J. CLAIRIN

Sur la transformation d'Imschenetsky

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 206-228

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__206_1>

SUR LA TRANSFORMATION D'IMSCHENETSKY;

Par M. J. Clairin.

Je me suis proposé de rechercher s'il existe des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, dont il soit possible de déduire, à l'aide de transformations de Bäcklund de première espèce, une suite indéfinie d'équations analogues, à moins que l'équation obtenue après un certain nombre d'opérations ne possède deux intégrales intermédiaires du premier ordre relatives au même système de caractéristiques; pour abréger nous désignerons une telle suite par la lettre (L), la plus simple des transformations de Bäcklund de première espèce étant la célèbre transformation de Laplace qui s'applique aux équations linéaires de la manière qui vient d'être dite. Malheureusement il semble très difficile de résoudre la question précédente sans faire aucune hypothèse sur les transformations employées, aussi je considérerai seulement dans ce travail le cas où les variables indépendantes sont conservées ; les résultats qui vont être démontrés ont été énoncés dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 10 juin 1912.

Nous nous servirons des notations ordinaires : x, y désignant deux variables indépendantes, nous représenterons par z une fonction de ces variables, par p, q, r, s, t les dérivées partielles des deux premiers ordres de cette fonction, les mêmes lettres pourvues d'un indice auront des significations analogues, nous rappelons encore qu'une transformation de Bäcklund de première espèce est dite transformation (B_1) [1].

1. Une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes dérive d'une transformation (B_1) quand elle possède un système de caractéristiques du premier ordre [2], cette transformation (B_1) est d'ailleurs unique; par conséquent, une suite (L) ne peut être composée que d'équations possédant deux systèmes de caractéristiques du premier ordre, c'est-à-dire d'équations de Monge-Ampère. Une équation de Monge-Ampère qui dérive d'une transformation (B_1) conservant les variables indépendantes est linéaire par rapport aux dérivées secondes r, s, t [3]; considérons donc une telle équation que nous écrirons sans restreindre la généralité

$$(\varepsilon) \qquad r + (m + \mu)s + m\mu t + M = 0,$$

en représentant par m, μ, M des fonctions de x, y, z, p, q, les deux systèmes (C) et (Γ) de caractéristiques du premier ordre sont respectivement définis par les équations différentielles

$$dy = m\,dx, \qquad dy = \mu\,dx.$$

(ε) dérive de la transformation

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \varphi(x, y, z, p, q), \\ p_1 + \mu q_1 - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \mu\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + M\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = 0 \end{array} \right.$$

(1) Pour la théorie générale des transformations de Bäcklund, *voir* ma Thèse (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XIX, Suppl., 1902).

(2) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXX, 1913, p. 173.

(3) Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 267 et suiv.

si φ satisfait à l'égalité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} - m\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0; \tag{2}$$

pour que cette transformation soit une transformation (B_1) déduite de (C), il faut et il suffit que le premier membre de la seconde équation (1) satisfasse comme $\varphi(x, y, z, p, q)$ à (2); en posant, pour abréger l'écriture,

$$H(x, y, z, p, q) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - M(x, y, z, p, q)\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

ces conditions s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\mu}{\partial q} - m\frac{\partial\mu}{\partial p} = 0, \\ &\frac{\partial H}{\partial q} - m\frac{\partial H}{\partial p} = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

En exprimant que (ε) dérive aussi d'une transformation (B_1) déduite du système (Γ), on trouve des résultats analogues, en particulier,

$$\frac{\partial m}{\partial q} - \mu\frac{\partial m}{\partial p} = 0. \tag{4}$$

Supposons que m, μ, φ satisfassent aux conditions précédentes (2), (3), (4); les équations (1) définissent une transformation (B_1), $z_1(x, y)$ est l'intégrale d'une équation (ε_1) aux dérivées partielles du second ordre, il faut que (ε_1) soit comme (ε) une équation de Monge-Ampère linéaire en r_1, s_1, t_1 pour qu'il soit possible de lui appliquer une transformation (B_1) distincte de (1). Si l'on imagine les équations (1) résolues par rapport à z et à l'une de ses dérivées — p par exemple — le système obtenu doit présenter relativement à z, p, q, les mêmes particularités que (1) relativement à z_1, p_1, q_1; l'expression trouvée pour z doit être indépendante de q, tandis que l'expression de p doit contenir linéairement cette dérivée : il est facile de vérifier que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Nous aurons les dérivées premières et secondes de z et p par rapport à q en dérivant deux fois de suite les premiers membres de (1), il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q}=0,\\ &q_1\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}+\frac{\partial\mu}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q}\right)=0\end{aligned}\right.$$

et

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\,\partial p}\frac{\partial p}{\partial q}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial q}\\ &\qquad+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}=0,\\ &q_1\left[\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}+2\frac{\partial^2\mu}{\partial q\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}+2\frac{\partial^2\mu}{\partial q\,\partial p}\frac{\partial p}{\partial q}+2\frac{\partial^2\mu}{\partial z\,\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial q}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2+\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)^2+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}+\frac{\partial\mu}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}\right]\\ &-\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial q\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}+2\frac{\partial^2 H}{\partial q\,\partial p}\frac{\partial p}{\partial q}+2\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial q}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)^2+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de (2) et (3), les équations (5) donnent

$$\frac{\partial z}{\partial q}=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial q}=-m,$$

nous allons remplacer dans les premiers membres de (6) ces dérivées par leurs valeurs et $\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}$ par 0, nous avons ainsi les équations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-2m\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+m^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=0,\\ &q_1\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}-2m\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial q}+m^2\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)\\ &-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}-2m\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}+m^2\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\right)=0;\end{aligned}$$

enfin, en éliminant $\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$ entre ces deux équations, nous trouvons

$$(7)\quad \begin{aligned} &q_1\left[\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}-2m\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial q}+m^2\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-\frac{\dfrac{\partial\mu}{\partial z}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-2m\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+m^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\right)\right]\\ &-\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}-2m\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}+m^2\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}-\frac{\dfrac{\partial H}{\partial z}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}-2m\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+m^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}\right)\right]=0,\end{aligned}$$

