 K_0 \rho\rho')x + (\rho^2 vw + K_0\rho\rho' u)y + K_0^2(u^2+v^2)z = 0,$$

et la droite a les équations

$$x = \frac{K_0\rho\rho' u + \rho^2 vw}{K_0(u^2+v^2)}, \qquad y = \frac{K_0\rho\rho' v - \rho^2 uw}{K_0(u^2+v^2)}.$$

Dans les deux hypothèses la droite et le plan sont liés très simplement; si α et β sont les coordonnées de la droite, l'équation du plan est

$$K_0 z = \beta x - \alpha y.$$

Deuxième cas. — On satisfait aux équations (50) en prenant $K' = 0$ ou $K = K_0$. Il ne reste qu'une relation à vérifier

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)p = 0.$$

1° Prenons d'abord $p = 0$ et, pour simplifier, faisons comme c'est notre droit $r = 0$.

L'équation (49) ne possède plus de terme en φ^2, mais le coefficient de son terme en φ est

$$(60)\qquad A(a_2 c_1 - a_1 c_2) + B(b_2 c_1 - b_1 c_2),$$

qui doit être nul. Posons pour abréger

$$a_2 c_1 - a_1 c_2 = \alpha, \qquad b_2 c_1 - b_1 c_2 = \beta.$$

Les conditions pour que l'expression (60) soit nulle sont données par les trois relations

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha w\rho + \beta K_0\rho' &= 0,\\ -\alpha K_0\rho' + \beta w\rho &= 0,\\ \beta u - \alpha v &= 0. \end{aligned}\right.$$

Des deux premières on tire $\alpha = \beta = 0$, ce qui ramène au premier cas, ou bien leur déterminant $w^2\rho^2 + K_0^2\rho'^2$ doit être nul, ce qui entraîne, en se bornant aux génératrices réelles,

$$\rho' = w = 0$$

ou

$$\rho = \rho_0 \text{ valeur constante}, \qquad w = 0.$$

Ces surfaces sont un cas particulier de celles rencontrées plus haut; c'est précisément le cas exceptionnel où la droite rencontrée par la normale disparaît à l'infini. On retrouverait d'ailleurs, en poursuivant les calculs, la condition $\alpha = \beta = 0$, en laissant de côté $u = v = 0$ qui donne une hélice fixe.

2° p est quelconque; on a nécessairement

$$(62) \qquad a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0,$$

et l'on a remarqué qu'on pouvait supposer $c_1 c_2 \neq 0$.

Dans ces conditions, on peut faire $c_1 = c_2 = 1$ et la relation (62) devient simplement $a_1 = a_2$, valeur commune que nous désignerons par a. Ces remarques simplifient les calculs suivants sans rien enlever à la généralité des raisonnements. L'équation (49) s'écrit alors après quelques transformations

$$(63) \quad \mathrm{B}a\rho\cos\varphi - (\mathrm{A}a + \mathrm{C})\rho\sin\varphi + \mathrm{BK}\varphi - (\mathrm{A}a + \mathrm{C})\alpha + \mathrm{B}\beta \equiv 0$$

en posant [1]

$$\alpha = \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}, \qquad \beta = \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{b_2 - b_1}.$$

On remarquera que la droite représentée par les équations (48) admet les équations simples

$$(64) \qquad y = -\alpha; \qquad z + ax = -\beta,$$

d'où la conclusion suivante :

A un système de valeur de α et β correspond toujours une droite et une seule.

Après remplacement de A, B, C par les valeurs correspondantes la relation (63) prend la forme

$$\varphi\,\rho_1(\varphi) + \rho_2(\varphi) \equiv 0,$$

où $\rho_1(\varphi)$ et $\rho_2(\varphi)$ représentent des polynomes en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. On en déduit la relation

$$\rho_1(\varphi) \equiv 0, \qquad \rho_2(\varphi) \equiv 0.$$

Tous calculs faits, ρ_1 se réduit à une forme linéaire en $\sin\varphi$ et

---

[1] Ces calculs supposent $b_2 - b_1 \neq 0$. Le cas où $b_2 = b_1$ n'est autre que celui de l'étude précédente : la normale reste parallèle à un plan.

$\cos\varphi$; en égalant à zéro le coefficient de $\cos\varphi$, on trouve $K_0\rho' = 0$ et, en laissant de côté les surfaces cerclées, $\rho' = 0$ ou $\rho = \rho_0$.

D'où le résultat remarquable suivant obtenu en rapprochant de la condition $K = K_0$.

Les hélices génératrices doivent être indéformables. Je dis que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

La considération du terme en $\sin\varphi$ dans $\rho_1(\varphi)$ donne la condition

$$w = p(\alpha + aK_0) + rK_0, \tag{I}$$

et celle du terme indépendant donne

$$u = a\alpha p. \tag{II}$$

Reste à voir ce que donne la condition

$$\rho_2(\varphi) \equiv 0.$$

Cette expression est un polynome du second degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ sans terme en $\cos^2\varphi$. Tous ses coefficients doivent donc être nuls, d'où quatre conditions :

$$\left\{\begin{array}{ll} v + \beta p = 0, & aK_0u - a\alpha w + a\alpha K_0 r + \alpha u = 0, \\ \beta u + a\alpha v = 0, & aK_0 v + \alpha v + w\beta - \beta K_0 r = 0. \end{array}\right. \tag{65}$$

La première donne une relation nouvelle

$$v = -\beta p. \tag{III}$$

En vertu de (II) et (III), la seconde condition de la première colonne (65) est vérifiée. Il en est de même, en vertu de (I) et (II) de la première condition de la seconde colonne et de la dernière en raison de (I) et (III).

En définitive, les conditions (I), (II), (III), jointes aux relations $\rho = \rho_0$, $K = K_0$, sont nécessaires et suffisantes quels que soient d'ailleurs p, r, u, v, w, c'est-à-dire le mouvement de l'hélice. Toutefois, pour achever la question, il reste à voir si l'on peut déterminer α et β, c'est-à-dire si les relations (I), (II), (III) admettent bien une solution en a, α et β. Dans le cas de l'affirmative, à chaque système de solution correspondra une droite rencontrée par la normale. (D'ailleurs, *a priori*, deux au plus, sans quoi la normale décrirait une quadrique, ce qui est impossible, une quadrique ne pouvant contenir une hélice circulaire.) Or, ici, on suppose que p n'est pas identiquement nul : β sera donc donné sans ambiguïté en fonction du mouvement de l'hélice par la relation

$$\text{(III } bis\text{)} \qquad \beta = -\frac{v}{p}.$$

Quant à α et a, ils sont donnés par le système

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{aligned} a\alpha &= \frac{u}{p}, \\ \alpha + a\mathrm{K}_0 &= \frac{w - r\mathrm{K}_0}{p}. \end{aligned} \right.$$

Ces deux relations, quand on y regarde α et β comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un plan, représentent une hyperbole et une droite non parallèle à ses asymptotes. Il existe donc deux couples de valeurs finies

$$a_1, \quad \alpha_1;$$
$$a_2, \quad \alpha_2;$$

solutions des équations (IV) et par suite deux droites définies par ces couples de valeurs

$$a = a_1, \qquad \alpha = \alpha_1, \qquad \beta = -\frac{v}{p},$$

$$a = a_2, \qquad \alpha = \alpha_2, \qquad \beta = -\frac{v}{p}.$$

Ces droites peuvent être réelles, imaginaires ou confondues : réelles si

$$(w - r\mathrm{K}_0)^2 - 4pu\mathrm{K}_0 > 0,$$

confondues si

$$(w - r\mathrm{K}_0)^2 - 4pu\mathrm{K}_0 = 0,$$

imaginaires si

$$(w - r\mathrm{K}_0)^2 - 4pu\mathrm{K}_0 < 0.$$

Toute cette étude est résumée par le théorème général suivant, les remarques qui lui sont adjointes et les théorèmes VII et VIII déjà rencontrés.

Théorème IX. — *Si les normales aux divers points de chaque hélice circulaire génératrice rencontrent une droite fixe, elles* *rencontrent une deuxième droite fixe qui, exceptionnellement, peut être confondue avec la première. La surface est un cylindre de révolution, une surface* Γ *ou une surface engendrée par une hélice indéformable, et inversement toutes ces surfaces jouissent de la propriété énoncée* (l'une des droites pouvant être rejetée à l'infini et l'autre être parallèle à l'axe de la génératrice : c'est le cas envisagé par les théorèmes VII et VIII).

Remarques. — 1. *Les génératices des surfaces, objet du théorème IX, sont indéformables ou douées d'une enveloppe.*

2. Nous avons fait, au sujet des théorèmes VII et VIII, un rapprochement avec les surfaces réglées; le théorème IX conduit en outre à un rapprochement avec certaines séries de surfaces cerclées, qui résulte immédiatement du théorème suivant, corollaire d'une proposition du Mémoire de M. Demartres sur les surfaces cerclées :

Pour que les normales aux divers points de chaque génératrice d'une surface cerclée rencontrent, outre l'axe de cette génératrice, une seconde droite fixe, il faut et il suffit que le cercle générateur soit indéformable ou muni d'une enveloppe.

3. La démonstration directe de ce fait : que les normales à la surface engendrée par une hélice indéformable aux divers points de chaque génératrice rencontrent deux droites fixes, se ramène très simplement au théorème de Schönemann et Mannheim sur la propriété des normales aux surfaces trajectoires à un instant donné des divers points d'une figure indéformable dans le déplacement à deux paramètres. La surface engendrée par une hélice circulaire indéformable coïncide en effet avec les diverses surfaces décrites par chacun des points de cette hélice dans le déplacement à deux variables constitué par la composition du mouvement à un paramètre dont est animée l'hélice génératrice et d'un mouvement hélicoïdal indépendant du premier et qui ne cesse de faire coïncider la génératrice avec elle-même dans chacune de ses positions. En appliquant alors le théorème précité aux divers points de la génératrice, on trouve précisément la proposition dont il s'agit.

Cette démonstration s'applique évidemment aux surfaces réglées et à celles engendrées par un cercle indéformable.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DE DIVERSES SURFACES PAR DES CONDITIONS DE COURBURE IMPOSÉES A DES GÉNÉRATRICES.

1. *Lemme préliminaire. — Si le polynome en* $\sin\varphi$ *et* $\cos\varphi$,

$$\Phi = a^2\sin^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\cos^2\varphi + 2d\sin\varphi + 2e\cos\varphi + f,$$

est carré exact d'une fonction rationnelle de $\sin\varphi$ *et* $\cos\varphi$, *il sera nécessairement le carré d'un polynome du premier degré en* $\sin\varphi$ *et* $\cos\varphi$.

Je me bornerai à énoncer cette proposition sans m'arrêter à l'établir.

