BULLETIN DE LA S. M. F.

G. RÉMOUNDOS

Généralisation d'un théorème de M. Landau

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__19_1>

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. LANDAU;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. En 1904, M. Landau [1] a démontré le théorème suivant :

Soit une fonction analytique

$$H(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m + \ldots,$$

régulière en $z = 0$, *pour laquelle*

$$\alpha_1 \neq 0,$$

il existe un cercle

$$|z| < R = R(\alpha_0, \alpha_1)$$

dont le rayon dépend seulement de α_0 *et* α_1 *(et non des autres coefficients* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m, \ldots$*), à l'intérieur duquel la fonction* $H(z)$ *possède un point singulier ou prend au moins une fois l'une des valeurs zéro et un.*

C'est une généralisation très importante d'un célèbre théorème de M. Picard.

Dans un travail qui paraîtra prochainement dans les *Annales de l'École normale supérieure de Paris*, nous établissons une extension du théorème ci-dessus indiqué de M. Landau à une classe très étendue de fonctions qui ne sont pas régulières en $z = 0$.

Je me propose de donner maintenant une nouvelle extension du

---

(1) *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (*Sitzungsberichte der Königlich. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1904, p. 1118-1133).

théorème de M. Landau, moins générale, mais présentant un intérêt particulier. Cette nouvelle généralisation est, pour ainsi dire, plus fidèle, et le théorème, que nous allons établir ici, a un énoncé plus simple et presque identique à celui de M. Landau. Elle ne concerne que les fonctions algébroïdes et finies en $z = 0$, ce point étant un point critique algébrique pour certaines de leurs branches; au contraire, la première généralisation (qui va paraître dans les *Annales de l'École normale supérieure*) concerne aussi des fonctions qui sont infinies en $z = 0$, ou pour lesquelles le point $z = 0$ peut être critique transcendant.

Dans la nouvelle généralisation, il s'agit des points singuliers de la fonction elle-même, qui prend ou non une fois au moins l'une des valeurs *zéro* et *un*, tandis que dans la première il s'agit des points singuliers d'une autre fonction qui se rattache à la fonction donnée. Les deux généralisations ne sont pas de même nature.

2. Soit $u = \varphi(z)$ une fonction multiforme dans le voisinage du point $z = 0$, qui est pour elle un point critique algébrique. Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llllll} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & \ldots, & u_{1n_1} & \text{du système } S_1, \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & \ldots, & u_{2n_2} & \quad\text{»}\qquad S_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots. & \quad\text{»}\qquad \ldots, \\ u_{m1}, & u_{m2}, & u_{m3}, & \ldots, & u_{mn_m} & \quad\text{»}\qquad S_m, \end{array}\right.$$

les divers systèmes circulaires $S_1, S_2, \ldots, S_m$ des branches de la fonction donnée $u = \varphi(z)$. Soient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varphi_1(z) = \alpha_{10} + \alpha_{11} z^{\frac{1}{n_1}} + \alpha_{12} z^{\frac{2}{n_1}} + \ldots & \text{pour le système } S_1, \\ \varphi_2(z) = \alpha_{20} + \alpha_{21} z^{\frac{1}{n_2}} + \alpha_{22} z^{\frac{2}{n_2}} + \ldots & \qquad\text{»}\qquad S_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad\text{»}\qquad \ldots, \\ \varphi_m(z) = \alpha_{m0} + \alpha_{m1} z^{\frac{1}{n_m}} + \alpha_{m2} z^{\frac{2}{n_m}} + \ldots & \qquad\text{»}\qquad S_m, \end{array}\right.$$

les séries qui représentent dans le voisinage de $z = 0$ les branches de chacun des systèmes circulaires. Nous supposons, bien entendu, que la fonction donnée soit finie en $z = 0$. En posant

$$z^{\frac{1}{n_1}} = \omega_1, \qquad z^{\frac{1}{n_2}} = \omega_2, \qquad \ldots, \qquad z^{\frac{1}{n_m}} = \omega_m,$$

