BULLETIN DE LA S. M. F.

E. BOREL

Les ensembles de mesure nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

LES ENSEMBLES DE MESURE NULLE (¹);

PAR M. ÉMILE BOREL.

Un ensemble linéaire E *est dit* de mesure nulle (²) *lorsque, étant donné un nombre arbitrairement petit* ε, *on peut enfermer tous les points de* E *dans des intervalles dont la somme est inférieure à* ε. Pour un ensemble à deux dimensions, la définition est la même : il suffit d'y remplacer le mot *intervalles* par le mot *rectangles;* on peut observer qu'il est équivalent de parler de *carrés* au lieu de *rectangles;* car, étant donné un rectangle, on peut trouver un nombre fini de carrés dont l'aire totale diffère aussi peu que l'on veut de l'aire du rectangle et tels que tout point intérieur au rectangle soit aussi intérieur à l'un de ces carrés. Il est préférable, dans certaines questions, de considérer des carrés au lieu de rectangles; on pourrait aussi remplacer les carrés par des cercles sans altérer la généralité de la définition.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle très important dans la théorie des fonctions de variables réelles et de variables complexes; il est utile de pouvoir comparer entre eux les divers ensembles de mesure nulle; cette comparaison est facilitée par la notion d'ensemble régulier. Nous allons définir d'abord les ensembles réguliers et les points fondamentaux de ces ensembles;

(¹) Cette Note est la reproduction d'une des conférences inaugurales de l'Institut Rice, à Houston (Texas) (10-12 octobre 1912).

(²) Dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, où j'ai donné pour la première fois cette définition, j'emploie l'expression *mesure zéro;* depuis, l'expression *mesure nulle*, employée, je crois, pour la première fois par M. Lebesgue, a prévalu.

nous montrerons ensuite que tout ensemble régulier est équivalent à un autre ensemble régulier dont les points fondamentaux sont choisis d'une manière particulière, sont par exemple les points à coordonnées rationnelles; nous traiterons enfin de la classification des ensembles de mesure nulle ayant des points fondamentaux donnés, cette classification étant basée sur la décroissance asymptotique des intervalles (ou carrés) d'exclusion.

I.

Un ensemble de mesure nulle est dit *régulier* lorsqu'il peut être défini de la manière suivante :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *une infinité énumérable de points, dits* points fondamentaux; *à chaque nombre entier* h *faisons correspondre une infinité de carrés* $C_1^{(h)}, C_2^{(h)}, \ldots, C_n^{(h)}, \ldots$ *dont les aires forment une série convergente et tels que le carré* $C_n^{(h)}$ *renferme à son intérieur* $C_n^{(h+1)}$ *et tende vers* A_n *lorsque* h *augmente indéfiniment. Soit* E_h *l'ensemble des points intérieurs à l'un des carrés* $C_n^{(h)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; *l'ensemble des points intérieurs à tous les* E_h $(h = 1, 2, \ldots)$ *est un ensemble régulier* (qui est évidemment de mesure nulle).

Tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier. En d'autres termes, A étant un ensemble quelconque de mesure nulle, on peut définir un ensemble régulier E de mesure nulle tel que tout point de A appartienne à E. Pour démontrer cette proposition, donnons-nous une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ décroissants et tendant vers zéro, la série $\Sigma\varepsilon_n$ étant supposée convergente. L'ensemble A étant de mesure nulle, nous pouvons définir un ensemble $A^{(h)}$ de carrés (à côtés parallèles aux axes) dont la somme des aires est inférieure à ε_h et tels que tout point de A soit intérieur à l'un des carrés $A^{(h)}$. Nous définirons d'abord les carrés $A^{(1)}$, puis les carrés $A^{(2)}$; s'il y a des portions de ces carrés $A^{(2)}$ qui sont extérieures à tous les carrés $A^{(1)}$, nous pouvons les supprimer comme inutiles; ceci revient à dire que nous ne conservons que les portions des carrés $A^{(2)}$ qui sont intérieures à l'un des carrés $A^{(1)}$; pour procéder d'une manière méthodique et définie d'une manière précise, nous considérons le premier des carrés $A^{(1)}$, soit $A_1^{(1)}$, et nous opérerons successivement sur les portions des carrés successifs $A^{(2)}$ qui sont intérieures à $A_1^{(1)}$; nous continuerons de la même manière avec $A_2^{(1)}$, en ayant soin toutefois de laisser de côté les portions déjà considérées, etc. Chacune de ces opérations nous conduit à considérer des rectangles dont chacun peut être remplacé par une infinité énumérable de carrés (un nombre fini dans des cas particuliers); il suffit, pour former ces carrés suivant une loi déterminée, de construire de proche en proche le plus grand carré possible intérieur au rectangle et dont le sommet le plus rapproché de l'origine des coordonnées O coïncide avec le sommet du rectangle le plus rapproché de O. Si parmi les carrés ainsi définis, il y en a qui ne renferment aucun point de l'ensemble A, nous les supprimerons. Nous pouvons supposer les carrés $A^{(1)}$ rangés par ordre de grandeur décroissante (s'il y en a d'égaux, nous les rangerons d'après les valeurs relatives des abscisses de leurs centres et, si ces abscisses sont égales, d'après les valeurs de leurs ordonnées). Nous rangerons de même les carrés $A^{(2)}$ (après les transformations indiquées), et ainsi de suite.