2. Problème. — *Déterminer toutes les surfaces pour lesquelles* H *est rationnelle en* φ, $\sin\varphi$ *et* $\cos\varphi$.

Désignons par A_t, B_t, a_t, b_t, α_t, β_t, des fonctions trigonométriques de φ rationnelles en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$; on a

$$KL - \rho N = \varphi A_t + B_t, \qquad (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} M = \varphi a_t + b_t.$$

La solution du problème revient à chercher s'il existe des fonctions α_t, β_t telles qu'on ait

$$(\varphi A_t + B_t)^2 + (\varphi a_t + b_t)^2 \equiv (\varphi\alpha_t + \beta_t)^2, \tag{1}$$

l'expression figurant au premier membre de l'identité (1), si elle est carré parfait, devant nécessairement être le carré d'un binome linéaire en φ.

L'identification du coefficient des différentes puissances de φ dans les deux membres de l'identité (1) donne les relations

$$A_t^2 + a_t^2 = \alpha_t^2, \qquad A_t B_t + a_t b_t = \alpha_t\beta_t, \qquad B_t^2 + b_t^2 = \beta_t^2. \tag{2}$$

En éliminant α_t et β_t, on trouve la première condition

$$A_t b_t - B_t a_t = 0 \tag{3}$$

ou, en développant,

$$(4)\quad (u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho')[K^2(q\sin\varphi + p\cos\varphi) + K'\rho]$$
$$+ K(q\cos\varphi - p\sin\varphi)$$
$$\times [\cos\varphi(Kv + \rho^2 q) - \sin\varphi(Ku + \rho^2 p) + \rho(Kv - w)] = 0,$$

relation qui doit être vérifiée identiquement.

En égalant à zéro le coefficient des termes rectangles $\sin\varphi\cos\varphi$ on trouve la première condition

$$pq = 0.$$

Soit, par exemple,

$$q = 0;$$

égalons les coefficients des termes en $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$, nous trouvons la condition

$$Kp^2\rho^2 = 0$$

et, enfin, en laissant de côté les surfaces cerclées,

$$p = 0.$$

Les surfaces cherchées seront donc à plan directeur d'hélice (¹). Le premier membre de l'équation (4) se réduit au produit

$$K'\rho(u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho'),$$

qui ne peut être nul identiquement que dans deux cas:

1°
$$K' = 0;$$

la génératrice est à pas constant K_0.

2°
$$u = v = \rho' = 0;$$

la surface est un cylindre de révolution. Dans ce dernier cas, H se réduit au binome

$$\rho(\varphi K' + w - Kr).$$

Ces surfaces sont susceptibles d'une infinité de génératrices

(¹) On aurait pu abréger un peu les écritures en introduisant dès le début la simplification permise $q = 0$. Le bénéfice ainsi réalisé n'aurait d'ailleurs pas été considérable et l'on a adopté le présent exposé par considération pour l'intérêt de la symétrie des écritures.

hélices. Si l'on adopte une famille de génératrices dont le pas est constant, elles rentrent dans la série des hélicoïdes [1].

Revenons au cas où l'on prend la condition $K' = 0$.

La génératrice est à pas constant. Pour simplifier notre exposé, nous introduirons en outre la condition permise $r = 0$.

On obtient ainsi

$$(5) \qquad \begin{aligned} H^2 = & [K_0(v\cos\varphi - u\sin\varphi) - w\rho]^2 \\ & + (\rho^2 + K_0^2)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho')^2. \end{aligned}$$

Il s'agit de rechercher dans quel cas cette expression sera le carré d'une expression rationnelle en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. D'après le lemme du début, cela revient à chercher s'il existe trois fonctions de t, α, β, γ telles qu'on ait l'identité

$$(5\,bis) \quad \begin{aligned} & [K_0(v\cos\varphi - u\sin\varphi) - w\rho]^2 \\ & + (\rho^2 + K_0^2)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho')^2 = (\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi + \gamma)^2, \end{aligned}$$

ou, après des réductions faciles,

$$(6) \quad \begin{aligned} & \rho^2[u^2\cos^2\varphi + 2uv\sin\varphi\cos\varphi + v^2\sin^2\varphi] \\ & + 2\sin\varphi[+ K_0 u\rho w + \rho' v(\rho^2 + K_0^2)] \\ & + 2\cos\varphi[- K_0 v\rho w + \rho' u(\rho^2 + K_0^2)] \\ & + w^2\rho^2 + \rho'^2(\rho^2 + K_0^2) + K_0^2(u^2 + v^2) - [\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi + \gamma]^2 = 0 \end{aligned}$$

La considération des termes du deuxième degré conduit immédiatement aux relations

$$(7) \qquad \alpha^2 - \beta^2 = -\rho^2(u^2 - v^2), \qquad \alpha\beta = \rho^2 uv.$$

ce qui donne quatre séries de solutions à étudier

$$(8) \quad \alpha = \pm\rho v \quad \text{avec} \quad \beta = \pm\rho u \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \pm\rho u i, \quad \beta = \mp\rho v i,$$

les signes se correspondant dans chaque groupe. Il est évident que, par la nature de la question, on peut, sans restreindre les résultats, se borner, dans chaque groupe, à considérer une seule détermination.

---

[1] C'est à ce point de vue que nous avons pu faire rentrer les cylindres dans la catégorie des hélicoïdes dans le théorème XIV énoncé aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 17 juin 1907.

Premier cas. — Nous mettrons immédiatement de côté l'hypothèse $u = v = 0$, qui donne des hélicoïdes : ces surfaces répondent à la question et, de plus, H se réduit à une simple fonction de t.

Deuxième cas. — On prend $\alpha = \rho u i$, $\beta = -\rho v i$. Ce cas correspond à une génératrice imaginaire. C'est d'ailleurs ce que nous vérifierons dans la suite. Les coefficients de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ dans le premier membre de l'identité (6) doivent être nuls; ce qui nous donne les deux relations

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} K_0 \rho u w + \rho' v(\rho^2 + K_0^2) &= \gamma \rho u i, \\ -K_0 \rho v w + \rho' u(\rho^2 + K_0^2) &= -\gamma \rho v i. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de γ donne une relation de condition entre les éléments de la génératrice. En laissant de côté les hélices isotropes, comme dans tout ce travail, cette condition est

$$\rho'(u^2 + v^2) = 0,$$

Négligeons pour le moment la solution

$$u^2 + v^2 = 0.$$

nous trouvons

$$\rho' = 0.$$

L'hélice est indéformable. D'ailleurs, en multipliant la première équation (9) par u, la seconde par $-v$, ajoutant et divisant par $u^2 + v^2$, qui n'est pas supposé nul identiquement, on tire

$$\gamma = -wK_0 i.$$

Portons dans l'équation (6) les valeurs trouvées pour α, β et γ en tenant compte de la condition $\rho' = 0$. Le premier membre se réduit à la somme

$$u^2 + v^2 + w^2.$$

La surface sera donc caractérisée par les conditions

$$(10) \qquad p = q = r = K' = \rho' = u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

On trouve ainsi un groupe de surfaces engendrées par des hélices indéformables à plan directeur et dont le centre du cercle principal décrit une courbe de longueur nulle quelconque, le mouvement du trièdre fondamental étant une *translation. Ce sont des surfaces de translation à génératrices imaginaires.* On a, pour ces surfaces,

$$\text{(11)} \qquad H = \rho i\left(u \sin\varphi - v \cos\varphi - \frac{w K_0}{\rho_0}\right).$$

Pour achever ce qui est relatif à ce cas, il faut voir ce que donne la solution négligée précédemment

$$\text{(12)} \qquad u^2 + v^2 = 0.$$

Soit

$$v = ui\varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

les deux équations (9) se réduisent à une seule, c'est ce qu'exprime la condition même de compatibilité.

En écartant le cas de $u = 0$ qui, en vertu de $v^2 + u^2 = 0$, donnerait $u = v = 0$, la première entraîne la relation

$$\text{(13)} \qquad \gamma\rho = -K_0\rho w i + \rho'\varepsilon(\rho^2 + K_0^2);$$

α et β ayant les mêmes valeurs que précédemment, les termes du deuxième degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ se réduisent dans le premier membre de l'équation (6) comme dans les calculs en question. Le terme indépendant obtenu après ces réductions devra être identiquement nul. Il se réduit ici, en tenant compte de (12), à

$$w^2\rho^2 + \rho'^2(\rho^2 + K_0^2) - \gamma^2.$$

Substituons à γ, dans cette expression, sa valeur tirée de l'équation (13) et écrivons que le résultat s'annule ; on trouve, après quelques réductions, la relation

$$w^2\rho^2(\rho^2 + K_0^2) - (\rho^2 + K_0^2)\rho'^2 K_0^2 + 2K_0 w\rho\rho' i\varepsilon(\rho^2 + K_0^2) = 0$$

ou

$$(w\rho + i\varepsilon K_0\rho')^2 = 0,$$

condition qui nous donne simplement

$$\text{(14)} \qquad W = -\frac{K_0\rho'}{\rho} i\varepsilon.$$

En introduisant cette dernière condition, on trouve finalement que H se réduit à l'expression rationnelle en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$

$$\text{(15)} \qquad H = \rho i(u \sin\varphi - v \cos\varphi - \rho' i).$$

Le groupe de surfaces, solutions de la question, ainsi défini est formé de surfaces engendrées par une hélice imaginaire à plan conducteur à pas constant, dont l'axe décrit un plan isotrope et dont le mouvement de translation du trièdre fondamental est défini par la relation complémentaire

$$w = -\frac{K_0 \rho'}{\rho} \varepsilon i.$$

Troisième cas. — On prend $\alpha = \rho v$, $\beta = \rho u$.

Une suite de calculs complètement analogues aux précédents et que nous nous dispenserons de reproduire conduit au résultat suivant : les surfaces cherchées sont définies par les relations

$$(16) \qquad w = 0, \qquad u^2 + v^2 = \frac{\rho'^2}{\rho^2}(\rho^2 + K_0^2).$$

Ce sont des surfaces Φ. L'expression de H correspondante est la suivante :

$$(17) \qquad H = \rho\left[u \cos\varphi + v \sin\varphi + \frac{\rho'}{\rho^2}(\rho^2 + K_0^2)\right].$$

On peut supposer $\rho' \neq 0$, sans quoi on aurait $u^2 + v^2 = 0$ et l'on serait dans un cas de l'étude précédente. On peut alors prendre ρ comme variable indépendante et si ds est l'élément d'arc de la section droite du cylindre engendré par l'axe de l'hélice, la seconde relation (16) donne

$$\frac{ds^2}{d\rho^2} = \frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2}$$

ou, en choisissant convenablement la série des arcs et leur origine,

$$(18) \qquad \frac{ds}{d\rho} = \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}$$

et

$$s = (\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{K_0}{2} \log \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} - K_0}{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} + K_0}.$$

Donc :

Théorème I. — *Les seules surfaces pour lesquelles* H *soit le carré d'une fonction rationnelle de* φ, $\sin\varphi$ *et* $\cos\varphi$ *sont :*

1° *Les hélicoïdes et le cylindre (considéré comme engendré par une hélice à pas variable ou constant)* ;

2° *Les surfaces* Φ *dont l'arc de la section droite du cylindre des axes des génératrices est donné par la formule*

$$s = \int \frac{\sqrt{\varphi^2 + K\rho^2}}{\rho}\, d\rho;$$

3° *Deux séries de surfaces imaginaires, dont l'une formée par des surfaces de translation.*

3. Problème. — *On demande de trouver les surfaces pour lesquelles la famille de courbes faisant avec chaque génératrice un angle* $\omega = f(t)$ *constant le long de chacune d'elles, mais pouvant varier avec celle-ci soit une famille de géodésiques.*

Je laisserai de côté le cas des cylindres où la solution se ramène à un problème de géométrie plane et qui répondent à la question.