nous obtenons les fonctions holomorphes dans le voisinage des $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, ..., $\omega_m = 0$:

$$(3)\quad \begin{cases} f_1(\omega_1) = \alpha_{10} + \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{12}\omega_1^2 + \ldots, \\ f_2(\omega_2) = \alpha_{20} + \alpha_{21}\omega_2 + \alpha_{22}\omega_2^2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(\omega_m) = \alpha_{m0} + \alpha_{m1}\omega_m + \alpha_{m2}\omega_m^2 + \ldots. \end{cases}$$

D'après le théorème [1] de M. Landau, applicable à ces fonctions, il existe un nombre

$$L(\alpha_{k0}, \alpha_{k1}) \qquad [k = 1, 2, 3, \ldots, m]$$

ne dépendant que des coefficients α_{k0} et α_{k1}, tel que, à l'intérieur du cercle

$$|\omega_k| < L(\alpha_{k0}, \alpha_{k1}) \qquad [k = 1, 2, 3, \ldots, m],$$

la fonction $f_k(\omega_k)$ ou bien possède un point singulier, ou bien prend une fois au moins l'une au moins des valeurs *zéro* et *un*. Il en est de même des fonctions

$\varphi_1(z) = f_1(\omega_1)$	dans le cercle	$\lvert z \rvert < [L(\alpha_{10}, \alpha_{11})]^{n_1}$,
$\varphi_2(z) = f_2(\omega_2)$	»	$\lvert z \rvert < [L(\alpha_{20}, \alpha_{21})]^{n_2}$,
....	»	....................,
$\varphi_m(z) = f_m(\omega_m)$	»	$\lvert z \rvert < [L(\alpha_{m0}, \alpha_{m1})]^{n_m}$,

avec la seule différence que ces fonctions, lorsqu'elles ne prennent ni la valeur *zéro* ni la valeur *un* dans les cercles ci-dessus indiqués, possèdent au moins un point singulier *différent de* $z = 0$.

En effet, d'une part, nous avons

$$|z| = |\omega_1|^{n_1} = |\omega_2|^{n_2} = \ldots = |\omega_m|^{n_m};$$

d'autre part, nous remarquons que si, par exemple, à l'intérieur du cercle

$$|z| < [L(\alpha_{10}, \alpha_{11})]^{n_1},$$

la première des séries (2) est convergente et ne prend ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*, alors, à l'intérieur du cercle

$$|\omega_1| < L(\alpha_{10}, \alpha_{11}),$$

la première des séries (3) sera aussi convergente et ne prendra ni

---

[1] Il faut, bien entendu, supposer : $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$, ..., $\alpha_{m1} \neq 0$.

la valeur *zéro* ni la valeur *un*, ce qui est absurde; d'ailleurs, il est évident que si la fonction $\varphi_1(z)$ est holomorphe dans le voisinage d'un point $z = z_1$, la fonction $f_1(\omega_1)$ sera aussi holomorphe dans le voisinage du point $\omega = z_1^{\frac{1}{n_1}}$; inversement, si la fonction $f_1(\omega_1)$ est holomorphe dans le voisinage d'un point $\omega = \omega_1 \neq 0$, la fonction $\varphi_1(z)$ sera aussi holomorphe dans le voisinage du point correspondant $z = \omega_1^{n_1}$.

3. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème. — *Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde et finie en $z = 0$, ce point étant pour elle un point critique algébrique, et soient*

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{10} + \alpha_{11} z^{\frac{1}{n_1}} + \alpha_{12} z^{\frac{2}{n_1}} + \ldots, \\ \alpha_{20} + \alpha_{21} z^{\frac{1}{n_2}} + \alpha_{22} z^{\frac{2}{n_2}} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{m0} + \alpha_{m1} z^{\frac{1}{n_m}} + \alpha_{m2} z^{\frac{2}{n_m}} + \ldots, \end{array}\right.$$

les séries qui représentent dans le voisinage de $z = 0$ les branches des divers systèmes circulaires. Si nous supposons

$$\alpha_{11} \neq 0, \qquad \alpha_{21} \neq 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{m1} \neq 0,$$

il existe un nombre positif

$$R = g(\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m0}, \alpha_{m1})$$

dépendant seulement des deux premiers coefficients de chacune des séries (4)

$$\alpha_{10}, \alpha_{11}, \qquad \alpha_{20}, \alpha_{21}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{m0}, \alpha_{m1}$$

(*et non des autres coefficients* $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \ldots, \ldots, \alpha_{m2}, \alpha_{m3}, \ldots$), *tel que, à l'intérieur du cercle*

$$|z| < R = g(\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m0}, \alpha_{m1}),$$

la fonction donnée (¹) $u = \varphi(z)$, *ou bien possède un point singulier différent de* $z = 0$ (*en dehors du* $z = 0$ *qui est déjà un point*

(¹) C'est-à-dire l'une au moins de ses branches.

critique), ou bien prend une fois au moins l'une des valeurs zéro et un.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, dans le cas où la fonction donnée $u = \varphi(z)$ possède une infinité de branches formant des systèmes circulaires, il y aura une infinité de séries (4) et le point $z = 0$ sera un point critique algébrique des branches formant un système circulaire et un point régulier pour les branches isolées qui ne rentrent pas dans des systèmes circulaires. Dans ce cas, le théorème ci-dessus énoncé est aussi vrai.

Nous remarquons aussi que, dans le tableau (4), il peut y avoir des séries entières (c'est-à-dire des séries ne contenant que des puissances entières de z) appartenant aux branches isolées, c'est-à-dire aux branches qui sont holomorphes en $z = 0$. Notre énoncé se rapporte à l'ensemble des branches de la fonction donnée $u = \varphi(z)$.

4. Le rayon R du cercle indiqué dans l'énoncé de notre théorème peut, évidemment, être pris égal au plus petit des nombres

$$(5) \qquad [L(\alpha_{10}, \alpha_{11})]^{n_1}, \quad [L(\alpha_{20}, \alpha_{21})]^{n_2}, \quad \ldots, \quad [L(\alpha_{m0}, \alpha_{m1})]^{n_m}.$$

Si nous considérons le cercle, dont le rayon est égal au plus grand de ces nombres, à l'intérieur de ce cercle le théorème sera valable pour les branches de chacun des systèmes circulaires.

Nous pouvons, bien entendu, limiter avec plus de précision le rayon R, en utilisant les fonctions $\varphi(\alpha_{10}, \alpha_{11})$, $\varphi(\alpha_{20}, \alpha_{21})$, ..., $\varphi(\alpha_{m0}, \alpha_{m1})$ indiquées par M. Landau (1) et déterminées par M. Carathéodory (2). On pourrait aussi donner à $L(\alpha_{10}, \alpha_{11})$, $L(\alpha_{20}, \alpha_{21})$, ... les valeurs élémentaires données par MM. Hurwitz (3) et Schottky (4).

(1) LANDAU, *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Jahrgang 51, 1906).

(2) CARATHÉODORY, *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. 141, 1905, p. 1213-1215).

(3) HURWITZ, *Ueber die Anwendung der elliptischen Modulfunctionen auf einen Satz der allgemeinen Functionentheorie* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Bd. 49, 1904, p. 242-253).

(4) SCHOTTKY, *Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Unglei-*

Nous remarquons enfin que, si nous voulons utiliser les résultats récents établis par M. Montel [1], notre procédé permettrait d'obtenir pour les fonctions multiformes dans le voisinage de $z = 0$ des résultats plus généraux que ceux qui sont jusqu'ici énoncés.

---

chungen (*Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1904, p. 1244-1262).

[1] P. Montel, *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Comptes rendus*, 18 novembre 1912, p. 1000-1003).