équation qui exprime évidemment que la fonction de x, y, q, z_1, p_1, q_1, obtenue en résolvant (1) par rapport à p, est une fonction linéaire de q, puisque nous avons écrit que la dérivée $\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}$ est nulle. La condition (7) se décompose en deux autres que l'on peut mettre sous la forme

$$(8)\quad \frac{\frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} - 2m\frac{\partial^2 \mu}{\partial p\,\partial q} + m^2\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - 2m\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q} + m^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} - 2m\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q} + m^2\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}}{\frac{\partial H}{\partial z}};$$

d'ailleurs de

$$\frac{\partial \mu}{\partial q} = m\frac{\partial \mu}{\partial p}$$

on déduit

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial q\,\partial p} = m\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} + \frac{\partial m}{\partial p}\frac{\partial \mu}{\partial p},$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} = m\frac{\partial^2 \mu}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial m}{\partial q}\frac{\partial \mu}{\partial p} = m^2\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} + m\frac{\partial m}{\partial p}\frac{\partial \mu}{\partial p} + \frac{\partial m}{\partial q}\frac{\partial \mu}{\partial p}.$$

et l'on a des équations analogues en remplaçant μ par φ ou H.

On peut donc écrire les conditions (8), en tenant compte de (4),

$$(\mu - m)\frac{\partial m}{\partial p}\frac{\frac{\partial \mu}{\partial p}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = (\mu - m)\frac{\partial m}{\partial p}\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = (\mu - m)\frac{\partial m}{\partial p}\frac{\frac{\partial H}{\partial p}}{\frac{\partial H}{\partial z}}.$$

La fonction $\mu - m$ n'est pas identiquement nulle, par conséquent il vient

$$(9)\qquad \frac{\partial m}{\partial p} = 0$$

ou

$$(10)\qquad \frac{\frac{\partial \mu}{\partial p}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial H}{\partial p}}{\frac{\partial H}{\partial z}}.$$

Prenons d'abord le premier cas ; de (9) on tire, d'après (4),

$$\frac{\partial m}{\partial q} = 0,$$

m ne dépend que de x, y, z. En raisonnant de même pour la transformation (B_1) de (ε) déduite du système (Γ), on trouve que μ est également une fonction des variables x, y, z.

Lorsque les expressions de m et μ contiennent seulement les variables indépendantes et la fonction inconnue, les deux transformées de (ε) peuvent donc être aussi des équations de Monge-Ampère [1] : considérons en particulier (ε_1), les caractéristiques de (ε_1) sont définies par les équations

$$dy = m\,dx, \qquad dy = \mu\,dx,$$

dans lesquelles z doit être remplacée par son expression tirée de (1), c'est-à-dire par une fonction de x, y, z_1, p_1, q_1. D'ailleurs, si (ε) et (ε_1) appartiennent à une suite (L), (ε_1) présente nécessairement les mêmes particularités que (ε), le long d'une caractéristique le rapport $\frac{dy}{dx}$ ne dépend ni de p_1 ni de q_1 ; il ne peut en être ainsi que dans le cas où m et μ sont des fonctions de x, y seulement.

Un changement de variables indépendantes qui ne modifie pas le problème dont nous avons indiqué l'énoncé au début de ce travail permet alors de remplacer (ε) par une équation où ne figurent plus les dérivées r, t ; avant de résoudre pour ces équations la question posée, considérons les équations (10) que nous avons laissées de côté dans le développement qui précède.

Avec les équations (2) et (3), le système (10) exprime que de (1) on peut déduire une équation indépendante de z, p, q, (ε) possède alors une intégrale intermédiaire du premier ordre dont l'expression contient une fonction arbitraire : supposons que du système (Γ) de caractéristiques de (ε) on déduise une transformation (B_1), en raisonnant comme nous venons de le faire, on établira que cette transformation peut remplacer (ε) par une nouvelle équation de Monge-Ampère si l'on a

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = 0 \tag{11}$$

ou des équations analogues à (10). Cette dernière hypothèse doit être écartée : (ε) posséderait dans ce cas une seconde intégrale

[1] Cette condition est simplement nécessaire, il est facile de vérifier sur un exemple qu'elle n'est pas suffisante.

intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire, elle différerait par une simple transformation de contact de l'équation

$$s = 0$$

et aucune transformation (B_1) ne permettrait de passer de cette équation à une autre équation du second ordre.