L'équation générale des géodésiques donne ici la condition

$$(19) \qquad \cos f(t)\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - KK' - \rho\rho'\right) + \sin f(t)\left[\frac{\partial H}{\partial \varphi} + G f'(t)\right] = 0;$$

si l'on observe que F est rationnelle en φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et que l'équation (19) montre qu'il en est de même de $\frac{\partial H}{\partial \varphi}$, on conclut, en vertu de l'égalité

$$(20) \qquad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{1}{2H}\,\frac{\partial (H^2)}{\partial \varphi},$$

que H est rationnelle en φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, H^2 ayant évidemment cette propriété. Dès lors, le cylindre étant laissé de côté, on a

$$p = q = r = K' = 0.$$

L'équation (19) à vérifier identiquement se réduit à la suivante :

$$(21) \quad \rho\cos f(t)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho') = \sin f(t)\left[\frac{\partial H}{\partial \varphi} + (\rho^2 + K_0^2) f'(t)\right]$$

Ceci posé, passons successivement en revue les diverses surfaces pour lesquelles H est rationnelle et cherchons si quelques-unes d'entre elles répondent bien à la question actuelle.

1° Hélicoïdes: $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$, $u = v = 0$. Elles répondent à la question et l'angle $\omega = f(t)$ vérifie la relation

$$(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos\omega = \text{const.}, \tag{22}$$

qui est une généralisation de la formule de Clairaut relative aux surfaces de révolution :

Si l'on veut résoudre le problème particulier des trajectoires d'angle $\omega = \omega_0$, on voit que *la relation* (23) *ne peut être vérifiée par* ω *constant que si* $\cos\omega$ *est nul, c'est-à-dire si* $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. *Autrement dit si la trajectoire est orthogonale.*

2° Surfaces Φ définies par la relation

$$u^2 + v^2 = \frac{\rho'^2}{\rho^2}(\rho^2 + K_0^2).$$

L'équation de condition (21) donne ici

$$\begin{aligned} (23) \quad & -\rho \cos f(t)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho') \\ & + \sin f(t)[-\rho u \sin\varphi + \varphi v \cos\varphi + (\rho^2 + K_0^2) f'(t)] = 0; \end{aligned}$$

d'où, en égalant à zéro les coefficients de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$,

$$(23\ bis) \qquad \rho u \cos f - \rho v \sin f = 0, \qquad \rho u \sin f + \rho v \cos f = 0,$$

conditions qui entraînent $u = v = \rho' = 0$. Comme $w = 0$ on trouve une hélice fixe [1].

3° Surfaces imaginaires caractérisées par $u^2 + v^2 + w^2 = \rho' = 0$. On a, dans ce cas, pour déterminer l'angle f la relation

$$\cos f(t) = i \sin f(t),$$

relation incompatible avec la relation fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$, vérifiée identiquement pour toute direction non isotrope du plan tangent. Nous rejetterons cette solution. L'autre série de surfaces imaginaires conduit à la même détermination de f, et nous la rejetterons. Nous pouvons donc énoncer les trois propositions suivantes :

Théorème II. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces dont*

---

(1) On laisse de côté le cas où le déterminant $\sin^2 f + \cos^2 f$ serait nul au lieu d'être égal à 1, ce qui ne peut arriver que pour une direction isotrope.

les trajectoires orthogonales des génératrices sont des géodésiques (le cylindre droit rentre complètement dans cette série (¹).

THÉORÈME III. — *Le cylindre de révolution est la seule surface dont les trajectoires non orthogonales des hélices génératrices soient des géodésiques.*

THÉORÈME IV. — *Les hélicoïdes (et le cylindre considéré comme engendré par une hélice à pas variable) sont les seules surfaces telles que la famille des courbes faisant avec chaque génératrice un même angle variable avec celle-ci soit constituées de géodésiques de la surface.*

La relation qui donne cet angle i dans les hélicoïdes est

$$(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos i = \text{const.}$$

4. THÉORÈME V. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces dont les génératrices hélices circulaires soient des cercles géodésiques* (²).

Première démonstration. — Il résulte de la formule générale démontrée au Chapitre I que la courbure géodésique ρ_g d'une génératrice est donnée par la relation

$$\frac{H\sqrt{G}}{\rho_g} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \rho\rho' - KK'. \tag{24}$$

Pour satisfaire au problème, il faut donc et il suffit qu'on puisse trouver une fonction $f(t) = \rho_g$ vérifiant la relation fonctionnelle

$$\frac{H\sqrt{G}}{f(t)} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \rho\rho' - KK'. \tag{24 bis}$$

(¹) On pouvait prévoir que les hélicoïdes étaient les seules surfaces dont les trajectoires orthogonales des génératrices étaient géodésiques en remarquant que pour ces seules surfaces la ligne de striction de seconde espèce était indéterminée.

(²) En faisant abstraction des surfaces à plan directeur et pas constant définies par la relation $u^2 + v^2 \equiv 0$ dont il a été question au théorème I.

Il résulte de là que H doit être une fonction rationnelle de φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Si on laisse de côté les cylindres pour lesquels la courbe en question est une géodésique, nous aurons à examiner les seuls cas possibles suivants :

1° La surface est un hélicoïde : la surface satisfait à la question.

2° Le groupe des surfaces Φ satisfaisant aux conditions du problème I. La formule générale (24) devient ici

$$\frac{1}{\rho_g} = -\left(\frac{u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho'}{u\cos\varphi + v\sin\varphi + \rho'\dfrac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2}}\right)\frac{1}{\rho^2 + K_0^2}. \tag{25}$$

Nous avons vu précédemment qu'il n'y avait pas lieu, pour ces surfaces, de supposer $\rho' = 0$. Dès lors, $\frac{1}{\rho_g}$ ne pourra se réduire à une fonction de t que si l'on a

$$\frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2} = 1,$$

c'est-à-dire si K_0 est nul, ce que nous éloignons (d'ailleurs, dans ce cas, on serait conduit aux enveloppes de sphères);

3° Les surfaces imaginaires pour lesquelles H est rationnelle en φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$: on est conduit à la famille définie par $u^2 + v^2 = 0$.

5. Théorème VI. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces* [1] *dont l'hélice circulaire génératrice soit une courbe à torsion géodésique constante.*

La fonction $\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds}$ devant être constante le long d'une génératrice et comme celle-ci est à torsion constante, $\frac{d\varpi}{ds}$, et par suite $\frac{d\varpi}{d\varphi}$, doit être invariable le long d'une hélice génératrice. Ceci revient à écrire que la dérivée partielle $\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}$ est une fonction de t.

---

[1] Abstraction faite des surfaces à génératrices imaginaires dont il a été question au n° 4.

Or, on a [Chap. I, formule (22)]

$$(26) \qquad \varpi = \text{arc tang}(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} \frac{M}{KL - \rho N},$$

d'où

$$(27) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} = (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(KL - \rho N)\frac{\partial M}{\partial \varphi} - M\frac{\partial}{\partial \varphi}(KL - \rho N)}{(KL - \rho N)^2 + (\rho^2 + K^2)M^2} \right].$$

Nous devrons donc exprimer simplement que le crochet figurant dans le deuxième membre de l'égalité précédente se réduit à une fonction de $t : f(t)$ ou, enfin, qu'il existe l'identité

$$(28) \qquad \begin{aligned} &(KL - \rho N)\frac{\partial M}{\partial \varphi} - M\frac{\partial}{\partial \varphi}(KL - \rho N) \\ &\quad - f(t)[(KL - \rho N)^2 + (\rho^2 + K^2)M^2] = 0. \end{aligned}$$

entre les variables indépendantes t et φ.

Le premier membre de l'identité (28) est un polynome en φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ du deuxième degré en φ, dans lequel le coefficient de φ^2 est le polynome du second degré en $\sin\varphi$ et en φ

$$(29) \qquad \begin{aligned} &K^3(p^2 + q^2) + KK'\rho(p\cos\varphi + q\sin\varphi) \\ &\quad - f(t)[K^2\rho^2(q\cos\varphi - p\sin\varphi)^2 \\ &\qquad + 2K^2K'\rho(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + K^4(p^2 + q^2) + K'^2\rho^2]. \end{aligned}$$

Les termes du second degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ se réduisent, au signe près, à

$$f K^2\rho^2(q\sin\varphi - p\cos\varphi)^2.$$

L'expression (29) devant être identiquement nulle, il doit en être de même de ce carré, ce qui exige : soit

$$f = 0,$$

soit

$$p = q = 0.$$

L'hypothèse $f = 0$ conduit d'ailleurs encore à $p = q = 0$. Mais on peut remarquer que si f est nul, il en est de même du numérateur de $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$, et, par suite, en général de $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$. On est ainsi conduit à écrire que ϖ est constant le long de la génératrice : on trouve alors (*voir* théorème VI, Chap. I) les hélicoïdes et certaines surfaces à génératrices imaginaires. Or, il se trouve pour celles-ci que le numérateur et le dénominateur de $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ sont identiquement nuls : on peut d'ailleurs vérifier que c'est le seul cas présentant cette exception. Le calcul de $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ est en défaut : on voit directement que, dans cette hypothèse, ϖ est encore constant le long d'une génératrice : ϖ est en effet donné alors par la formule

$$\operatorname{tang} \varpi = \frac{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}}{K} i.$$

Ces surfaces peuvent être considérées comme satisfaisant à la question.