Nous allons définir un ensemble de carrés $B^{(1)}$, qui comprendra tous les carrés $A^{(1)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, ... De même $B^{(2)}$ comprendra tous les carrés $A^{(2)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(3)}$, ... Il est clair que la somme des carrés $B^{(h)}$ est inférieure à

$$\varepsilon_h + \varepsilon_{h+1} + \ldots.$$

Elle est finie quel que soit h et tend vers zéro lorsque h augmente indéfiniment; tous les carrés $A^{(h)}$ faisant partie des $B^{(h)}$, tout point de A est intérieur à l'un des carrés $B^{(h)}$. Pour que l'ensemble E défini par les $B^{(h)}$ soit régulier, il suffit que l'on puisse numéroter les $B^{(h)}$, $B_1^{(h)}$, $B_2^{(h)}$, ..., $B_n^{(h)}$, ..., de telle manière que $B_n^{(h+1)}$ soit inférieur à $B_n^{(h)}$. On arrive à ce résultat de la manière suivante. Prenons d'abord ceux des carrés $A^{(1)}$, s'il en existe, dont l'aire est supérieure à ε_2 (il n'en existe pas dont l'aire est supérieure à ε_1, puisque la somme de tous les $A^{(1)}$ est inférieure à ε_1); nous désignerons ces carrés par $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, ..., $B_{n_2}^{(1)}$. Prenons ensuite ceux des carrés $A^{(1)}$ dont l'aire est supérieure à ε_3; et désignons-les par $B_{n_2+1}^{(1)}$, $B_{n_2+2}^{(1)}$, ..., $B_{p_2}^{(1)}$. Nous allons considérer maintenant les carrés $A^{(2)}$ d'aire supérieure à ε_3; ils sont rangés dans un ordre déterminé, comme il a été dit; si le premier d'entre eux est intérieur à l'un des $A^{(1)}$ déjà numérotés, par exemple à $B_k^{(1)}$, nous le désignerons par $B_k^{(2)}$, sinon, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+1}^{(1)}$ et par $B_{p_2+1}^{(2)}$; de même, si le second des $A^{(2)}$ considérés est intérieur à l'un des $A^{(1)}$ déjà numérotés et distinct de $B_k^{(1)}$, soit $B_h^{(1)}$, nous le désignerons par $B_h^{(2)}$; s'il n'est intérieur à aucun des $A^{(1)}$ (il ne peut pas être intérieur à un $A^{(1)}$ non numéroté, puisque son aire est supérieure à ε_3 et que les $A^{(1)}$ non numérotés ont une aire inférieure à ε_3) ou s'il est intérieur précisément à $B_k^{(1)}$ qui a déjà été utilisé, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+2}^{(1)}$ et par $B_{p_2+2}^{(2)}$, nous arriverons ainsi à définir un certain nombre de nouveaux carrés $B^{(1)}$, soit $B_{p_2+1}^{(1)}$, $B_{p_2+2}^{(1)}$, ..., $B_{n_2}^{(1)}$ et un certain nombre de carrés $B^{(2)}$, qui comprennent tous les A_2 d'aire supérieure à ε_3.

Considérons maintenant les carrés $A^{(1)}$ d'aire supérieure à ε_4; nous les désignons par $B_{n_2+1}^{(1)}$, $B_{n_2+2}^{(1)}$, ..., $B_{p_3}^{(1)}$, nous procéderons de la même manière que précédemment pour les $A^{(2)}$ dont l'aire est supérieure à ε_4, et nous passerons ensuite aux $A^{(3)}$ dont l'aire est supérieure à ε_4; ceux d'entre eux qui seront intérieurs à des $B^{(2)}$ déjà numérotés prendront les mêmes numéros (chaque numéro n'étant donné, bien entendu, qu'une seule fois); les autres seront désignés à la fois par $B_s^{(1)}$, $B_s^{(2)}$, $B_s^{(3)}$. On continuera indéfiniment de la même manière; les ε_k tendant vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, et chaque opération ne portant que sur un nombre fini de carrés, tout carré appartenant à $A^{(h)}$ figurera dans $B^{(h)}$ avec un rang déterminé. De plus, il est évident que $B_q^{(h)}$ tend vers zéro, quel que soit q lorsque h croît indéfiniment. Il ne pourra pas arriver que certaines suites $B_q^{(1)}$, $B_q^{(2)}$, ..., $B_q^{(r)}$ s'arrêtent, car cela voudrait dire qu'aucun des carrés $A^{(r+1)}$ n'est intérieur à $B_q^{(r)}$, c'est-à-dire que $B_q^{(r)}$ ne renfermerait aucun point de l'ensemble A, contrairement à nos hypothèses. Les ensembles de carrés $B^{(h)}$ définissent donc bien un ensemble régulier E, qui comprend tous les points de A. Notre théorème est établi.