Remarquons de plus que, si (ε) fait partie d'une suite (L) comprenant plus de deux équations du second ordre, on peut raisonner sur une des équations intermédiaires de la suite comme nous avons fait pour (ε) ; on en déduira que cette équation — par conséquent toutes celles de la suite et en particulier (ε) — peut être remplacée sans inconvénient par une équation indépendante de r, t. Le seul cas à examiner est donc celui où (ε) se transforme en une équation (ε_{-1}) telle que le système (Γ_{-1}) de caractéristiques de cette équation qui correspond à (Γ) admette deux invariants du premier ordre.

De (2), (10), (11) on conclut

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \tag{12}$$

ou

$$\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial p}}{\dfrac{\partial H}{\partial z}}. \tag{13}$$

Les équations (12) ne peuvent être satisfaites par une fonction φ telle que (1) définisse une transformation de Bäcklund ; il reste donc seulement à étudier les équations (13). μ satisfaisant aux conditions (3), (11), (13) ne dépend que de x, y ; nous exprimerons ce résultat en disant que le long d'une caractéristique (Γ) de (ε) le rapport $\frac{dy}{dx}$ est une fonction des variables indépendantes. D'après la remarque que nous avons faite un peu plus haut, (ε_{-1}) doit présenter des particularités analogues à celles de (ε), les systèmes (C_{-1}) et (Γ_{-1}) de caractéristiques de (ε_{-1}) possèdent respectivement des propriétés analogues à celles de (Γ) et (C). Le long d'une caractéristique (C_{-1}), le rapport $\frac{dy}{dx}$ ne dépend que de x et y ; ce rapport est, d'ailleurs, égal à m; m est donc comme μ une fonction de x, y; on arrive à la même conclusion que dans le cas général.

2. Pour qu'une transformation (B_1) qui ne change pas les variables indépendantes soit applicable à une équation aux dérivées partielles du second ordre où ne figurent ni r ni t, il faut et il suffit que cette équation puisse s'écrire

$$(14) \qquad s + L(x, y, z, q)p + N(x, y, z, q) = 0,$$

c'est-à-dire soit obtenue en annulant un polynome du premier degré en s et p (¹); l'équation précédente dérive de la transformation

$$z_1 = \varphi(x, y, z, q), \qquad p_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - N(x, y, z, q)\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} = L(x, y, z, q)\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right],$$

généralement appelée transformation d'Imschenetsky, du nom du géomètre qui l'a d'abord signalée; cette transformation est déduite du système (C) de caractéristiques défini par l'équation

$$dx = 0.$$

L'équation (14) ne peut faire partie d'une suite (L) que dans le cas où elle dérive également d'une transformation d'Imschenetsky déduite du second système (Γ) de caractéristiques; il faut donc que le premier membre soit une fonction linéaire de q comme de p; nous pouvons, d'ailleurs, supposer que ce premier membre ne contient pas de terme en pq (²) et écrire sans restreindre la généralité

$$(\varepsilon) \qquad s + \frac{\partial\alpha}{\partial z}p + \frac{\partial\beta}{\partial z}q + \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \gamma = 0,$$

α, β, γ représentant des fonctions de x, y, z.

(¹) Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 263. *Voir* aussi ma Thèse, en particulier p. 44.

(²) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, p. 407 (Note de M. Cosserat).

Les équations

$$(15) \qquad z_1 = q + \alpha(x, y, z), \qquad p_1 + \frac{\partial\beta}{\partial z} q + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \gamma(x, y, z) = 0$$

définissent la transformation d'Imschenetsky qui correspond au système (C) de caractéristiques; nous les écrirons

$$(15') \qquad z_1 = q + \alpha(x, y, z), \qquad p_1 + \frac{\partial\beta}{\partial z} z_1 + \theta(x, y, z) = 0,$$

en posant

$$\gamma(x, y, z) + \frac{\partial\beta}{\partial y} - \alpha(x, y, z)\frac{\partial\beta}{\partial z} = \theta(x, y, z).$$

L'équation aux dérivées partielles du second ordre qui définit z_1 est

$$s_1 + \frac{\partial\beta}{\partial z} q_1 + \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial y\,\partial z} + q\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\right) z_1 + \frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0;$$

on doit remplacer dans le premier membre z et q par les valeurs tirées des équations (15'), il faut qu'après la substitution ce premier membre soit une fonction linéaire de p_1 pour que l'on puisse appliquer à l'équation une transformation d'Imschenetsky autre que (15'). Exprimons d'abord que le coefficient $\frac{\partial\beta}{\partial z}$ de q_1 est une fonction linéaire de p_1 en écrivant que la dérivée seconde par rapport à p_1 est nulle; il vient

$$(16) \qquad \frac{\partial^3\beta}{\partial z^3}\left(\frac{\partial z}{\partial p_1}\right)^2 + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} = 0;$$

$\frac{\partial z}{\partial p_1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2}$ se calculent en dérivant la seconde équation (15'), on trouve

$$1 + \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} z_1 + \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial p_1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3\beta}{\partial z^3} z_1 + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} z_1 + \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} = 0,$$

et, en combinant avec (16), on arrive à

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^3\beta}{\partial z^3}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.$$

Si $\beta(x, y, z)$ n'est pas une fonction linéaire de z, cette condition exprime qu'il existe entre $\beta(x, y, z)$ et $\theta(x, y, z)$ une relation telle que

$$\theta(x, y, z) = m(x, y)\frac{\partial\beta}{\partial z} + n(x, y),$$

c'est le cas que nous considérerons d'abord.