Reste l'hypothèse $p = q = 0$. L'expression (29) se réduit à

$$-f(t) K'^2 \rho^2.$$

On doit donc avoir $K' = 0$, si on laisse de côté le cas où f est nul, traité ci-dessus. L'expression figurant dans le premier membre de l'identité (28) se réduit alors à un polynome du deuxième degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, dont les termes du second degré forment un carré parfait en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$:

$$-f(t)(u \cos \varphi + v \sin \varphi)^2.$$

La réalisation de la relation (28) exige la disparition d'un pareil terme, c'est-à-dire en laissant de côté le cas où $f(t)$ serait nul,

$$u = v = 0.$$

Cette dernière hypothèse conduit aux hélicoïdes ; ces surfaces satisfont bien à la question et il se trouve de plus que l'on a encore la relation

$$f(t) = 0.$$

6. Théorème VII. — *Il n'y a pas de surface dont les lignes de courbure d'un système soient des hélices circulaires.*

En effet, on doit avoir dans ce cas, le long d'une de ces hélices,

$$\frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} = 0, \tag{30}$$

et l'on vient de voir que ceci exige que $\frac{d\varpi}{ds}$ soit nul. Donc

$$\frac{1}{T}$$

doit être nul.

L'hélice doit se réduire à un cercle.

On remarquera qu'on ne trouve pas l'hélicoïde imaginaire à ds^2 carré parfait, comme cela arriverait en recherchant directement les surfaces ayant pour lignes de courbure une famille d'hélices circulaires en partant de l'équation (48) (Chap. I). Cela tient à ce qu'en toute rigueur les deux définitions des lignes de courbure, comme d'ailleurs les diverses propriétés de courbure des surfaces, sont en défaut pour les surfaces de ce genre.

7. Problème. — *Déterminer les surfaces dont une famille d'asymptotiques soit formée par les trajectoires orthogonales des hélices génératrices.*

A. Je dis que la surface, si elle existe [1], est à plan directeur et à pas constant. La relation caractéristique des asymptotiques est

$$(31) \qquad \delta A\, \delta x + \delta B\, \delta y + \delta C\, \delta z = 0.$$

Les trajectoires orthogonales des génératrices sont données par la relation différentielle

$$(32) \qquad (\rho^2 + K^2)\, d\varphi + (L\rho + KN)\, dt = 0.$$

Pour exprimer qu'une trajectoire orthogonale des génératrices est une asymptotique, nous devrons donc écrire que la relation (31) est vérifiée quand on y remplace dt et $d\varphi$ par les quantités proportionnelles

$$(\rho^2 + K^2) \qquad \text{et} \qquad -(L\rho + KN),$$

et cela pour un point quelconque de la trajectoire considérée, c'est-à-dire pour tout système de valeurs t, φ correspondant à un point d'une asymptotique trajectoire orthogonale. Si une famille

[1] L'existence d'une solution au moins, celle que nous démontrons être la seule, peut être prévu *a priori*.

d'asymptotiques se trouve formée de trajectoires orthogonales, la relation obtenue devra être une identité entre les variables indépendantes t et φ.

Ceci posé, désignons par $P\delta x$, $P\delta y$, ..., $P\delta C$ des quantités proportionnelles à δx, ..., δC obtenues en remplaçant dt et $d\varphi$ comme il a été dit. On aura

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
P\,\delta x &= \quad(\rho^2+K^2)(M\cos\varphi - L\sin\varphi) + \rho\sin\varphi(L\rho + KN),\\
P\,\delta y &= \quad(\rho^2+K^2)(M\sin\varphi + L\cos\varphi) - \rho\cos\varphi(L\rho + KN),\\
P\,\delta z &= -\rho(KL - N\rho),\\
P\,\delta A &= -\frac{\partial A}{\partial\varphi}(L\rho + KN) + (\rho^2+K^2)\left(\frac{\partial A}{\partial t} + qC - rB\right),\\
P\,\delta B &= -\frac{\partial B}{\partial\varphi}(L\rho + KN) + (\rho^2+K^2)\left(\frac{\partial B}{\partial t} + rA - pC\right),\\
P\,\delta C &= -\frac{\partial C}{\partial\varphi}(L\rho + KN) + (\rho^2+K^2)\left(\frac{\partial C}{\partial t} + pB - qA\right).
\end{aligned}\right.$$

Ce sont des polynomes en φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ du premier degré en φ. Le premier membre de l'équation (31), après remplacement de δx, ..., δC par $P\delta x$, ..., se présente sous forme d'un polynome en φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ du deuxième degré en φ et qui doit être identiquement nul. Considérons le terme en φ^2. Son coefficient est un polynome en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ qui se présente comme devant être du quatrième degré. On trouve pour ses termes du quatrième degré, par des calculs assez longs, en remplaçant L, M, N, ..., $\frac{\partial C}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial C}{\partial t}$ par leurs valeurs, l'expression

$$K^2\rho^4K'(p\cos\varphi + q\sin\varphi)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

qui se réduit d'elle-même au second degré.

Nous sommes amenés à chercher les termes du troisième degré du coefficient étudié. Le principe du calcul est tout à fait élémentaire; sa longueur seule en fait la difficulté. Si l'on pose

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
a &= \rho KK'^2 + (\rho^2+K^2)\rho(pKq - rK'),\\
a_1 &= (\rho^2+K^2)\,[(K'\rho)' - q^2K\rho],\\
b &= (\rho^2+K^2)\,[(K'\rho)' - p^2K\rho],\\
b_1 &= [-\rho KK'^2 + \rho(\rho^2+K^2)(pqK + rK')],
\end{aligned}\right.$$

on trouve pour terme du troisième degré du coefficient considéré

$$(35)\qquad (p\cos\varphi + q\sin\varphi)[\rho^3 K^4 (p\cos\varphi + q\sin\varphi)^2 - K\rho^2 \sin\varphi(a\sin\varphi + a_1\cos\varphi) + K^2\rho\cos\varphi(b\sin\varphi + b_1\cos\varphi)].$$

Pour que le coefficient considéré soit identiquement nul, il faut que ses termes du plus haut degré soient divisibles par

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

(*voir* la note qui termine le Chapitre). On peut laisser de côté le cas où $p\cos\varphi + q\sin\varphi$ se réduit à un facteur près non nul à $\cos\varphi \pm i\sin\varphi$, car alors $p^2 + q^2$ est nul sans que p et q le soient ensemble; cela étant, on devra écrire que $\sin^2 + \cos^2$ ne diffère du polynome entre crochets dans (35) que par un facteur indépendant de φ; d'où les deux conditions

$$\rho^3 K^4 p^2 + K\rho^2 b_1 = \rho^3 K^4 q^2 - K\rho^2 a,$$

ou

$$(36)\qquad a + b_1 = \rho K^3 (q^2 - p^2)$$

et

$$-aK\rho^2 + bK\rho^2 + 2K^4\rho^3 pq = 0,$$

ou

$$(37)\qquad a_1 - b = 2\rho K^3 pq,$$

et, d'autre part, on a

$$(38)\qquad \begin{cases} a + b_1 = 2\rho K pq(\rho^2 + K^2), \\ a_1 - b = -(\rho^2 + K^2)K\rho(q^2 - p^2). \end{cases}$$

La comparaison des expressions de $a + b_1$ et de $a_1 - b$ donne les relations suivantes entre p et q :

$$(39)\qquad (\rho^2 + K^2)(q^2 - p^2) + 2K^2 pq = 0,$$

$$(40)\qquad -K^2(q^2 - p^2) + 2(\rho^2 + K^2)pq = 0,$$

qui entraînent

$$pq = 0, \qquad q^2 - p^2 = 0,$$

et, par suite,

$$p = q = 0.$$

Il ne peut y avoir exception que si le déterminant des équations (39) et (40) entre pq et $q^2 - p^2$ était identiquement nul, c'est-à-dire si l'on avait

$$(41) \qquad (\rho^2 + K^2)^2 + K^4 = 0$$

ou

$$K^2 = \frac{-\rho^2}{1 \mp i}.$$

Pour une telle valeur de K^2, les équations (39) et (40) se réduisent à une seule

$$(q \mp pi)^2 = 0.$$

On se trouve dans le cas écarté.

Nous pouvons donc supposer $p = q = 0$ et introduire $r = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
P\,\delta x &= KK'\rho\,\varphi \sin\varphi + (P\,\delta x)_T, \\
P\,\delta y &= -KK'\rho\,\varphi\cos\varphi + (P\,\delta y)_T, \\
P\,\delta z &= K'\rho^2\varphi + (P\,\delta z)_T, \\
P\,\delta A &= [+\rho KK'^2 \sin\varphi + (\rho^2 + K^2)(K'\rho)'\cos\varphi] + (P\,\delta A)_T, \\
P\,\delta B &= [-\rho KK'^2\cos\varphi + (\rho^2 + K^2)(K'\rho)'\sin\varphi] + (P\,\delta B)_T, \\
P\,\delta C &= (P\,\delta C)_T.
\end{aligned}$$

Le coefficient de φ^2 dans

$$\delta A\,\delta x + \delta B\,\delta y + \delta C\,\delta z$$

se réduit alors au monome

$$K^2 K'^3 \rho^2.$$

Il doit être nul; donc

$$K' = 0 \qquad \text{ou} \qquad K = K_0,$$

résultat qui achève de justifier la proposition annoncée.

B. Je dis que la surface ne peut être qu'un hélicoïde. Formons $\Sigma P\delta x P\delta A$ en tenant compte des relations

$$p = q = r = K' = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (31) ne contient que des lignes trigonométriques. On a

$$
(42)\quad \left\{\begin{aligned}
P\,\delta x &= (u+\rho'\cos\varphi)(\rho^2+K_0^2)\\
&\quad+\rho\sin\varphi[K_0 w-\rho(u\sin\varphi-v\cos\varphi)],\\
P\,\delta y &= (v+\rho'\sin\varphi)(\rho^2+K_0^2)\\
&\quad-\rho\cos\varphi[K_0 w-\rho(u\sin\varphi-v\cos\varphi)],\\
P\,\delta z &= \rho^2 w+\rho K(u\sin\varphi-v\cos\varphi),\\
P\,\delta A &= (\rho w\sin\varphi+K_0\rho'\cos\varphi)[K_0 w-\rho(u\sin\varphi-v\cos\varphi)]\\
&\quad+(\rho^2+K_0^2)[(\rho w)'\cos\varphi-K_0\rho''\sin\varphi+K_0 v'],\\
P\,\delta B &= -(\rho w\cos\varphi-K_0\rho'\sin\varphi)[K_0 w-\rho(u\sin\varphi-v\cos\varphi)]\\
&\quad+(\rho^2+K_0^2)[(\rho w)'\sin\varphi+K_0\rho''\cos\varphi+K_0 u'],\\
P\,\delta C &= \rho(-u\sin\varphi+v\cos\varphi)[K_0 w-\rho(u\sin\varphi-v\cos\varphi)]\\
&\quad-(\rho^2+K_0^2)[(\rho u)'\cos\varphi+(\rho v)'\sin\varphi+(\rho\rho')'].
\end{aligned}\right.
$$

La somme $\Sigma P\,\delta x\, P\,\delta A$ se présente sous forme d'un polynome du quatrième degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. Or, en effectuant, on trouve pour les termes du quatrième degré

$$
\begin{aligned}
&\rho^3\sin\varphi(u\sin\varphi-v\cos\varphi)^2(\rho w+K'\rho\cos\varphi)\\
&\quad+\rho^3\cos\varphi(u\sin\varphi-v\cos\varphi)^2(\rho w\cos\varphi-K'\rho\sin\varphi),
\end{aligned}
$$

expression qui se réduit simplement à

$$\rho^4 w(u\sin\varphi-v\cos\varphi)^2.$$

On ferait de même l'étude des termes du troisième degré et l'on trouverait finalement

$$\Sigma P\,\delta x\, P\,\delta A = K_0\rho^3(u\sin\varphi-v\cos\varphi)^3+P_2,$$

P_2 désignant un polynome du second degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Une pareille identité exige

$$u=v=0.$$

Ces conditions, jointes à celles déjà trouvées, définissent un hélicoïde.