On peut observer que dans la définition de l'ensemble régulier E il y a certaines suites $B_q^{(1)}$, $B_q^{(2)}$, ..., dont un certain nombre de premiers termes sont des carrés qui coïncident entre eux; ce n'est pas là une difficulté; on peut néanmoins, si l'on veut, éviter cette singularité en modifiant un peu les définitions des premiers B_q

d'une telle série ; si $B_q^{(1)}$, $B_q^{(2)}$, $B_q^{(3)}$ par exemple coïncident, on remplacera $B_q^{(2)}$ par $(1+\varepsilon_2)B_q^{(2)}$ et $B_q^{(1)}$ par $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)B_q^{(1)}$ (nous désignons par αC un carré homothétique au carré C par rapport à son centre, avec le rapport d'homothétie α). Ces opérations ont pour résultat de multiplier l'étendue totale des carrés $B^{(h)}$ par un facteur inférieur au produit infini convergent $\Pi(1+\varepsilon_k)$.

On peut observer que l'ensemble régulier E que nous avons défini n'est pas nécessairement le plus simple possible des ensembles réguliers de mesure nulle qui renferment A, mais il importe peu que la démonstration donne *le plus simple;* l'essentiel est de prouver qu'il en existe *un;* il est alors possible de considérer, sans contradiction, l'ensemble de tous les ensembles réguliers de mesure nulle qui contiennent A et l'on peut choisir, dans cet ensemble, sinon le plus simple (qui peut ne pas exister, de même qu'il n'existe pas de *plus petit* nombre rationnel supérieur à $\sqrt{2}$), du moins un ensemble E dont la simplicité est aussi voisine que l'on veut de la simplicité la plus grande possible.

Nous nous occuperons spécialement désormais des ensembles réguliers; un tel ensemble est défini par des points fondamentaux A_n limites des $B_n^{(h)}$ lorsque h augmente indéfiniment et par les grandeurs des carrés d'exclusion $B_n^{(h)}$ attachés à A_n ([1]). L'ensemble dérivé des points fondamentaux A_n est un ensemble fermé A'; dans le cas général, cet ensemble A' se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble réductible; les intervalles d'exclusion qui correspondent aux points de l'ensemble réductible n'ont en commun que les points de cet ensemble réductible lui-même; leur étude ne donne donc rien de nouveau; la partie vraiment intéressante de l'ensemble régulier de mesure nulle est celle qui est attachée aux points de A' qui forment un ensemble parfait; plusieurs cas seraient à distinguer suivant la nature de cet ensemble parfait; nous nous bornerons à considérer le cas où l'ensemble A' comprend tous les points d'une certaine aire, de forme simple, les points A_n sont alors denses dans cette aire ([2]);

([1]) Il semble qu'il y aurait lieu de considérer aussi les positions relatives de A_n dans ces carrés; mais on peut s'arranger, en modifiant légèrement les définitions, pour que tout $B_n^{(h)}$ ait pour centre le point A_n.

([2]) Nous laissons ainsi de côté les ensembles de mesure nulle que l'on pourrait tous les cas où l'aire est d'un seul tenant et à connexion simple se ramènent par la représentation conforme au cas de l'aire limitée par un cercle. Nous allons montrer que, si l'on a deux systèmes différents de points A_n et B_n denses à l'intérieur de cercles égaux, et denses aussi sur les circonférences de ces cercles (¹), on peut établir entre ces points une correspondance continue biunivoque et réciproque, les rapports entre la distance de deux points quelconques A_p, A_q et la distance des points correspondants B_p, B_q étant compris entre deux limites aussi rapprochées que l'on veut de l'unité. Il résultera de cette proposition que nous pouvons, sans diminuer la généralité, supposer que les points fondamentaux d'un ensemble de mesure nulle, lorsque ces points sont denses dans un domaine, coïncident avec un ensemble déterminé dense dans ce domaine, par exemple avec les points de coordonnées rationnelles.

II.

La proposition que nous avons en vue peut s'énoncer sous la forme suivante :

Soient deux cercles égaux C *et* C′, *et deux ensembles énumérables* A *et* B *dont le premier est dense dans* C *et sur la circonférence* C, *le second étant dense dans* C′ *et sur la circonférence* C′; *on peut, étant donné un nombre arbitrairement petit* ε, *numéroter les points de* A *et les points de* B, *de telle manière qu'à un point du contour corresponde un point du*

---

obtenir en supposant que A′ est un ensemble parfait linéaire, ou bien un ensemble parfait qui, sans être linéaire, ne contient aucune aire. Par exemple on peut exclure certaines aires fixes autour des points à coordonnées rationnelles et prendre pour A_n les points à coordonnées algébriques qui ne font pas partie des aires exclues; on peut aussi échafauder en quelque sorte plusieurs constructions analogues, ou même une infinité énumérable quelconque de constructions superposées; on obtient ainsi des domaines fort compliqués au point de vue de l'*Analysis situs*.

(¹) Le cas où ni l'un ni l'autre ensemble n'aurait de points sur les circonférenees se traiterait de la même manière.

contour et que l'on ait, quels que soient p et q,

$$1 - \varepsilon < \frac{A_p A_q}{B_p B_q} < 1 + \varepsilon.$$

On dira que les deux ensembles sont *semblables à* ε *près.*

Pour démontrer ce théorème, nous supposerons que les points des ensembles sont provisoirement rangés dans un ordre déterminé et nous opérerons successivement sur le premier point de A, puis sur le premier point de B, puis sur le second point de A, puis sur le second point de B, etc.; de cette manière nous ne laisserons échapper aucun des points appartenant à l'un des deux ensembles; à chaque point nouveau que nous considérerons dans l'un des ensembles nous ferons correspondre un point déterminé de l'autre ensemble; lorsque le tour de ce nouveau point viendrait, il sera omis.