Les équations (15') s'écrivent alors

$$z_1 = q + \alpha(x, y, z), \qquad p_1 + \frac{\partial\beta}{\partial z}[z_1 + m(x, y)] + n(x, y) = 0;$$

en prenant $z_1 + m(x, y)$ pour fonction inconnue à la place de z_1 on peut toujours revenir au cas où $m(x, y)$ est identiquement nulle; considérons donc la transformation [1]

$$z_1 = q + \alpha(x, y, z), \qquad p_1 + \frac{\partial\beta}{\partial z}z_1 + n(x, y) = 0.$$

L'équation qui définit z_1 est

$$(17) \quad s_1 - \frac{p_1 + n(x, y)}{z_1}q_1 + \left[(z_1 - \alpha)\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y\,\partial z}\right]z_1 + \frac{\partial n}{\partial y} = 0,$$

il faut que $(z_1 - \alpha)\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y\,\partial z}$ soit un polynome du premier degré en p_1; un raisonnement analogue au précédent montre que cette expression doit être une fonction linéaire de $\frac{\partial\beta}{\partial z}$; les coefficients dépendant de x, y, z_1, ces coefficients seront nécessairement des polynomes du premier degré en z_1.

En écrivant que les termes en z_1 sont les mêmes on a, soit

$$(18) \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} = u(x, y)\left[\frac{\partial\beta}{\partial z} - v(x, y)\right],$$

soit

$$(19) \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} = \frac{1}{2}u(x, y).$$

Supposons, d'abord, que $\beta(x, y, z)$ satisfasse à la condition (18), d'où l'on tire

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = \lambda(x, y)\,e^{u(x,y)z} + v(x, y),$$

---

[1] Le changement de fonction inconnue modifie les expressions de $\alpha(x, y, z)$ et $n(x, y)$, nous conservons les mêmes lettres pour ne pas multiplier les notations; dans la suite nous ferons souvent de même.

il reste encore à égaler les termes indépendants de z, on obtient ainsi

$$-\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y\,\partial z}=\eta(x,y)\frac{\partial\beta}{\partial z}+\xi(x,y);$$

en remplaçant $\frac{\partial\beta}{\partial z}$ par l'expression trouvée et résolvant par rapport à α, il vient

$$\alpha(x,y,z)=\frac{1}{u(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y}z+h(x,y)\,e^{-u(x,y)z}+k(x,y),$$

où h et k désignent deux nouvelles fonctions de x, y; nous prendrons d'ailleurs simplement

$$\alpha(x,y,z)=\frac{1}{u(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y}z+h(x,y)\,e^{-u(x,y)z},$$

en remarquant qu'il suffit d'ajouter à z une fonction convenablement choisie de x, y pour revenir au cas où $k(x,y)$ est nulle sans modifier la forme des équations de la transformation.

Écrivons à nouveau ces équations

$$z_1=q+\frac{1}{u(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y}z+h(x,y)\,e^{-u(x,y)z},$$
$$p_1+[\lambda(x,y)\,e^{u(x,y)z}+\nu(x,y)]\,z_1+n(x,y)=0;$$

nous prendrons maintenant $u(x,y)\,z$ et $u(x,y)\,z_1$ comme fonctions inconnues au lieu de z et z_1, il viendra

$$z_1=q+h(x,y)\,e^{-z},$$
$$p_1+[\lambda(x,y)\,e^{z}+\nu(x,y)]\,z_1+n(x,y)=0,$$

d'où, pour l'équation qui donne z,

$$(20)\qquad s+\frac{d}{dx}[h(x,y)\,e^{-z}]+[\lambda(x,y)\,e^{z}+\nu(x,y)]q$$
$$+\nu(x,y)\,h(x,y)\,e^{-z}+\lambda(x,y)\,h(x,y)+n(x,y)=0.$$

Nous avons, au commencement de cette étude, exprimé que $\theta(x,y,z)$ — c'est-à-dire $\gamma(x,y,z)+\frac{\partial\beta}{\partial y}-\alpha(x,y,z)\frac{\partial\beta}{\partial z}$ — est une fonction linéaire de $\frac{\partial\beta}{\partial z}$; pour que ($\varepsilon$) appartienne à une suite (L) il faut évidemment que $\gamma(x,y,z)+\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\beta(x,y,z)\frac{\partial\alpha}{\partial z}$ soit de même une fonction linéaire de $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$ ou, d'après les valeurs de

$\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ données par l'équation précédente, que

$$v h e^{-z} + \lambda h + n - \frac{\partial \lambda}{\partial y} e^{z} - \frac{\partial v}{\partial y} z + (\lambda e^{z} + v z) h e^{-z}$$

soit une fonction linéaire de e^{-z}. On déduit immédiatement de là

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \qquad v h = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

ces conditions entraînent

$$\lambda = \mathrm{X}(x), \qquad v = 0.$$

L'équation (20) est l'équation de Moutard

$$s + \frac{d}{dx}(h e^{-z}) + \frac{d}{dy}(\mathrm{X} e^{z}) + \mathrm{X} h + n = 0. \tag{21}$$

3. Passons maintenant à l'examen de la condition (19) dont nous tirons

$$\beta(x, y, z) = u(x, y) z^2 + v(x, y) z, \tag{22}$$

en observant que, d'après la forme de (ε), α et β peuvent toujours être modifiées par l'addition d'une fonction quelconque de x, y si γ est également modifiée d'une manière correspondante. Remarquons encore que nous devons supposer dans (22) $u(x, y)$ non identiquement nulle ; l'hypothèse que $\beta(x, y, z)$ soit une fonction linéaire de z a été écartée au début et sera étudiée dans le paragraphe suivant.

