BULLETIN DE LA S. M. F.

J. A. DE SÉGUIER

Sur les produits directs et sur la structure de leurs diviseurs maximums

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 164-169

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__164_1>

SUR LES PRODUITS DIRECTS ET SUR LA STRUCTURE DE LEURS DIVISEURS MAXIMUMS;

PAR M. DE SÉGUIER.

1. Dans une Note précédente [1] j'ai énoncé un théorème de M. Remak sous la forme suivante :

Soit $A' = \Pi_1^{n'} A'_i$ *un groupe centralement isomorphe à* $A = \Pi_i^n A_i$ *dans le produit direct de* A *par un groupe abélien quelconque* $K(AK = A'K)$, *les* A_i *et les* A'_i *étant des facteurs directs réduits. Alors* $n' = n$, *et l'on peut établir entre* A *et* A' *une correspondance centrale dans* AK *où chaque* A'_i *correspond centralement à un* A_i.

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XL, p. 219-223, 1912. Le lecteur est prié de se reporter à cette Note pour la terminologie et les références. J'ignorais alors le travail de M. Schmidt, *Ueber die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, paru dans les *Annales de l'Université de Kiew* au commencement de 1912.

Quelques inadvertances s'étant glissées dans ma démonstration (¹), je voudrais aujourd'hui y revenir.

On peut admettre la proposition quel que soit K pour des groupes A et A′ d'ordre moindre.

Soit $\mathfrak{S}$ une correspondance centrale de A à A′ dans AK.

Supposons d'abord qu'un A_i tel que A_1 soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i tel que A_1, et soit $\overline{A}$ le groupe déduit de A en y remplaçant A_1 par A'_1. Il résulte immédiatement des équations de A qu'on obtient une correspondance centrale $\overline{\mathfrak{S}}$ de $\overline{A}$ à A′ dans AK en remplaçant dans $\mathfrak{S}$ chaque élément de A_1 par l'élément de A'_1 qui lui correspond (par $\mathfrak{S}$). Soit $\Pi_1^{n'} a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) l'élément de A′ qui répond par $\overline{\mathfrak{S}}$ à $a'_1 \Pi_2^{n'} a_i$ (a_i étant dans A_i) de $\overline{A}$. La considération des éléments où $a'_1 = 1$ montre que $\Pi_2^n A_i$, répond, par $\mathfrak{S}$ comme par $\overline{\mathfrak{S}}$ à $\Pi_2^{n'} A'_i$, et l'on est ramené à des groupes d'ordre inférieur (²).

J'admettrai donc désormais qu'aucun A_i n'est centralement isomorphe dans AK à un A'_i.

On peut de plus admettre qu'aucun des A_i, A'_i n'est abélien. Car soit, par exemple, $A_1 = \{a_1\}$ abélien réduit, donc cyclique d'ordre p^α (p premier), et supposons qu'à a_1 répond par $\mathfrak{S}$ l'élément $\Pi_1^{n'} a'_i$ de A′, a'_i étant dans A'_i et a'_1, par exemple, d'ordre p^α. Soit α le correspondant par $\mathfrak{S}$ de $\Pi_2^{n'} a'_i$. A $a_1 \alpha^{-1} = \overline{a_1}$ répondra a'_1. Soit $\overline{A}$ le groupe centralement isomorphe à A dans AK déduit de A en y remplaçant a_1 par $\overline{a_1}$, donc A_1 par $\overline{A_1} = \{\overline{a_1}\}$. Comme $\overline{A_1}$ est facteur direct de tout diviseur de A qui le contient, $\{a'_1\}$ le sera de A'_1. Mais A'_1 est réduit: Donc $A'_1 = \{a'_1\}$, et A'_1 est centralement isomorphe dans AK à A_1.

Désignons maintenant par X_i le groupe répondant à A'_i par $\mathfrak{S}$ dans A, et soit $X_{i\rho}$ le constitutif de X_i dans A_ρ. Chaque élément de $X_{i\rho}$ étant permutable à chaque élément de $X_{k\rho}$ (pour $i \neq k$), le central de $X_{i\rho}$ divise $A_{\rho 0}$.

Supposons A'_n d'ordre maximum parmi les A_i, A'_i (et $n > 1$). $X_{n\rho}$ ne peut être égal à A_ρ, quel que soit ρ, car $X_{1\rho}$, dont chaque

(¹) Cf. *Bulletin de la Société mathématique de France* (*loc. cit.*).

(²) Ces remarques contiennent en même temps les théorèmes accessoires énoncés par M. Remak et par M. Schmidt (*loc. cit.*).

élément est permutable à chaque élément de $X_{n\rho}$, serait dans $A_{\rho 0}$ quel que soit ρ, et X_1 serait abélien, et par suite aussi A'_1. Donc $\Pi_1^{n'} X_{n\rho} = \mathfrak{X}_n$ est $< A$, et comme $A = \Pi_1^n X_i$, $\mathfrak{X}_n$, qui contient X_n, a la forme $X_n Y$, Y étant le constitutif de $\mathfrak{X}_n$ dans $\Pi_1^{n-1} X_i$. Or, $\mathfrak{X}_n$ étant $< A$, on peut admettre le théorème quand on y remplace A par $X_n Y$, A' par $\mathfrak{X}_n$, et K par 1. Mais alors X_n devrait | être centralement isomorphe à un des X_{ni} tel que X_n, dans $\mathfrak{X}_n$ et par suite dans A (le central de $\mathfrak{X}_n$ divise A_0). D'ailleurs, A'_n étant d'ordre maximum, $X_{nr} = A_r$. Donc A'_n serait centralement isomorphe à A_r (1) contre l'hypothèse.