C. Dans un hélicoïde, les trajectoires orthogonales des hélices génératrices sont des géodésiques. Devant être des asymptotiques, ce sont nécessairement des droites. La surface sera donc un hélicoïde réglé engendré par une normale à une hélice. D'ailleurs, d'une façon générale, les trajectoires orthogonales des hélices sont des courbes indéformables liées invariablement au trièdre principal de l'hélice directrice. Donc :

La surface cherchée sera l'hélicoïde réglé engendré par une normale à une hélice circulaire liée invariablement au trièdre principal de cette courbe. L'inverse est évidemment vrai. Donc :

Théorème VIII. — *Les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire, trajectoire orthogonale, d'une famille d'asymptotiques de la surface sont les hélicoïdes réglés engendrés par une normale à une hélice circulaire liée invariablement au trièdre principal de cette hélice.*

Remarque. — Ces normales enveloppent un cylindre circulaire ayant pour axe celui de l'hélice directrice. Le point de contact du cylindre et de la normale décrit une hélice de ce cylindre. Cette hélice est normale à la génératrice rectiligne de l'hélicoïde considéré, car elle intercepte un segment constant à partir de la directrice qui est elle-même trajectoire orthogonale de la génératrice rectiligne. Celle-ci n'est autre que la binormale à l'hélice, lieu des points de contact. Inversement, on voit immédiatement que le lieu des binormales à une hélice répond à la question. On peut donc donner au théorème VIII la forme suivante :

Les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire dont les trajectoires orthogonales soient asymptotiques de la surface sont les hélicoïdes réglés, lieu des binormales à une hélice circulaire. Comme cas limite on trouve l'hélicoïde gauche à plan directeur pour lequel la seconde famille d'asymptotiques est formée précisément par les hélices circulaires coaxiales de la surface.

Note. — *Conditions pour que le polynome*

$$\begin{aligned}A \sin^3\varphi + B\cos^3\varphi + a\sin^2\varphi\cos\varphi + b\sin\varphi\cos^2\varphi \\ + a_1\sin^2\varphi + 2b_1\sin\varphi\cos\varphi + c_1\cos^2\varphi + a_2\sin\varphi + b_2\cos\varphi + d\end{aligned}$$

soit identiquement nul.

En exprimant que ce polynome est nul pour

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \ldots,$$

on trouve les conditions

$$a = B, \quad b = A, \quad a_1 = -A, \quad b_2 = -B, \quad a_1 = c_1 = -d, \quad b_1 = 0,$$

et l'on s'assure qu'elles sont suffisantes.

On remarquera que cette condition impose aux termes du troisième degré d'être de la forme (λ et μ désignent des constantes) (¹)

$$(\lambda \sin\varphi + \mu \cos\varphi)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

condition qu'on pourrait trouver *a priori* et étendre à un degré quelconque.

De cette dernière remarque résulte la propriété suivante utilisée plus haut :

Si le polynome est de la forme

$$(a \sin\varphi + b \cos\varphi)^3 + P_2(\sin\varphi \cos\varphi),$$

a, b désignant deux constantes et P_2 un polynome en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ du deuxième degré au plus, on doit avoir

$$a = b = 0.$$

On étendrait aisément ce résultat aux polynomes de degré supérieur; cette remarque sera utilisée dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

ÉQUATION AUX RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX. SURFACES DONT LES HÉLICES GÉNÉRATRICES FORMENT UNE FAMILLE DE LIGNES A COURBURE TOTALE OU MOYENNE CONSTANTE.

1. Équation aux rayons de courbure principaux. — Posons

$$(1) \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial t} + qC - rB & \dfrac{\partial A}{\partial \varphi} & A \end{vmatrix},$$

$$(2) \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} + u + qz - ry & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & A \end{vmatrix},$$

$$(3) \qquad \delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial t} + qC - rB & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & A \end{vmatrix},$$

$$(4) \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} + u + qz - ry & \dfrac{\partial A}{\partial \varphi} & A \end{vmatrix},$$

(¹) Ou des fonctions d'une variable indépendante autre que φ; c'est ce cas que nous avons constamment rencontré dans ce Chapitre.

Même remarque pour les A, B, ..., d.

formules dans lesquelles les termes entre barres verticales sont les termes de la première ligne d'un déterminant que nous avons représenté par cette notation réduite et dont la forme des autres lignes est évidente par symétrie. On a facilement

$$\Delta_2 = - H^2. \tag{5}$$

Cela posé, on démontre [1] les formules (R', R'', rayons de courbure principaux)

$$\frac{1}{R'R''} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2 H^2} = -\frac{\Delta_1}{H^4}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{H\Delta_2} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{H^3}, \tag{7}$$

$$R' + R'' = - H\frac{\delta_1 + \delta_2}{\Delta_1}. \tag{8}$$

Ces formules permettent d'écrire immédiatement l'équation qui donne R' et R''. Cette écriture est sans utilité.

PROBLÈME I. — *Déterminer les surfaces telles que sur chaque hélice génératrice la courbure totale de la surface conserve une valeur constante, valeur qui peut d'ailleurs différer d'une génératrice à une autre.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une fonction de la seule variable t réalisant l'identité

$$\frac{1}{R'R''} = f(t), \tag{9}$$

ou, en vertu de la formule (6),

$$\Delta_1 - H^4 f(t) = 0. \tag{10}$$

Or Δ_1 ne contient pas de terme en φ de degré supérieur à 3.

Le terme en φ^2, qui figure dans H^2 doit donc être identiquement nul, ce qui exige [en laissant de côté le cas des développables pour lesquelles $f(t)$ est identiquement nulle]

$$p = q = K' = 0. \tag{10 bis}$$

---

[1] *Cf.* notre Mémoire *Applications*, etc..., première Partie, n° 12.

Mais alors, le premier membre de l'identité (10) ne contient plus que les lignes $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, et prend la forme

$$(11)\quad \rho^4 f(t)(u\cos\varphi + v\sin\varphi)^4 + \text{termes de degré inférieur à } 4 = 0,$$

ce qui exige, le cas des développables étant écarté, $u = v = 0$.

La surface ainsi définie est un hélicoïde.

L'inverse étant évidemment vrai, nous pouvons énoncer les deux théorèmes suivants, dont le deuxième est un corollaire immédiat du premier :

Théorème I. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces engendrées par des hélices circulaires formant une famille de courbes telles que, sur chacune d'elles, la courbure totale de la surface reste constante, cette valeur constante pouvant d'ailleurs différer d'une génératrice à l'autre.*

Théorème II. — *Les hélicoïdes à courbure totale constante non nulle sont, parmi les surfaces engendrées par une hélice circulaire, les seules qui soient applicables sur la sphère ou sur la pseudo-sphère.*

L'analyse précédente laisse de côté le cas des développables au sujet duquel on a le théorème suivant :

Théorème III. — *Les seules surfaces développables engendrées par une hélice circulaire sont :*

1° *Les hélicoïdes développables ;*

2° *Les cônes ou les cylindres ayant pour directrice une hélice circulaire.*

La condition caractéristique de ces surfaces est l'identité

$$\Delta_1 = 0.$$

Posons

$$(12)\quad \alpha = \frac{\partial A}{\partial t} + qC - rB, \quad \beta = \frac{\partial B}{\partial t} + rA - pC, \quad \gamma = \frac{\partial C}{\partial t} + pB - qA;$$

on peut écrire

$$
(13)\quad K\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \dfrac{\partial A}{\partial \varphi} & A \\ \beta & \dfrac{\partial B}{\partial \varphi} & B \\ K\gamma + \rho(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi) & K\dfrac{\partial C}{\partial \varphi} + \rho\left(\dfrac{\partial B}{\partial \varphi}\cos\varphi - \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) & KC + \rho(B\cos\varphi - A\sin\varphi) \end{vmatrix}
$$

$$
\times \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},
$$

ou encore

$$
(13\ bis)\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi & \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}\cos\varphi + \dfrac{\partial B}{\partial \varphi}\sin\varphi & A\cos\varphi + B\sin\varphi \\ -\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi & \dfrac{\partial B}{\partial \varphi}\cos\varphi - \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}\sin\varphi & B\cos\varphi - A\sin\varphi \\ K\gamma + \rho(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi) & K\dfrac{\partial C}{\partial \varphi} + \rho\left(\dfrac{\partial B}{\partial \varphi}\cos\varphi - \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) & KC + \rho(B\cos\varphi - A\sin\varphi) \end{vmatrix} \times \frac{1}{K}.
$$

En remplaçant A, B, ... par leurs valeurs, il vient enfin

$$
(14)\quad \Delta_1 = \frac{1}{K} \times \begin{vmatrix} \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi & (\rho^2 + K^2)(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + \rho K' - \rho' K & -(KL - N\rho) \\ -\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi & \rho K'\varphi + (\rho^2 - K^2)(p\sin\varphi - q\cos\varphi) + \rho w - r\rho K & KM \\ K\gamma + (\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)\rho & -\rho(KL - N\rho) & 0 \end{vmatrix},
$$

qu'on peut écrire

$$
(14\ bis)\qquad K\Delta_1 = \zeta_0\varphi^3 + \zeta_1\varphi^2 + \zeta_2\varphi + \zeta_3,
$$

où les ζ sont des polynomes en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

K n'étant pas supposé identiquement nul, l'identité $\Delta_1 = 0$ équivaut aux quatre suivantes :

$$
\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.
$$

Un calcul un peu long donne sans aucune difficulté

$$\zeta_1 = \rho^4 K^3 [pq \sin^2\varphi + (p^2 - q^2) \sin\varphi \cos\rho - pq \cos^2\varphi]^2 + P_3,$$

en désignant par P_3 un polynome en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ de degré inférieur à 4.