Nous admettrons que les centres des cercles C et C′ ne font pas partie des ensembles A et B (rien ne serait changé s'ils en faisaient partie *tous deux;* on les ferait se correspondre; si l'un d'eux en faisait partie et non pas l'autre, on ferait une représentation conforme très voisine de la transformation identique et transformant l'un des cercles en un cercle égal dont le centre correspond au centre de l'autre cercle). Nous pouvons alors raisonner sur les deux cercles en les considérant comme superposés, mais cependant distincts. Il est possible de choisir deux axes rectangulaires Ox et Oy tels que les diamètres parallèles aux axes ne renferment pas de points A ni B et que toute parallèle aux axes renferme au plus un point A et au plus un point B (car l'ensemble des directions des droites qui joignent le centre aux points A et aux points B, ou qui joignent les points A entre eux, ou les points B entre eux, ou qui sont perpendiculaires aux directions précédentes, est un ensemble énumérable). Nous nous donnerons une suite illimitée de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \ldots$ tels que l'on ait

$$1 - \varepsilon < \Pi(1 - \varepsilon_n), \qquad \Pi(1 + \varepsilon_n) < 1 + \varepsilon.$$

Le cercle C se trouve partagé par les diamètres parallèles aux axes en quatre régions égales que nous appellerons provisoirement régions 1, 2, 3, 4; le cercle C′ est partagé en régions homologues que nous désignons de la même manière.

Soit A_1 le premier point considéré de A; il est situé, par exemple, dans la région 3; il est *intérieur* à cette région, à moins qu'il ne soit sur la circonférence, cas que nous réservons pour un instant (puisqu'il ne peut pas être sur les diamètres); nous désignerons par A'_1 le point de la région 3 de C' qui coïncide avec A_1 lorsque l'on transporte C' sur C par une translation; si A'_1 appartient à B nous le désignerons par B_1, mais il n'en sera pas ainsi en général. Nous définirons alors un carré de centre A'_1 et tel que le rapport de la plus grande à la plus petite des plus courtes distances d'un point du carré au contour de la région 3 soit inférieur à $1 + \varepsilon_1$. Cette plus courte distance est parallèle à l'un des axes pour les portions rectilignes du contour et coïncide avec le rayon pour la portion curviligne; elle n'est pas nulle pour A'_1 d'après nos hypothèses; la construction du carré est donc toujours possible; nous choisirons B_1 arbitrairement à l'intérieur de ce carré (si l'on veut éviter d'avoir à faire un choix arbitraire entre une infinité énumérable de points, on prendra celui dont le rang est le moins élevé dans le classement provisoire); ce point B_1 étant choisi, nous mènerons par A_1 et B_1 des parallèles aux axes; ces parallèles jointes aux diamètres déjà tracés diviseront chacun des cercles en régions (au nombre de 9) qui se correspondront deux à deux; certaines de ces régions (en fait *une*, en ce cas) sont des rectangles; les autres sont des quadrilatères ou des triangles dont certains côtés sont des parallèles aux axes, l'un des côtés étant un arc de cercle. Si nous convenons d'appeler en tous cas dimensions d'une région les dimensions de ses côtés rectilignes, il résulte de la construction faite que les rapports entre les dimensions homologues de deux régions correspondantes sont compris entre $1 + \varepsilon_1$ et $1 - \varepsilon_1$ (1). Dans le cas, que nous avions réservé, où A_1 est sur la circonférence, on choisira aussi B_1 sur la circonférence, de telle manière que la même condition soit vérifiée relativement aux régions; cela est toujours possible.

Passons maintenant au second point B_2 (que nous prenons dans le second ensemble); nous lui ferons correspondre un point A_2

(1) On a, en effet, $\frac{1}{1+\varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1$ et, d'après notre construction, les rapports des dimensions homologues sont compris entre $1 + \varepsilon_1$ et $\frac{1}{1+\varepsilon_1}$.

situé dans la région homologue et choisi de telle manière que les nouvelles régions obtenues en menant les parallèles aux axes par A_2 et B_2 soient telles que le rapport des dimensions de leurs côtés homologues soit compris entre $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)$ et $(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$; cette condition conduit à assigner au point A_2 une certaine aire intérieure à la région; on choisit A_2 dans cette aire, soit arbitrairement, soit suivant une loi déterminée comme il a été expliqué pour B_1 en ayant soin de prendre A_2 sur la circonférence C si B_2 est sur la circonférence C'; on continuera de la même manière, en prenant alternativement un point dans A et dans B et lui faisant correspondre un point de l'autre ensemble; après n opérations, on aura des régions, en nombre au plus égal à $(n+2)^2$ et telles que le rapport de deux dimensions homologues de deux régions qui se correspondent soit toujours compris entre

$$(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\ldots(1-\varepsilon_n)$$