Le raisonnement qui nous a permis de déterminer $\alpha(x, y, z)$ en écrivant que $\frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} + (z_1 - \alpha)\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$ est une fonction linéaire de $\frac{\partial \beta}{\partial z}$ subsiste et montre que l'on peut écrire

$$\alpha(x, y, z) = h(x, y) z + k(x, y).$$

Les équations de la transformation d'Imschenetsky sont

$$z_1 = q + h z + k, \qquad p_1 + 2 u z z_1 + v z_1 + n = 0$$

ou plus simplement

$$z_1 = q + h z + k, \qquad p_1 + 2 u z z_1 + n = 0, \tag{23}$$

si l'on ajoute à z la fonction $\frac{v}{2u}$.

Développons l'équation à laquelle satisfait $z(x, y)$, de (23), on tire en dérivant et éliminant

$$(24) \qquad s + hp + 2uzq + 2uhz^2 + \left(2uk + \frac{\partial h}{\partial x}\right)z + n + \frac{\partial k}{\partial x} = 0;$$

la seconde transformation d'Imschenetsky applicable à (24) est définie par les équations

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{-1} = p + uz^2, \\ q_{-1} + hp + \left(2uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right)z^2 + \left(2uk + \frac{\partial h}{\partial x}\right)z + \frac{\partial k}{\partial x} + n = 0, \end{array} \right.$$

que nous écrirons

$$(25') \quad z_{-1} = p + uz^2, \qquad q_{-1} + hz_{-1} + \left(uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right)z^2 + \mu z + \sigma = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$2uk + \frac{\partial h}{\partial x} = \mu(x, y), \qquad \frac{\partial k}{\partial x} + n = \sigma(x, y);$$

on déduit de là l'équation en z_{-1}

$$(26) \quad \begin{aligned} & s_{-1} + hp_{-1} + \frac{\partial h}{\partial x}z_{-1} + 2\left(uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right)zz_{-1} \\ & + 2u(q_{-1} + hz_{-1} + \sigma)z \\ & - \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{uh - \frac{\partial u}{\partial y}}(q_{-1} + hz_{-1} + \mu z + \sigma) \\ & - \frac{\mu u}{uh - \frac{\partial u}{\partial y}}(q_{-1} + hz_{-1} + \mu z + \sigma) + z\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu z_{-1} = 0, \end{aligned}$$

à condition de remplacer, partout où il se présente, le carré z^2 par l'expression $-\dfrac{q_{-1} + hz_{-1} + \mu z + \sigma}{uh - \frac{\partial u}{\partial y}}$ tirée de la seconde équation (25').

Il reste à résoudre cette équation par rapport à z et à porter la valeur trouvée dans le premier membre de (26), on voit immédiatement que ce premier membre ne sera jamais du premier degré en q_{-1}, à moins que la fonction $u(x, y)$ ne soit identiquement nulle, c'est-à-dire à moins que $\beta(x, y, z)$ ne soit une fonction linéaire de z, cas que nous avons laissé de côté et que nous allons examiner maintenant.

4. Si $\beta(x, y, z)$ est une fonction linéaire de z, (ε) peut s'écrire en faisant un changement de notations

$$s + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p + m(x, y) q + \gamma(x, y, z) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

en remplaçant z par $\rho(x, y) z$, $\rho(x, y)$ satisfaisant à

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + m\rho = 0,$$

on revient au cas où l'équation ne contient pas de terme en q; nous écrirons donc maintenant

$$(\varepsilon) \qquad s + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p + \gamma + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$

et nous considérerons les équations

$$(27) \qquad z_1 = q + \alpha(x, y, z), \qquad p_1 + \gamma(x, y, z) = 0$$

de la transformation d'Imschenetsky qui fait correspondre (ε) à

$$s_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial y} + (z_1 - \alpha) \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

où z doit être remplacée par la valeur que fournit la seconde équation (27).

Le raisonnement du n° 2 prouverait que $\frac{\partial \gamma}{\partial y} + (z_1 - \alpha) \frac{\partial \gamma}{\partial z}$ doit être une fonction linéaire de γ; on a d'abord

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = u(x, y)[\gamma(x, y, z) - v(x, y)]$$

ou

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = u(x, y).$$

$\gamma(x, y, z)$ est donc égale soit à $\lambda(x, y) e^{u(x, y) z} + v(x, y)$, soit à $u(x, y) z + v(x, y)$, où u, v, λ désignent des fonctions des variables indépendantes.