Le terme du quatrième degré doit contenir en facteur

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

ou être identiquement nul. Les termes du quatrième degré sont, à un facteur près, le carré du polynome

$$pq \sin^2\varphi + (p^2 - q^2) \sin\varphi \cos\varphi - pq \cos^2\varphi.$$

La première hypothèse conduit aux conditions

$$pq = -pq, \qquad p^2 - q^2 = 0,$$

d'où

$$p = q = 0,$$

résultat auquel conduit aussi la seconde hypothèse.

Donc la surface cherchée doit être à plan directeur d'hélice.

Soient alors

$$(15) \qquad \begin{cases} x = f_1(t) + \rho \cos\varphi, \\ y = f_2(t) + \rho \sin\varphi, \\ z = f_3(t) + K\varphi, \end{cases}$$

dans lesquelles ρ et K sont des fonctions de t les équations de la surface cherchée rapportée à des axes fixes évidents.

Nous formerons les déterminants D, D′, D″ de Gauss et nous écrirons que l'expression $D'^2 - DD''$ est identiquement nulle. Il y aura intérêt pour la simplicité des calculs à distinguer deux hypothèses :

I. ρ est constant : Je me dispenserai de développer les calculs dans ce cas. La méthode est analogue à celle employée ci-après lorsqu'on suppose ρ variable et d'application beaucoup plus simple. On obtient ainsi :

1° Le cylindre circulaire droit engendré par une hélice de pas fixe ou variable;

2° Un cylindre quelconque engendré par la translation rectiligne d'une hélice circulaire indéformable.

II. Supposons alors ρ variable : Nous pouvons le prendre comme variable indépendante. Les équations (15) deviennent

$$(16)\qquad x = f_1(\rho) + \rho\cos\varphi, \qquad y = f_2(\rho) + \rho\sin\varphi, \qquad z = f_3(\rho) + \rho K\varphi,$$

dans lesquelles K désigne une fonction de ρ.

Si K' n'est pas supposé nul, D, D' et D'' se présentent comme polynomes en φ, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ du premier degré en φ. On vérifie que D' ne contient pas de terme en φ.

Pour que l'identité

$$(17)\qquad D'^2 - DD'' = 0$$

puisse être satisfaite, il faut donc que le coefficient de φ dans D ou dans D'' soit identiquement nul. S'il en est ainsi, mais qu'il ne soit pas également nul dans le second des déterminants D et D'', il faut, pour que le terme en φ soit nul dans le premier membre de (17), que celui des deux déterminants D et D'' qui n'a pas de terme en φ soit identiquement nul. Mais alors D' doit être nul identiquement.

Une seconde hypothèse possible est celle où D et D'' sont tous deux dépourvus de terme en φ. Nous allons étudier successivement les deux hypothèses,

I. D' est identiquement nul ainsi que D ou D'' : D'une façon générale on a

$$D' = (K'\rho - K)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + 1) \qquad (u = f'_1,\ v = f'_2).$$

Pour qu'il soit identiquement nul, il faut et il suffit qu'on ait

$$(17\ bis)\qquad K'\rho - K = 0.$$

Le coefficient de φ dans D est $K'\rho^2$. Il ne peut être nul que si K' est nul. On ne peut donc, en raison de la relation (17 *bis*) (puisqu'on suppose que K n'est pas identiquement nul), avoir à la fois identiquement

$$D = D' = 0.$$

Voyons si l'on peut avoir $D' = D'' = 0$; l'équation (17 *bis*) donne

$$(18)\qquad K = a\rho \qquad (a,\ \text{const.})$$

et, d'autre part :

$$(19)\qquad D'' = \begin{vmatrix} u' & v' & w' \\ u+\cos\varphi & v+\sin\varphi & w+a\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & K \end{vmatrix}.$$

La disparition du terme en φ de ce déterminant exige $u' = v' = 0$, ou

$$(20)\qquad f_1(\rho) = \alpha_1\rho + \beta_1,\quad f_2(\rho) = \alpha_2\rho + \beta_2\quad (\alpha_1, \ldots, \beta_2, \text{const.})$$

et D'' se réduit alors au produit

$$w'\rho(u\cos\varphi + v\sin\varphi + 1)$$

qui ne peut s'annuler que si w' est nul, c'est-à-dire si

$$f_3(\rho) = \alpha_3\rho + \beta_3\qquad (\alpha_3, \beta_3, \text{const.}).$$

La surface obtenue est visiblement un cône de sommet $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Les équations peuvent se mettre sous la forme canonique (m et n désignent deux nouvelles constantes arbitraires)

$$(21)\qquad x = \rho(\cos\varphi + m),\qquad y = \rho(\sin\varphi + n),\qquad z = a\rho\varphi.$$

La base de ce cône dans un plan $z = \text{const.}$ est une spirale hyperbolique.

II. Reste à examiner le cas où D et D'' sont dépourvus de termes en φ. Cela exige, pour D,

$$K' = 0\qquad \text{ou}\qquad K = K_0.$$

Mais alors, D'' lui-même est dépourvu de terme en φ.

L'identité (17) devient

$$\begin{aligned}(22)\quad &\rho[K_0(v\cos\varphi - u\sin\varphi) - w\rho]\\ &\quad\times[u'(K_0 v + K_0\sin\varphi - w\rho\cos\varphi)\\ &\qquad - v'(K_0 u + K_0\cos\varphi + w\rho\sin\varphi) + w'\rho(u\cos\varphi + v\sin\varphi + 1)]\\ &\qquad\qquad + K_0^2(u\cos\varphi + v\sin\varphi + 1)^2 = 0.\end{aligned}$$

En égalant à zéro les termes en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, et $\sin\varphi\cos\varphi$, on obtient les trois égalités

$$\text{I.}\quad -w\rho^2(K_0 u' - w\rho v' + w' v\rho) - K_0^2(u'v - v'u)u\rho + 2K_0^2 v - K_0 u w'\rho^2 = 0,$$

$$\text{II.}\quad w\rho^2(K_0 v' + w\rho u' - w' u\rho) + K_0^2(u'v - v'u)v\rho + 2K_0^2 u + K_0 v w'\rho^2 = 0,$$

$$\text{III.}\quad K_0\rho(u'v + v'u) - w\rho^2(vv' - uu') + w'\rho^2(v^2 - u^2) + 2K_0^2 uv = 0.$$

En égalant entre eux et au terme indépendant changé de signe les coefficients de $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$, on obtient les deux relations

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} &-\rho(K_0 u' - w\rho v' + w' v\rho)K_0 u + K_0^2 v^2 \\ &= \rho(-w\rho u' - K_0 v' + w' u\rho)K_0 v + K_0^2 u^2 \\ &= -K_0^2 + w' w\rho^3 + w\rho^2 K_0(u'v - v'u). \end{aligned}$$

La première des deux équations (A) peut s'écrire

$$\text{(IV)}\quad K_0(v^2 - u^2) + K_0\rho(vv' - uu') + w\rho^2(u'v + v'u) - 2\rho^2 w' uv = 0.$$

Considérons les quatre équations différentielles (I), (II), (III), (IV); elles admettent la solution

$$u = v = 0.$$

Les développements qui vont suivre montreront que c'est la seule ; la dernière équation (A) donne alors

$$w' w\rho^3 = K_0^2.$$

Les conditions $u = v = 0$ jointes à celles trouvées antérieurement définissent un hélicoïde : la dernière ne doit donc pas différer de l'équation caractéristique des hélicoïdes développables; c'est bien ce que nous apprend le résultat déjà trouvé ailleurs (¹).

Tout revient donc à démontrer que le système (I) à (IV) admet comme seule solution

$$u = v = 0.$$

Prenons les inconnues auxiliaires U et V définies par les relations

$$(23)\qquad U = uv, \qquad V = v^2 - u^2.$$

Les équations (III) et (IV) prennent la forme suivante :

$$\text{(III }bis\text{)}\qquad K_0\rho U' - \frac{1}{2}w\rho^2 V' + \rho^2 w' V + 2K_0 U = 0,$$

$$\text{(IV }bis\text{)}\qquad w\rho^2 U' + \frac{1}{2}K_0\rho V' + K_0 V - 2\rho^2 w' U = 0.$$

Posons

$$(24)\quad a = \rho(K_0^2 + w^2\rho^2), \qquad b = K_0\rho(w + w'\rho), \qquad c = K_0^2 - \rho^3 w w'.$$

(¹) *Cf.* le n° 6 de notre Mémoire *Contribution à la théorie des hélices* (*Revue du Génie militaire*, 1910).

Des équations (III *bis*) et (IV *bis*), on tire le système suivant :

$$(25)\qquad a\mathrm{U}' + b\mathrm{V} + 2c\mathrm{U} = 0, \qquad \frac{a}{2}\mathrm{V}' + c\mathrm{V} - 2b\mathrm{U} = 0,$$

qui sera vérifié dans tous les cas par tout système de solution des équations (III *bis*) et (IV *bis*) et lui sera d'ailleurs équivalent lorsque a ne sera pas nul.

En multipliant la première équation (25) par $4\mathrm{U}$, la seconde par $2\mathrm{V}$ et ajoutant, on obtient, entre U et V, la nouvelle relation, conséquence du système des équations (III *bis*) et (IV *bis*),

$$(26)\qquad a(4\mathrm{UU}' + \mathrm{VV}') + 2c(4\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2) = 0 \quad (^1).$$

Multiplions l'équation (I) par $-v$, l'équation (II) par u, et ajoutons les résultats; nous obtenons l'équation

$$(\mathrm{I}\ bis)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{K}_0 w\rho^2 - \frac{1}{2} w^2\rho^3\mathrm{V}' + (ww'\rho^3 - 2\mathrm{K}_0^2)\mathrm{V} \\ &\quad + 2\mathrm{K}_0 w'\rho^2\mathrm{U} + 2\mathrm{K}_0^2\rho\mathrm{U}(u'v - v'u) = 0. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (I) par u, l'équation (II) par v et ajoutant, on obtient

$$(\mathrm{II}\ bis)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathrm{K}_0 w\rho^2\mathrm{V}' + w^2\rho^3\mathrm{U}' - 2\mathrm{U}(ww'\rho^3 - 2\mathrm{K}_0^2) \\ &\quad + \mathrm{K}_0 w'\rho^2\mathrm{V} + \mathrm{K}_0^2\rho\mathrm{V}(u'v - v'u) = 0. \end{aligned}$$

Les équations (I *bis*) et (II *bis*) seront toujours des conséquences des équations (I) et (II), ce qui suffira pour la suite, mais on remarquera en outre qu'elles leurs seront équivalentes dans tous les cas où $u^2 + v^2$ ne sera pas nul. L'élimination de $u'v - v'u$

---

(1) L'intégration de cette équation considérée comme définissant la fonction $4\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2$ est immédiate, mais est inutile pour l'objet que nous avons en vue. Si l'on remarque que $4\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2$ n'est autre que le carré de $u^2 + v^2$, l'équation (26) donne

$$(26\ bis)\qquad \mathrm{V}_1(a\mathrm{V}_1' + 2c\mathrm{V}_1) = 0,$$

en posant $\mathrm{V}_1 = u^2 + v^2$.