et

$$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\ldots(1+\varepsilon_n),$$

c'est-à-dire *a fortiori* entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$. Si l'on continue ainsi indéfiniment, tout point de A et tout point de B sera numéroté, après un nombre fini d'opérations, et aura même un rang au plus égal au double du rang dans le classement provisoire; le classement satisfait bien aux conditions requises, car, si l'on considère deux points quelconques A_p, A_q et les points correspondants B_p, B_q, lorsque la division par région aura été poussée assez loin (c'est-à-dire après un nombre d'opérations égal au plus grand des nombres p et q, la différence des abscisses x_p et x_q de A_p et A_q est égale à la somme des côtés rectilignes de certaines régions, et la différence des abscisses x'_p, x'_q de B_p et de B_q est égale à la somme des côtés rectilignes de régions correspondantes; on a donc

$$(1) \qquad 1-\varepsilon < \frac{x'_p - x'_q}{x_p - x_q} < 1+\varepsilon$$

et de même

$$(2) \qquad 1-\varepsilon < \frac{y'_p - y'_q}{y_p - y_q} < 1+\varepsilon,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$1-\varepsilon < \frac{\sqrt{(x'_p - x'_q)^2 + (y'_p - y'_q)^2}}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}} < 1+\varepsilon,$$

ce qui est l'énoncé de notre théorème. On démontrerait de même la proposition analogue relative aux angles α et β que font avec l'axe Ox les droites $A_p A_q$ et $B_p B_q$; on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q},$$
$$\operatorname{tang}\beta = \frac{y'_p - y'_q}{x'_p - x'_q}$$

et les équations (1) et (2) donnent immédiatement

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Supposons les angles α et β positifs ; ils sont très voisins l'un de l'autre et, par suite, $\cot\beta + \operatorname{tang}\alpha$ est supérieur ou égal à 2; on en conclut, en négligeant ε^2,

$$|\alpha - \beta| < |\operatorname{tang}(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} - 1}{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\beta} + \operatorname{tang}\alpha} \right| < \frac{1}{2}\left| \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Les propriétés de la correspondance que nous avons établie entre les deux ensembles dénombrables A et B, denses dans les cercles égaux C et C', mériteraient d'être étudiées d'une manière approfondie; voici quelques remarques qui pourront être utiles dans cette étude. On doit observer d'abord qu'à toute suite partielle A_{n_1}, A_{n_2}, ... tendant vers un point limite P correspond une suite partielle B_{n_1}, B_{n_2}, ..., tendant vers un point limite P' ; la correspondance entre P et P' est bien définie, c'est-à-dire indépendante de la suite partielle choisie; nous avons donc une correspondance biunivoque entre les points de C et les points de C'.

Convenons d'appeler *droites de discontinuité* les parallèles aux axes menées par les points de l'ensemble; à tout point M non situé sur une droite de discontinuité correspond un point homologue M' et la transformation de la région voisine de M en la région voisine de M' peut s'écrire sous la forme

$$x' = (h + \eta)x,$$
$$y' = (k + \eta')y,$$

x, y étant les coordonnées relatives à M, x', y' les coordonnées relatives à M', h, k des constantes comprises entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$, η et η' des fonctions de x et de y qui tendent vers zéro lorsque x^2+y^2 tend vers zéro. Les constantes h et k sont les deux rapports de similitude (parallèlement aux deux axes) des voisinages de M' et de M. Si les points M' et M sont situés sur une ligne de discontinuité, le rapport de similitude dans la direction perpendiculaire à cette ligne n'a pas la même valeur des deux côtés de la ligne; en un point M intersection de deux lignes de discontinuité il y a quatre valeurs pour chaque rapport de similitude, correspondant respectivement aux variations positives et négatives des deux coordonnées. Le rapport de similitude h est ainsi défini dans tout C; c'est une fonction discontinue sur les lignes de discontinuité, mais continue en tout point non situé sur ces lignes.

Si l'on ne sait rien sur le numérotage provisoire des ensembles A et B, on peut dire seulement ceci sur la relation entre ce numérotage provisoire et le numérotage définitif. Le numéro définitif n est au plus égal au double du numéro provisoire p; car tout point numéroté provisoirement A_p ou B_p est choisi après au plus $2p$ opérations; mais on ne peut donner aucune limite supérieure de p en fonction de n.