Posons d'abord

$$\gamma(x, y, z) = \lambda(x, y) e^{u(x, y) z} + v(x, y),$$

puis écrivons que $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z}$ est identique à un polynome du premier degré en y, on tire de là

$$\alpha(x, y, z) = h\, e^{-uz} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} z + w(x, y).$$

En remarquant qu'il suffit d'ajouter à z et z_1 des fonctions convenables de x, y et de modifier les expressions de h et λ pour revenir au cas où v et w sont identiquement nulles, nous avons la transformation

$$z_1 = q + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} z + h\, e^{-uz}, \qquad p_1 + \lambda\, e^{uz} = 0$$

qui conduit à l'équation

$$(28) \quad s + \left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} - hu\, e^{-uz}\right) p + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - h\frac{\partial u}{\partial x} z\right) e^{-uz} + \lambda e^{uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y} z = 0.$$

La seconde transformation d'Imschenetsky, applicable à (28), est

$$(29) \quad z_{-1} = p, \quad q_{-1} + \left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} - hu e^{-uz}\right) z_{-1} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - h\frac{\partial u}{\partial x} z\right) e^{-uz} + \lambda e^{uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y} z = 0.$$

Écrivons l'équation à laquelle satisfait z_{-1}

$$(30) \qquad s_{-1} + \left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} - hu\, e^{-uz}\right) p_{-1} + \mathrm{A}(x, y, z_{-1}, q_{-1}) = 0$$

et exprimons que le coefficient de p_{-1} est linéaire en q_{-1}, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 (e^{-uz})}{\partial q_{-1}^2} = u\, e^{-uz}\left[-\frac{\partial^2 z}{\partial q_{-1}^2} + u\left(\frac{\partial z}{\partial q_{-1}}\right)^2\right] = 0,$$

les dérivées de z étant obtenues en dérivant le premier membre de la deuxième équation (29), il vient ainsi

$$\left[hu^2 e^{-uz} z_{-1} + hu\frac{\partial u}{\partial x} z\, e^{-uz} + \lambda u\; e^{uz} - \left(u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x}\right) e^{-uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y}\right] \frac{\partial^2 z}{\partial q_{-1}^2}$$
$$\left[hu^3 e^{-uz} z_{-1} + hu^2 \frac{\partial u}{\partial x} z\, e^{-uz} - \lambda u^2 e^{uz} + \left(u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2uh\frac{\partial u}{\partial x}\right) e^{-uz}\right]\left(\frac{\partial z}{\partial q_{-1}}\right)^2 \qquad = 0.$$

En combinant les deux dernières équations, on trouve

$$2\lambda u^2 e^{uz} - 2u\frac{\partial(uh)}{\partial x} e^{-uz} + u\frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

condition qui ne saurait être satisfaite sans que l'on eût

$$u\lambda = 0,$$

or aucune des fonctions u, λ ne peut être identiquement nulle ; il faut donc que dans (30) le coefficient de p_{-1} ne contienne pas de terme en e^{-uz}, ce qui exige

$$h = 0.$$

Les équations de la transformation s'écrivent simplement

$$z_{-1} = p, \qquad q_{-1} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} z_{-1} + \lambda e^{uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y} z = 0,$$

et l'équation qui donne z_{-1} est

$$(31) \qquad \begin{aligned} &s_{-1} + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} p_{-1} + 2\frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y} z_{-1} \\ &\quad + \left(u\lambda z_{-1} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} z + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) e^{uz} + \frac{\partial^3 \log u}{\partial x^2\, \partial y} z = 0. \end{aligned}$$

Un calcul déjà fait plusieurs fois prouve que cette dernière équation n'est pas bilinéaire en p_{-1}, q_{-1}, à moins que u ne soit une fonction de la seule variable y, il n'y a d'ailleurs pas d'inconvénient à supposer cette fonction égale à l'unité, l'équation (31) prend la forme simple

$$s_{-1} - q_{-1} z_{-1} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} q_{-1} = 0.$$

Appliquons-lui la transformation qui a pour équations

$$(32) \qquad z_{-2} = p_{-1} - \frac{1}{2} z_{-1}^2 - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} z_{-1}, \qquad q_{-2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x\, \partial y} z_{-1} = 0,$$

d'où

$$s_{-2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x\, \partial y} p_{-1} + \frac{\partial^3 \log \lambda}{\partial x^2\, \partial y} z_{-1} = 0,$$

il est facile de vérifier qu'après substitution à z_{-1}, p_{-1} des valeurs tirées de (32), nous trouvons une équation qui n'est pas bilinéaire en p_{-2}, q_{-2} à moins que

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

égalité qui exprime que

$$\lambda = X(x)\, Y(y).$$

L'équation (28) est alors

$$s + XY e^z = 0$$

ou en faisant un changement simple de fonction inconnue

$$(33) \qquad s + e^z = 0,$$

on peut transformer cette équation en posant

$$z_1 = q \qquad \text{ou} \qquad z_{-1} = p,$$

z_1 et z_{-1} satisfont aux équations

$$(34) \qquad s_1 = z_1 p_1, \qquad s_{-1} = z_{-1} q_{-1},$$

qui possèdent l'une et l'autre une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire.

5. Supposons enfin

$$\gamma(x, y, z) = u(x, y) z + v(x, y),$$

u désignant une fonction non identiquement nulle ; si nous égalons $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z}$ à un polynome du premier degré en γ, nous trouvons que α est comme γ une fonction linéaire de z, les équations (27) définissent une transformation de Laplace.

Quand γ ne dépend pas de z, on ne peut déterminer α par la méthode précédente; il serait aisé de recommencer des raisonnements et des calculs analogues à ceux qui ont fourni les résultats antérieurs, mais nous indiquerons une solution plus rapide.