L'équation (26 *bis*) se décompose en deux équations distinctes dont la solution est évidente.

entre les équations (I *bis*) et (II *bis*) conduit à la relation suivante :

$$(27)\qquad \begin{aligned} &K_0 w\rho^2(U'V - V'U) - \frac{1}{2} w^2\rho^3(VV' + 4UU') \\ &\qquad + (ww'\rho^3 - 2K_0^2)(V^2 + 4U^2) = 0, \end{aligned}$$

à laquelle doivent satisfaire U et V.

Supposons maintenant $a \neq 0$, ce qui arrivera toujours, d'ailleurs, pour des génératrices réelles. On peut alors résoudre les équations (28) par rapport à U' et V' et l'équation (26) par rapport à $4UU' + VV'$; on obtient ainsi

$$(28)\qquad \left\{ \begin{aligned} &U' = -\frac{b}{a}V - 2\frac{c}{a}U, \qquad V' = -2\frac{c}{a}V + 4\frac{b}{a}U, \\ &\qquad VV' + 4UU' = -2\frac{c}{a}(4U^2 + V^2); \end{aligned} \right.$$

en portant ces valeurs dans l'équation (27), celle-ci devient

$$(28\ bis)\qquad (V^2 + 4U^2)\left[-K_0 w\rho^2\frac{b}{a} + ww'\rho^3 - 2K_0^2 + \frac{w^2\rho^3 c}{a}\right] = 0,$$

ou simplement, après remplacement de a, b, c par leurs valeurs

$$K_0(V^2 + 4U^2) = 0;$$

comme nous laissons de côté le cas des surfaces cerclées, cette relation exige

$$(29)\qquad V^2 + 4U^2 = 0,$$

et, si l'on s'en tient aux génératrices réelles,

$$U = V = 0,$$

et par suite

$$u = v = 0.$$

Il nous paraît intéressant, au point de vue analytique, d'achever complètement cette question, dans le cas où l'on admet la considération des génératrices imaginaires. Supposons d'abord encore $a \neq 0$.

L'équation (29) doit être satisfaite, ce qui exige qu'on ait

$$(30)\qquad u^2 + v^2 = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées,

$$v = ui. \tag{31}$$

Les équations (25) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} aiu' + (ci - b)u &= 0, \\ au' + (c + bi)u &= 0, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

après suppression de la solution $u = 0$, qui conduit encore à des hélicoïdes.

Si le déterminant des équations (32) linéaires et homogènes en u et u' n'est pas nul, on est encore conduit à cette solution.

Le déterminant en question ayant pour valeur

$$ab(1 + i)$$

ne pourra être nul que si b est nul, puisqu'on suppose a différent de zéro.

Supposons donc b nul, c'est-à-dire

$$w + w'\rho = 0; \tag{33}$$

on a, dans ce cas,

$$c = \frac{a}{\rho} \neq 0 \tag{34}$$

et l'une des deux équations (32) donne simplement

$$u' = -\frac{u}{\rho}. \tag{35}$$

Si, dans l'équation (I), on fait

$$v = ui, \qquad u' = -\frac{u}{\rho}, \qquad w'\rho = -w, \tag{36}$$

elle se réduit à la suivante

$$u(w\rho + K_0 i) = 0 \tag{37}$$

qui entraîne encore $u = 0$ et, par suite, $v = 0$, la parenthèse ne pouvant être nulle si a n'est pas nul.

Il ne nous reste plus qu'à examiner ce qui arrive si l'on suppose a nul. Dans ces conditions, $\frac{da}{d\rho}$ l'est également, c'est-à-dire que

$$w\rho' + w$$

est nul. Dans ce cas, b et c sont donc nuls. Les équations (25) disparaissent.

Supposons, pour fixer les idées,

$$\rho w = K_0 i. \tag{38}$$

En introduisant cette hypothèse dans les équations obtenues en égalant au dernier membre des équations (A) successivement chacun des deux premiers, on obtient les relations

$$\left\{\begin{aligned} u^2 - uvi - vv'\rho &= 2\rho u' vi, \\ v^2 - uvi - uu'\rho &= 2\rho v' ui. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

La même transformation, appliquée aux équations (I) et (II), conduit aux deux relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} -\rho u'i - \rho v' + v + ui &= \rho u(u'v - v'u), \\ -\rho v'i - \rho u' + u + vi &= -\rho v(u'v - v'u). \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Ces équations peuvent être considérées comme déterminant u' et v' en fonction de u et v. On obtient ainsi

$$u' = \frac{u}{\rho}, \qquad v' = \frac{v}{\rho}. \tag{41}$$

Ces calculs ne seraient en défaut que si le déterminant de u' et de v', dans les équations (40), est nul : ceci ne peut arriver que si u et v sont liés par la relation

$$u^2 + v^2 + 2uvi = 2. \tag{42}$$

Si on laisse de côté ce cas spécial, les équations obtenues en remplaçant, dans le système (39), u' et v' par leurs valeurs (41) exigent encore

$$u = v = 0.$$

La vérification de ce fait ne présente aucune difficulté.

Il ne reste donc plus qu'à examiner à quelles conclusions conduit l'hypothèse où u et v seraient liés par la relation (42), ρw étant, bien entendu, égal à $K_0 i$.

Ajoutons les équations (39) et différentions l'équation (42). On obtient ainsi les deux relations

$$(43)\qquad \begin{cases} u^2+v^2-2uvi = \rho(vv'+uu')+2\rho i(uv'+u'v), \\ uu'+vv'+i(uv'+u'v) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(44)\qquad u^2+v^2-2uvi = -\rho(uu'+vv'),$$

qui, en tenant compte de (42), devient

$$2(u^2+v^2-1)+\rho(uu'+vv') = 0,$$

d'où nous tirons

$$(45)\qquad u^2+v^2-1 = \frac{a_0}{\rho^4} \qquad (a_0,\ \text{const.})$$

et, en vertu de (42),

$$(46)\qquad 2uvi = 1-\frac{a_0}{\rho^4}.$$

Mais, dans le cas actuel, on obtient, en remplaçant, dans l'équa tion (III), w par sa valeur $\left(w = \frac{K_0 i}{\rho}\right)$,

$$(47)\qquad \rho^2(u'v+v'u)+2\rho uv - i[\rho^2(vv'-uu')+(v^2-u^2)\rho] = 0.$$

Cette relation s'intègre immédiatement; si b désigne une constante arbitraire; son intégrale générale sera

$$(48)\qquad \rho^2\left[uv-\frac{i}{2}(v^2-u^2)\right] = b_0.$$

On montre alors sans peine que les trois équations (45), (46) et (48), auxquelles doivent satisfaire u et v, ne sont compatibles pour aucune valeur des constantes a_0 et b_0. Par suite, la supposition dont nous sommes partis, à savoir que les variables u et v étaient liées par l'équation (42), est incompatible avec les conditions de notre problème et, dans tous les cas, que les génératrices soient réelles ou imaginaires, on est conduit à la conclusion

$$u = v = 0.$$

Problème II. — *Déterminer la surface engendrée par une hélice circulaire et dont la courbure moyenne ne varie que lorsqu'on passe d'une hélice génératrice à une autre.*

Si l'on se reporte à l'expression que nous avons donnée pour la courbure moyenne, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface étudiée jouisse de la propriété demandée est qu'il existe une fonction de t, $f(t)$, telle que l'on ait identiquement

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{H^3} = f(t). \tag{49}$$

Nous supposerons d'abord que $f(t)$ ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire que nous laisserons de côté, pour le moment, les surfaces minima.

L'égalité précédente exige que H soit rationnelle en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. La surface demandée ne peut donc être que l'une de celles définies dans le premier problème exposé au Chapitre précédent.

Les hélicoïdes et le cylindre droit répondent évidemment à la question. Dans ce dernier cas, $f(t)$ se réduit à une constante.

Reste à examiner s'il en est de même pour les autres surfaces pour lesquelles H est rationnelle. Nous observons qu'elles sont à plan directeur et à pas constant. On en conclut, en introduisant les conditions correspondantes dans δ_1 et δ_2, qu'on doit avoir identiquement

$$H^3 f(t) = P_2(\sin\varphi, \cos\varphi), \tag{50}$$

P_2 désignant un polynome de degré inférieur à 3 en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Or, dans le cas actuel, H se réduit, à un facteur numérique près, à l'un des types

$$u\cos\varphi + v\sin\varphi \quad \text{ou} \quad u\sin\varphi - v\cos\varphi + \psi,$$

ψ désignant une fonction de t qu'il est inutile d'expliciter. Dans un cas comme dans l'autre, l'égalité (50) ne peut être satisfaite identiquement que si

$$u = v = 0.$$

La surface est donc nécessairement un hélicoïde. Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

Théorème IV. — *Les hélicoïdes et le cylindre droit sont les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire et dont la courbure moyenne prend la même valeur en tous les points d'une génératrice, cette valeur pouvant d'ailleurs varier d'une génératrice à une autre ou rester constante, mais non nulle sur toute la surface.*

Les considérations précédentes laissent de côté les surfaces minima. La recherche de ces dernières fait l'objet du problème suivant :

Problème III. — *Déterminer les surfaces minima engendrées par une hélice circulaire.*

L'équation déterminant les surfaces cherchées est

$$\delta_1 + \delta_2 \equiv 0 \tag{51}$$

que l'on met aisément sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} Z_0\varphi^3 + Z_1\varphi^2 + Z_2\varphi + Z_3 = 0 \\ (Z_0, \ldots, Z_3, \text{ polynomes en } \sin\varphi \text{ et en } \cos\varphi), \end{array}\right. \tag{52}$$

équivalente à

$$Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0. \tag{53}$$

On simplifie les écritures et les calculs en introduisant la relation $q = 0$. L'équation $Z_0 = 0$ devient alors

$$(K'\rho + pK^2\cos\varphi)(K'^2 + p^2K^2) = 0. \tag{54}$$

Afin de ne pas allonger cette étude, nous nous bornerons à la considération des génératrices réelles. Celles-ci n'étant pas supposées dégénérées en des cercles, l'équation (54) donne

$$p = K' = 0.$$

Les surfaces répondant à la question seront engendrées par des hélices à pas constant et à plan directeur. En la rapportant, comme dans le problème précédent, à des axes fixes, on est conduit à considérer deux cas : 1° le rayon du cylindre principal est constant : l'hélice est indéformable. Nous ne nous arrêterons pas à étudier ce cas, l'établissement des équations fondamentales étant en tous points semblables à ce qu'on fait dans le cas général et ces équations conduisant sans aucune difficulté au résultat suivant : *la seule surface minima engendrée par une hélice circulaire indéformable est l'hélicoïde gauche à plan directeur* (*ou, en ne considérant que les parties réelles : la surface engendrée est une couronne d'hélicoïde gauche à plan directeur. Cette remarque faite ici une fois pour toutes est applicable dans d'autres cas analogues*).