Il est possible de donner une telle limite, si l'on a eu soin de choisir le numérotage provisoire parmi ceux qui sont *sensiblement homogènes;* voici ce que nous entendrons par là. Par définition, placer un nombre très grand p de points d'une manière *homogène* dans un cercle C, c'est construire un quadrillage formé de carrés et dont p sommets sont intérieurs à C; si α_p est le côté du quadrillage, dans tout carré de côté α_p il y aura un point, et dans tout carré de côté $l\alpha_p$ il y en aura exactement l^2, si l est un nombre entier, et approximativement l^2 si l n'est pas entier. Posons $l\alpha_p = \lambda$ et considérons λ comme fixe et p comme variable; pour chaque valeur de p nous pouvons ainsi calculer le nombre approximatif de points qui sont intérieurs au carré de côté λ; ce nombre est évidemment asymptotiquement égal à $\frac{p\lambda^2}{\pi r^2}$, r étant le rayon du cercle C. On dira que la répartition des points de l'ensemble dénombrable $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ est asymptotiquement homogène, si, quel que soit le carré de côté λ, le nombre λ_p des points d'indice inférieur à p compris à l'intérieur de ce carré à cette même valeur asymptotique $\frac{p\lambda^2}{\pi r^2}$ lorsque p augmente indéfiniment, c'est-à-dire si le rapport $\frac{\pi r^2 \lambda_p}{p\lambda^2}$ entre le nombre λ_p et la valeur asymptotique $\frac{p\lambda^2}{\pi r^2}$ tend vers l'unité lorsque p augmente indéfiniment, et nous dirons que la répartition est *sensiblement* homogène si ce rapport reste compris entre des nombres fixes α et β ($\alpha < 1 < \beta$), indépendants de p et de la position du carré de côté λ.

Dans la définition précédente de la répartition homogène nous n'avons tenu aucun compte des points situés sur le contour; si le contour est un carré de côté a, le nombre maximum de points situés sur le contour pour un quadrillage de côté $\frac{a}{n}$, est $4n$, le nombre total des points étant n^2. D'une manière générale, le nombre des points du contour sera dit *normal* s'il est de l'ordre de grandeur de la racine carrée du nombre total des points. Il faut observer que cette appellation de normal se réfère à l'hypothèse qu'*il y a* des points sur le contour; si les points étaient placés *au hasard*, on devrait admettre que, *dans le cas général*, il n'y a *aucun point* sur le contour; cette hypothèse est d'ailleurs la plus simple. Mais, *s'il y a* des points sur le contour, c'est qu'il existe une certaine relation entre la manière dont est donné le contour et la manière dont sont choisis les points; il est alors naturel de supposer que la probabilité pour qu'un point tombe sur un arc de longueur égale à l'unité est dans un rapport fini avec la probabilité pour que ce point tombe dans une aire égale à l'unité; cette hypothèse est vérifiée, par exemple, si le contour est un cercle et si les points de l'ensemble sont les points à coordonnées rationnelles; on pourrait imaginer d'autres hypothèses, en relation avec des problèmes de la théorie des nombres.

Nous devons donc, dans le cas où il y a des points sur le contour, ajouter à l'hypothèse que la répartition est sensiblement homogène à l'intérieur, l'hypothèse que la répartition est sensiblement homogène sur le contour.

Dans bien des questions, la définition précédente de la répartition sensiblement homogène est insuffisante; il faut ajouter une condition, que l'on peut appeler condition d'homogénéité *intrinsèque*, parce qu'elle fait intervenir les positions relatives des points de l'ensemble. Si l'on considère les sommets d'un quadrillage, que nous prenons comme type de l'homogénéité (il en serait de même pour un réseau de triangles équilatéraux), la plus petite distance de deux sommets est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre total des points ; nous dirons *qu'un ensemble à deux dimensions est intrinsèquement homogène si la plus petite distance entre deux points dont les rangs sont inférieurs à p est de l'ordre de grandeur* (¹) *de* $\frac{1}{\sqrt{p}}$. L'homogénéité de répartition et l'homogénéité intrinsèque sont deux notions indépendantes ; aucune des deux n'est une conséquence nécessaire de l'autre ; cependant, l'homogénéité de répartition est une condition *nécessaire* (non suffisante) de l'homogénéité intrinsèque.

Étant donné un ensemble énumérable dense dans un cercle (ou dans un carré), il est toujours possible de le numéroter de manière à vérifier les conditions d'homogénéité ; un des moyens les plus simples d'y parvenir consiste, après avoir numéroté un certain nombre de points, à tracer un quadrillage assez fin pour comprendre à l'intérieur du cercle un peu plus de carrés qu'il n'y a de points numérotés, et pour que chaque carré renferme au plus un point numéroté; il y a alors certains carrés qui ne renferment pas de points numérotés ; on numérotera dans chacun de ces carrés *un* point de l'ensemble, en le choisissant à l'intérieur d'un carré concentrique de dimensions deux fois plus petites et prenant le point d'indice le moins élevé dans le numérotage provisoire (ceci afin d'être sûr de n'oublier aucun point). Tout numérotage qui satisfait aux deux conditions d'homogénéité sera dit *normal*. Il est aisé de se rendre compte que les procédés de numérotage habituellement indiqués pour les ensembles dénombrables usuels (nombres rationnels, quadratiques, algébriques) conduisent à des numérotages normaux.

Lorsque les deux ensembles denses dans C et C′ sont numérotés normalement, il est possible de s'arranger de manière que la correspondance biunivoque établie entre leurs éléments soit elle-même normale, c'est-à-dire qu'il existe entre le rang provisoire p et le rang définitif n des inégalités de la forme

$$p^{\alpha} < n < p^{\beta},$$

(¹) Une condition analogue doit être vérifiée pour la plus courte distance à la frontière des points très voisins de cette frontière et non situés sur elle.

les exposants α et β étant des nombres finis qui ne dépendent que du nombre de dimensions de l'ensemble considéré et du choix de la série convergente $\Sigma \varepsilon_n$ dont on a fait usage. (Pour que l'on puisse être assuré que α et β soient finis, il faut qu'il existe un nombre fini h tel que $\lim n^h \varepsilon_n = 0$.)