Les équations (27) montrent que le système (Γ) de caractéristiques de l'équation (ε) admet deux invariants du premier ordre y et $q + \alpha + \int \gamma dx$: désignons par $\chi(x, y, z, p)$ une fonction telle que

$$(35) \qquad z_{-1} = \chi(x, y, z, p)$$

soit l'une des équations de la transformation (B_1) applicable à (ε) et par (ε_{-1}) l'équation du second ordre à laquelle satisfait z_{-1}. S'il n'existe pas deux combinaisons intégrables des équations différentielles du système (C_{-1}) des caractéristiques de (ε_{-1}) qui correspond à (C), on peut répéter pour (ε_{-1}) ce que nous avons dit dans les cas déjà étudiés; on trouve que cette équation a l'une des formes indiquées précédemment.

Il reste donc seulement à examiner le cas où (C_{-1}) possède deux invariants du premier ordre, c'est-à-dire où (C) possède, outre l'invariant x, un invariant du second ordre, (Γ) possédant deux invariants du premier ordre, (ε) est nécessairement une des équations obtenues par M. Goursat dans un Mémoire ([1]) où il s'est proposé de rechercher quelques équations intégrables par la méthode de M. Darboux. Parmi ces équations, les seules qui satisfassent aux conditions que nous venons d'énoncer, sans appartenir à l'une des catégories déjà signalées dans le présent travail portent les nos VI et VIII, d'ailleurs la fonction arbitraire que M. Goursat désigne par la lettre f doit être linéaire par rapport à s pour que l'on puisse appliquer aux équations correspondantes une transformation d'Imschenetsky définie par une équation telle que (35).

On trouve ainsi, $X_0(x)$ et $X_1(x)$ représentant des fonctions quelconques de x, les équations

$$s[z - X_1(x)] - pq - q\frac{dX_0}{dx} = 0,$$

$$s[X_0(x) + y] - p + \frac{dX_1}{dx} = 0,$$

qui s'écrivent simplement

$$sz - pq - q = 0, \tag{36}$$

$$(x+y)s - p = 0, \tag{37}$$

si l'on prend pour fonction inconnue $z - X_1$ au lieu de z et pour première variable indépendante X_0 au lieu de de x ([2]).

La transformation

$$z_1 = -\frac{z}{q}$$

permet de passer de (36) à

$$z_1 s_1 - p_1 q_1 - p_1 = 0$$

qui n'en diffère que par la permutation des variables indépen-

---

([1]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, p. 31. *Voir*, en particulier, p. 67.

([2]) Si X_0 était une constante, les équations considérées seraient intégrables par la méthode de Monge ; chacun des systèmes de caractéristiques possédant deux invariants du premier ordre, on ne pourrait leur appliquer aucune transformation (B_1).

dantes ; de même la transformation

$$z_1 = (x+y)q - z$$

remplace (37) par

$$(x+y)s_1 - q_1 = 0\,;$$

il est impossible de poursuivre.

6. En résumé, exception faite pour les équations (36), (37), (33), (34) qui appartiennent à des suites (L) composées de deux ou trois équations (¹), les seules équations qui puissent engendrer une suite (L) sont, avec les équations linéaires, les équations de Moutard ; nous ne nous occuperons pas des équations linéaires qui ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux, nous rappellerons seulement comment on déduit d'une équation de Moutard une suite (L) analogue à la suite d'équations linéaires obtenue par l'application répétée de la transformation de Laplace, le calcul n'offre aucune difficulté, nous nous contenterons d'un raisonnement fondé sur la théorie générale des transformations de Bäcklund (²) qui nous fournira l'occasion d'une remarque intéressante.

Reprenons l'équation (21) que nous pouvons écrire, pour abréger,

$$(21') \qquad s + \frac{d}{dx}(h\,e^{-z}) + e^z q + \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} = 0,$$

en représentant par a, l des fonctions de x, y et en prenant $z + \log X$ comme fonction inconnue à la place de z.

La transformation

$$(38) \qquad \frac{1}{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = p + e^z + l(x,y), \qquad \frac{1}{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -h\,e^{-z} + a$$

établit une correspondance entre les intégrales de (21′) et les intégrales de l'équation linéaire

$$(39) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y} - a\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \left(\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} + l\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \left(\frac{a}{h}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} + h + al\right)\zeta = 0,$$

(¹) Les deux cas particuliers du paragraphe précédent ont été omis dans la Note déjà citée des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

(²) *Voir* en particulier, dans ma Thèse, les n°ˢ 7 et 8.

la fonction

$$\zeta_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - a\zeta$$

satisfait à une équation linéaire

$$(40) \qquad \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x\, \partial y} - a_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - b_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + c_1 \zeta_1 = 0.$$

Dans ce qui suit il sera commode de distinguer les deux systèmes de caractéristiques des équations que nous étudierons en indiquant entre parenthèses la variable indépendante qui conserve une valeur constante le long des caractéristiques du système considéré.

L'équation (40) dérive de (39) par une transformation (B_1) déduite du système (x), tandis que (21′) dérive de la même équation par une transformation (B_2) également déduite de ce système; de plus, toutes les intégrales de (39) qui correspondent à une intégrale de (21′) peuvent être obtenues en multipliant l'une d'entre elles par une constante quelconque ou, pour employer la terminologie de la théorie des groupes, en appliquant à l'une d'entre elles les transformations du groupe engendré par la transformation infinitésimale de contact dont la fonction caractéristique est ζ. A cette transformation infinitésimale de contact correspond pour (40) la transformation ζ_1 qui laisse (40) invariante.