2° Le rayon ρ est variable : On peut le prendre comme variable indépendante. La surface étant alors définie par les équations (16) avec $K = K_0$, l'équation qui exprime qu'elle est minima est, avec les notations de Gauss,

$$DG + D''E - 2FD' = 0, \tag{55}$$

équation qui prend ici la forme

$$\mathcal{A} \sin\varphi + \mathcal{B} \cos\varphi + \mathcal{C} = 0 \qquad (\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C},\ \text{fonction de } \rho). \tag{56}$$

Cette équation équivaut à $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = 0$, ou

$$\left\{\begin{array}{l} [K_0 u' - \rho(v'w - w'v) + 2vw](\rho^2 + K_0^2) + K_0 \rho u(u^2 + v^2 + w^2 - 1) = 0, \\ [K_0 v' + \rho(u'w - w'u) - 2uw](\rho^2 + K_0^2) + K_0 \rho v(u^2 + v^2 + w^2 - 1) = 0, \\ [K_0(u'v - v'u) + \rho w'](\rho^2 + K_0^2) + 2wK_0^2 + w\rho^2(u^2 + v^2 + w^2 + 1) = 0 \\ \qquad \left(u = \dfrac{df_1}{d\varphi}, \qquad v = \dfrac{df_2}{d\varphi}, \qquad w = \dfrac{df_3}{d\varphi}\right). \end{array}\right. \tag{57}$$

Telles sont les trois relations qui, jointes aux équations (16), (avec $K = K_0$), définissent toutes les surfaces minima engendrées par une hélice circulaire, réserve faite de la génération ci-dessus indiquée pour $\rho = \rho_0$.

J'ai intégré complètement le système (57) dans deux Notes parues dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* les 27 novembre et 26 décembre 1911). Aussi ne reprendrai-je pas en détail cette question, d'autant plus que je me propose de revenir avec tous les développements nécessaires (¹) : d'une part sur l'intégration d'un système d'équations différentielles à deux fonctions inconnues auquel appartient le système (6) (*C. R. Acad. Sc.*, du 27 novembre) et, d'autre part, sur l'étude spéciale de ces surfaces minima.

On est conduit au résultat suivant :

Théorème. — *Si on laisse de côté la génération de l'hélicoïde gauche à plan directeur par ses deux systèmes d'hélices circulaires, les seules surfaces minima engendrées par les hélices circulaires sont définies comme il suit :*

1° *L'axe de l'hélice décrit un plan et reste parallèle à une direction fixe ;*

2° *Son pas reste constant ;*

3° *En prenant pour plan des $y = 0$ le plan décrit par l'axe de l'hélice, le centre de son cercle principal décrit la courbe définie par les équations*

$$(58) \qquad X = \frac{1}{2}(I_1 + K_0^2 I_0)_{s_0}^{s}, \qquad Z = \frac{1}{2} a K_0 (I_0 + K_0^2 J)_{s_0}^{s}$$

avec

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} & I_0 = \int \frac{ds}{\varepsilon\sqrt{P}}, \quad I_1 = \int \frac{s\,ds}{\varepsilon\sqrt{P}}, \quad J = \int \frac{ds}{\varepsilon s\sqrt{P}} \\ & P = [s^2 + (K_0^2 + c - a^2)s - a^2K_0^2]\,(s + K_0^2) \end{aligned} \right. \quad \left(\begin{matrix} \varepsilon = \pm 1 \\ a,\ c,\ \text{const.} \end{matrix} \right).$$

(¹) Voici les grandes lignes de la méthode employée pour cette intégration. On pose

$$u = \lambda \cos\theta, \qquad y = \lambda \sin\theta$$

et des équations (57) on tire trois équations différentielles dont la première seule contient θ.

En faisant les substitutions

$$\Lambda = \lambda^2, \qquad M_1 = \frac{\rho^2\omega^2}{K_0^2},$$

puis $M_1 = \Theta\Lambda$, $\Lambda = \frac{1}{H}$.

1° On est ramené à résoudre une équation linéaire en $H + \theta$ et une équation

Remarques. — 1° La variable s qui figure dans les formules (58) n'est autre que ρ^2;

2° Lorsqu'on fait $a = \infty$ on trouve une solution limite constituée par les hélicoïdes minima.

Nous ne nous étendrons pas longuement dans le présent Mémoire sur ces surfaces, que nous désignerons sous le nom de *surfaces* M; nous nous bornerons à rappeler les résultats suivants, déjà signalés (*C. R. Acad. Sc.*, 27 novembre 1911).

La courbe plane, lieu du centre du cercle principal, possède une inflexion qui en est aussi un centre, et deux asymptotes parallèles à Ox. Sa forme générale est celle de la courbe représentative des tangentes.

Si l'on fait $a = 0$, on retrouve une solution particulière signalée dans une Note que j'ai fait paraître dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (16 juillet 1907). Cette solution est constituée par toutes les surfaces Φ minima (¹).

Si l'on suppose $C = 0$, les intégrales figurant dans les formules (59) se réduisent aux fonctions élémentaires (²) et, avec un choix convenable de l'origine, l'équation du lieu du centre du cercle principal dans son plan (xOy) est

$$Z = K_0 \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a}. \tag{60}$$

La surface dégénère alors en un hélicoïde gauche à plan directeur.

On peut, d'une façon générale, énoncer sur les surfaces (M) le théorème suivant :

Théorème. — *La tangente de l'angle que fait avec l'axe de la génératrice d'une surface* (M) *la tangente au lieu de*

---

de Bernoulli en Θ. La première des équations en λ et θ donne $\theta' = 0$. Des autres on tire λ et w.

2° On trouve en outre une solution définie par la seule condition $A - M_1 = 0$ à laquelle correspond l'hélicoïde gauche à plan directeur considéré comme engendré par un quelconque de ses systèmes d'hélices non coaxiales de la surface.

(¹) La courbe lieu des centres s'aplatit alors suivant une droite.

(²) Si l'on s'en tient aux éléments réels, c'est le seul cas, en dehors de la surface (M), qui est aussi une surface (Φ) définie par les égalités $a = K_0^2 + c = 0$.

son cercle principal est proportionnelle au carré du rayon de celui-ci.

C'est l'interprétation géométrique évidente de l'égalité

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a\mathrm{K}_0}{\rho^2}.$$

CHAPITRE V.

CLASSIFICATION DES SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE.

Les études précédentes permettent d'établir le principe d'une classification naturelle des surfaces engendrées par une hélice circulaire. Elles mettent en évidence le rôle fondamental joué par la présence d'un plan directeur d'hélices, aussi bien dans les propriétés qui paraissent se lier, au premier abord, avec cette particularité que dans celles qui ne semblent pas, *a priori*, avoir un rapport intime avec elle. Cette remarque nous conduira à diviser ces surfaces en deux grandes classes : 1° les surfaces à plan directeur; 2° les surfaces sans plan directeur.

Comme second caractère d'importance considérable, nous choisirons la constance et la variabilité du pas. Ceci amène à séparer les surfaces de chaque classe en deux grandes familles. Dans chacune d'elles, la présence ou l'absence d'une enveloppe des génératrices déterminera des genres. Enfin, dans ceux-ci, les espèces se différencieront par divers caractères détaillés dans le Tableau synoptique qui termine ce Chapitre. La classification qui s'y trouve proposée repose sur les propriétés qui ont fait l'objet de cette étude. Il est évident que rien n'empêcherait de pousser la subdivision plus loin en introduisant la considération de propriétés nouvelles.

Tableau synoptique résumant la classification

CLASSES.	FAMILLE.	GENRES.
I. Surfaces à plan directeur d'hélices.........	A. Génératrice à pas constant....	a. Génératrice ayant une enveloppe
		b. Génératrice sans enveloppe....
	B. Génératrice à pas variable.....	a. Génératrice ayant une enveloppe
		b. Génératrice sans enveloppe ....
II. Surfaces sans plan directeur d'hélices.....	A. Génératrice à pas constant....	a. Génératrice douée d'enveloppe.
		b. Génératrice sans enveloppe.....
	B. Génératrice à pas variable.....	a. Génératrice douée d'enveloppe.
		b. Génératrice sans enveloppe....

Nota. — Nous avons signalé dans ce Tableau des variétés appartenant à plusieurs variétés d'ordre cylindres circulaires, par exemple, peuvent être considérés comme cas limite de douées de définitions différentes peut conduire à des résultats intéressants.

des surfaces engendrées par une hélice circulaire.

ESPÈCES.	
Une seule espèce; les surfaces (Γ) parmi lesquelles sont à signaler les surfaces (C) appartenant aussi à l'espèce des surfaces Φ.	
1. Les hélicoïdes.	L'hélicoïde gauche minima appartient aux deux espèces suivantes et, aussi, au genre précédent.
2. Les surfaces Φ (dont une variété admet une enveloppe : surf. (C). 3. Les surfaces minima.	Ont une variété commune.
4. Les surfaces engendrées par une hélice indéformable.	A noter dans cette série les surfaces Ψ à plan directeur qui sont aussi des surfaces Φ.
5. Les surfaces générales de ce genre.	
Subdivisions basées sur l'ordre du contact avec l'enveloppe.	
1. Les cônes ou les cylindres projetant une hélice circulaire quelconque.	
2. Les hélicoïdes de seconde espèce.	Ont pour cas particulier les hélicoïdes; à signaler, parmi les hélicoïdes de seconde espèce, la surface de vis de seconde espèce.
3. Les surfaces générales de première classe.	
1. Génératrice indéformable. 2. Génératrice déformable.	
1. Génératrice indéformable. 2. Génératrice déformable.	A cette espèce appartiennent les ψ générales dont certaines variétés font aussi partie du genre précédent.
Subdivisions fondées sur l'ordre du contact.	A signaler certaines surfaces Ξ particulières.
Surface générale : les caractères rencontrés dans cette étude ne permettent pas d'introduire de subdivision dans ce genre. Pour le faire, il faudrait s'adresser à d'autres propriétés.	A signaler dans cette espèce les surfaces Ξ générales.

plus général. Il est à peine besoin de faire remarquer que ce ne sont pas les seules; ainsi, les toutes les variétés des surfaces à plan directeur. La recherche de variétés communes à des séries