On peut supposer que l'ensemble A se subdivise en deux ensembles, tous deux partout denses A′ et A″, et que B se subdivise de même en deux ensembles partout denses B′ et B″. Il est alors aisé de prouver que la correspondance peut être établie de manière que les points de A′ correspondent aux points de B′ et les points de A″ aux points de B″; il ne suffirait pas, bien entendu, pour cela, d'appliquer le théorème général, d'abord à A′ et B′, puis à A″ et B″, car la correspondance entre les points P et P′ intérieurs à C et C′, ainsi établie, ne serait généralement pas la même pour les deux correspondances. On étendrait aisément ceci au cas où A renferme une infinité énumérable de parties aliquotes partout denses, et où il en est de même de B. On peut établir, par exemple, une correspondance biunivoque et continue entre les nombres rationnels intérieurs à un intervalle et les nombres algébriques intérieurs à un intervalle égal, de telle manière qu'aux nombres rationnels dont le dénominateur renferme h facteurs premiers distincts et h seulement correspondent les nombres algébriques qui vérifient une équation irréductible de degré h (pour $h = 1$ ce sont les nombres rationnels ; si l'on voulait considérer seulement les nombres algébriques non rationnels, on dirait équation irréductible de degré $h + 1$).

III.

Considérons maintenant deux ensembles réguliers de mesure nulle, dont les points fondamentaux sont précisément les points des ensembles énumérables A et B intérieurs aux cercles C et C′. Si nous supposons que les carrés d'exclusion attachés aux points fondamentaux correspondants ont pour côtés des droites qui se correspondent, il est évident que les deux ensembles se correspondront point par point dans la correspondance biunivoque que nous avons établie entre les points P intérieurs à C et les points P′ intérieurs à C′. En d'autres termes, *étant donné un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux* B *sont denses dans*

C′, *on peut définir un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont les points d'un ensemble déterminé* A *dense dans* C, *de telle manière que les deux ensembles se correspondent d'une manière biunivoque et continue* (le rapport de similitude étant compris entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$).

Donc, pour étudier les ensembles réguliers de mesure nulle dont les points fondamentaux sont denses dans un domaine, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que ces points fondamentaux sont, par exemple, les points à coordonnées rationnelles; l'étude en est alors facilitée par l'emploi des propriétés des fractions continues. En particulier, il est très facile de démontrer cette proposition importante : *Tout ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont denses dans un domaine a la puissance du continu.* En d'autres termes, si l'on dispose arbitrairement de la décroissance des carrés d'exclusion autour des points fondamentaux, il n'est pas possible de rendre cette décroissance assez rapide pour que les points fondamentaux soient les seuls points de l'ensemble. Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cas d'une seule dimension ; la démonstration est au fond la même quel que soit le nombre de dimensions. Soient $A_n^{(h)}$ les intervalles d'exclusion attachés aux points A_n. Pour chaque valeur de h on peut définir une fonction positive croissante $\varphi_h(n)$ telle que l'on ait

$$\text{mesure}(A_n^{(h)}) > \frac{1}{\varphi_h(n)}.$$

D'autre part, étant donnée une suite énumérable de fonctions croissantes $\varphi_h(n)$, il est possible, d'après un théorème bien connu de Paul du Bois-Reymond, de construire une fonction $\varphi(n)$ croissant plus rapidement que chacune de ces fonctions $\varphi_h(n)$. Cette fonction $\varphi(n)$ étant connue, la théorie des fractions continues permet de définir une infinité de nombres irrationnels x (infinité ayant la puissance du continu) tels qu'il existe pour chacun d'eux une infinité énumérable de relations de la forme

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{\varphi(n)},$$

m et n étant des entiers. Un tel nombre x appartient, quel que soit h, à au moins l'un des intervalles $A_n^{(h)}$; il fait donc partie de l'ensemble défini par les points A_n et ces intervalles d'exclusion. Pour définir les nombres x et prouver que leur ensemble a la puissance du continu, il suffit de considérer une fraction continue dans laquelle les quotients incomplets ont une croissance très rapide ; si l'on pose

$$P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1},$$
$$Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1},$$

on admettra que l'on a

$$a_n > \varphi(Q_n),$$

la fonction $\varphi(n)$ étant la fonction que nous venons de définir, on a bien, d'après les propriétés des réduites,

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{\varphi(Q_n)}.$$

Or, l'ensemble des systèmes de nombres entiers a_n, qui vérifient les relations $a_n > \varphi(Q_n)$, a évidemment la puissance du continu (1).

Si l'on voulait avoir des intervalles d'exclusion assez rapidement décroissants pour que l'ensemble défini par ces intervalles se compose des seuls points fondamentaux, il faudrait que l'ensemble des fonctions $\varphi_h(n)$ renferme des fonctions à croissance plus rapide que celle de toute fonction donnée d'avance $\varphi(n)$. Cela n'est pas possible, d'après le théorème de Paul du Bois-Reymond, si les indices h sont énumérables ; il faudrait donc attacher à chaque point fondamental une infinité transfinie d'intervalles d'exclusion, les fonctions $\varphi_\alpha(n)$ correspondantes (α désignant un nombre transfini) étant telles que toute fonction croissante $\varphi(n)$ soit dépassée par l'une d'elles. On sort ainsi du domaine des définitions exprimables au moyen d'un nombre fini de mots.