Les équations (21′) et (40), qui dérivent de (39) par des transformations de Bäcklund de première et de seconde espèce déduites du même système de caractéristiques, se changent l'une en l'autre par une transformation (B_2) : à une intégrale de (40) correspond une intégrale de (21′), tandis qu'à une intégrale de (21′) correspondent ∞^1 intégrales de (40). Les intégrales de cette équation qui correspondent à une intégrale de (21′) peuvent être obtenues par l'application des transformations du groupe engendré par la transformation ζ_1; (21′) dérive donc de (40), comme de (39), par une transformation (B_2), mais cette transformation est déduite du système (y) de caractéristiques de (40), tandis que la transformation (38) est déduite du système (x) de caractéristiques de (39).

Imaginons que l'on ait trouvé

$$(41) \qquad s_1 + \frac{d}{dx}(h_1 e^{-z_1}) + e^{z_1} q_1 + \frac{\partial l_1}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} = 0$$

en appliquant à (40) la transformation de Moutard [1] déduite du système (x), les équations (21′) et (41) dérivent de (40) par des transformations (B_2) déduites l'une du système (x), l'autre du système (y) de caractéristiques; de plus, les intégrales de (40) qui correspondent à une intégrale quelconque de (21′) ou de (41) sont obtenues à l'aide du même groupe de transformations de contact [2], on en conclut que (21′) et (41) sont transformées l'une de l'autre par une transformation (B_1) : on pourrait évidemment continuer en considérant la suite de Laplace engendrée par l'équation (39).

7. Le raisonnement précédent est un peu long, mais nous remarquerons qu'il pourrait être répété si, au lieu de la transformation (38), nous avions une autre transformation (B_2), la transformation infinitésimale ζ se trouvant remplacée par une autre transformation infinitésimale de contact qui laisse (39) invariante.

En général l'équation linéaire (39) n'admet que les transformations infinitésimales de contact qui ont 1 et ζ pour fonctions caractéristiques; à ces transformations de contact correspondent les transformations de Lucien Lévy et de Moutard : la première remplace l'équation donnée par une équation également linéaire, la seconde vient d'être étudiée.

Lie a déterminé toutes les équations linéaires qui restent invariantes pour des transformations infinitésimales de contact autres que les précédentes [3], par exemple l'équation

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} + Y(y)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta = 0 \tag{42}$$

et toutes celles de la suite de Laplace qu'elle engendre admettent le groupe des translations parallèles à Ox. De cette dernière équa-

---

(1) Quels que soient les coefficients, une équation linéaire peut toujours être écrite sous une forme semblable à celle de (39) : a_1, h_1, l_1 ayant été ainsi déterminés, une transformation analogue à (38) change (40) en (41).

(2) Dans le n° 8 de ma Thèse j'ai considéré le cas d'une équation de Monge-Ampère qui ne contient pas z; le résultat subsiste évidemment pour une équation invariante relativement à une transformation infinitésimale de contact quelconque.

(3) *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*, t. VI, 1881, p. 238.

tion dérive par une transformation (B_2) une équation de Monge-Ampère dont chaque intégrale correspond à ∞^1 intégrales de (42) déduites de l'une quelconque d'entre elles au moyen de translations parallèles à Ox; en appliquant une transformation analogue à chacune des équations de la suite de Laplace précédente on a une suite (L), mais les variables indépendantes ne sont plus conservées : pour établir ce résultat, il suffirait de répéter le raisonnement du dernier paragraphe en substituant à la transformation infinitésimale ζ la transformation $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

J'ai indiqué (1) la forme des équations transformées de (42) par la méthode qui vient d'être expliquée, les résultats que j'ai obtenus ne laissent d'ailleurs pas d'être un peu compliqués ; en recherchant toutes les équations transformées des équations linéaires signalées par Lie à l'aide de transformations (B_2) correspondant aux transformations infinitésimales de contact particulières qui laissent ces équations linéaires invariantes, on trouverait de même des équations qui engendrent des suites (L) : rien ne prouve, du reste, qu'il n'existe pas d'autres moyens de former de telles suites.

Dans un Mémoire récent (2), M[lle] Louise Petrén remarque (3) que « les transformations d'Imschenetsky sont très peu mentionnées dans la littérature » et estime qu'elles « méritent d'être examinées de plus près » ; l'omission que constate M[lle] Petrén s'explique aisément : en dehors des équations de Moutard dont la théorie se ramène immédiatement à celle des équations linéaires et de quelques équations particulières qu'il est facile d'étudier directement, la transformation d'Imschenetsky ne rend que des services limités, puisqu'il est, en général, impossible de poursuivre en appliquant une méthode semblable à celle qui a été indiquée

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 27 juin 1904.

(2) Extension de la méthode de Laplace aux équations

$$\sum_{i=0}^{n=1} A_{1,i}(x,y)\frac{\partial^{i+1} z}{\partial x\,\partial y^i} + \sum_{i=0}^{n} A_{0,i}(x,y)\frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

(*Lunds Universitets Årsskrift.*, N. F. Afd. 2, Bd. VII, Nr 3, 1911).

(3) Page 5, note 2.

par Laplace dans le cas des équations linéaires, l'attention ne s'est donc pas trouvée appelée sur la transformation découverte par Imschenetsky, et, sans approfondir la question, les géomètres ont été amenés à considérer comme vraisemblable que l'étude détaillée de cette transformation ne saurait présenter un très grand intérêt.