Pour classer les ensembles réguliers de mesure nulle, il vaut mieux considérer, au lieu des fonctions $\varphi_h(n)$ que nous avons définies, d'autres fonctions $\psi_h(n)$ définies par les relations

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure } A_p^{(h)} = \frac{1}{\psi_h(n)}.$$

(1) Chacun des a_n peut être pair ou impair ; l'ensemble des x comprend donc un ensemble de même puissance que l'ensemble des nombres tels que 0,1010110... écrits dans le système de numération binaire.

La convergence des séries formées par les intervalles d'exclusion de rang h entraîne le fait que les fonctions $\psi_h(n)$ croissent indéfiniment avec n. D'après le théorème de Paul du Bois-Reymond, il existe une fonction $\psi(n)$ croissant moins vite que chacune d'elles et tendant cependant vers $+\infty$ en même temps que n. On a, quel que soit h, pour n assez grand,

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure}\, A_p^{(h)} < \frac{1}{\psi(n)},$$

c'est-à-dire que les diverses séries formées par les intervalles d'exclusion convergent toutes plus rapidement que la série

$$\sum \left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)}\right].$$

Plus la croissance de $\psi(n)$ est rapide, moins l'ensemble de mesure nulle renferme de points, car les intervalles d'exclusion décroissent alors plus rapidement. Il est naturel de prendre la fonction $\psi(n)$ comme définissant ce que l'on peut appeler l'ordre asymptotique de l'ensemble régulier de mesure nulle. On pourra noter ces ordres au moyen des notations employées pour les ordres d'infinitude ; $\psi(n) = n^p$ sera dit d'ordre p, $\psi(n) = e^n$ sera d'ordre ω ; e^{e^n} d'ordre ω^2, etc. Ce sont les ensembles d'ordre ω^2 qui interviennent dans la définition des fonctions monogènes non analytiques.

IV.

Il n'est peut-être pas inutile d'insister un peu sur les conclusions générales qui se dégagent de cette étude rapide des ensembles de mesure nulle.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle fondamental dans la théorie des fonctions ; il est, en effet, toujours possible d'enfermer les singularités des fonctions bornées dans des ensembles qui sont, soit de mesure nulle, soit de mesure aussi petite que l'on veut. D'autre part, les ensembles qui ne sont pas de mesure nulle sont formés d'une matière simple, avec des ensembles continus positifs ou négatifs ; ils sont hétérogènes au continu ; les ensembles de mesure nulle peuvent être, au contraire, sensiblement homogènes au continu, c'est-à-dire identiques à eux-mêmes dans des intervalles aussi petits que l'on veut. Pour ces diverses raisons, la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale ; mais c'est en même temps une notion si générale que l'on ne peut espérer approfondir réellement l'étude des propriétés des fonctions qu'en étudiant de plus près cette notion générale, c'est-à-dire en ne confondant pas entre eux tous les ensembles de mesure nulle. La classification basée sur la décroissance asymptotique des intervalles d'exclusion me paraît être un premier pas dans cette étude qui s'impose aux analystes. Il en est d'ailleurs évidemment dans cette question comme dans toutes celles où intervient la notion générale de croissance (comme, par exemple, dans la théorie de la convergence des séries à termes positifs) ; il se présente des difficultés transfinies que l'on ne peut espérer surmonter entièrement ; mais, d'autre part, les problèmes qui se présentent réellement sont généralement, sinon toujours, indépendants de ces difficultés (c'est ainsi que les critères usuels de convergence des séries à termes positifs, quoique théoriquement très particuliers, sont pratiquement suffisants pour traiter les séries qui se présentent dans toutes les recherches analytiques). On peut légitimement espérer qu'il en sera de même dans la classification des ensembles de mesure nulle ; théoriquement, la complexité de cette classification dépasse celle de l'étude des séries à termes positifs, étude qui ne sera jamais achevée ; pratiquement, un nombre relativement restreint de classes simples suffira pour les besoins effectifs de l'analyse.

En terminant, j'attire l'attention sur une conséquence remarquable du théorème sur la correspondance entre deux ensembles dénombrables partout denses. Il peut sembler naturel, si l'on passe du fini à l'infini dénombrable, de supposer que les positions d'équilibre des centres de gravité des molécules d'un corps solide forment un ensemble dénombrable dense ; mais, *a priori*, il aurait pu sembler que c'était une hypothèse absolument arbitraire que de les supposer coïncider avec les points à coordonnées rationnelles ; cette définition arithmétique simple semblait n'avoir rien à faire avec la conception physique. En fait, elle n'est évidemment pas nécessaire, mais elle est aussi générale que toute autre : le point important est qu'elle vérifie, comme nous l'avons constaté, les conditions d'homogénéité de répartition et d'homogénéité intrinsèque.

Les considérations arithmétiques sur l'approximation des nombres par les nombres rationnels sont ainsi l'image de propriétés générales des ensembles denses.