2. Je ne me suis pas servi ici de la structure des diviseurs maximums de A comme j'en avais d'abord eu la pensée. Mais cette structure étant intéressante par elle-même je vais la déterminer.

Soit $G = \Sigma g$ un diviseur de $A = \Pi_1^n A_i$, les A_i étant facteurs directs; le plus grand commun diviseur de G avec $A_i A_k \ldots A_l$ (2); $\mathfrak{D}_{ik\ldots l}$ le constitutif de G dans $A_i A_k \ldots A_l$; si $g = \Pi_1^n g_i$ étant dans A_i, je dirai que g_i est le constitutif de g dans A_i (le constitutif de g dans $A_{ik\ldots l}$ est donc $g_i g_k \ldots g_l$) et que chaque g_i *répond* ou *est associé* à chacun des autres g_i de $\Pi_1^n g_i = g$ et à g dans G; si les éléments d'une partie P_i de A_i répondent dans G aux éléments d'une partie P_k de A_k et à ceux d'une partie P de G, je dirai de même que P_i *est associé* à P_k ou *répond* à P_k et à P dans G. Pour que G soit normal dans A, il faut et suffit que, quels que soient i, k, ..., l, $D_{ik\ldots l}$ soit normal dans $A_i A_k \ldots A_l$, et que $\mathfrak{D}_{ik\ldots l} | D_{ik\ldots l}$ divise le central de $A_i A_k \ldots A_l | D_{ik\ldots l}$. Si donc G est normal dans A, et si $\mathfrak{D}_{ik\ldots l} = A_i A_{k\ldots l}$, $A_i A_k \ldots A_l | D_{ik\ldots l}$ est abélien.

Si $r (\geqq 1)$ *est la valeur minima de k pour laquelle un des* $\mathfrak{D}_{i_1\ldots i_k}$ *soit* $< A_{i_1} \ldots A_{i_k}$, *je dirai que* G *est un diviseur de* A *d'espèce r* relativement à A_1, ..., A_n (on verra tout à l'heure que si les A_i sont réduits et si G est maximum, le nombre r a un sens indépendant du choix de A_1, ..., A_n; je dirai donc alors que r

---

(1) Le raisonnement qui établit l'isomorphisme central de A'_n à A_r dans le cas où aucun des A_i, A'_i n'est abélien a déjà été employé par M. Schmidt, qui achève autrement la démonstration.

(2) Les considérations qui suivent doivent remplacer le n° 2 de ma précédente Note. Dans la formule $A_i | D_i \equiv G | \Pi_1^n D_k$ du n° 1 de cette Note, il faut évidemment mettre $D_i D_{1,\ldots\, i-1\, i+1\, \ldots\, n}$ au lieu de $\Pi_1^n D_k$.

est l'*espèce absolue* ou simplement l'*espèce* de G). Si, G étant d'espèce r relativement à $A_1, \ldots, A_n$, $\mathcal{A}_{1\ldots r}$ est $< A_1 \ldots A_r$, G est $\leqq \mathcal{A}_{1\ldots r}\Pi_{r+1}^{n} A_i$. Si donc G est maximum dans A et d'espèce r relativement à $A_1, \ldots, A_n$, il est de la *forme* $B\Pi_{r+1}^{n} A_i$, B étant maximum dans $A_1 \ldots A_r$ et d'espèce r.

Si G est maximum dans A, ou seulement normal maximum dans A, $\mathcal{A}_{i_1\ldots i_k} | D_{i_1\ldots i_k}$ est simple, sans quoi, parmi les groupes résultant des divers homomorphismes entre $\mathcal{A}_{i_1\ldots i_k}$ et $\mathcal{A}_{i_{k+1}\ldots i_n}$ (*E.*, 65), il y en aurait un $>$ G et $<$ A, et normal si G est normal. Si donc G est maximum et d'espèce n relativement à $A_1, \ldots, A_n$, $A_{i_1\ldots i_k} | D_{i_1\ldots i_k}$ est simple.

D'après ce qu'on vient de voir la formation des diviseurs maximums d'un produit direct revient à celle des diviseurs maximums d'espèce n d'un produit direct de $n (\geqq 3)$ facteurs, relativement à ces facteurs.

Soit donc G maximum d'espèce $n \geqq 3$ dans $A = \Pi_1^n A_i$ relativement aux facteurs directs $A_1, \ldots, A_n$. Alors $D_{2\ldots n}$ est normal maximum dans $A_2 \ldots A_n$. Soient $\mathcal{A}$ le constitutif de $D_{2\ldots n}$ dans A_2 et $\mathcal{B}$ son constitutif dans $A_3 \ldots A_n$. Les plus grands communs diviseurs respectifs de $D_{2\ldots n}$ avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont D_2 et $D_{3\ldots n}$. D_2 est normal maximum dans $\mathcal{A}$ et dans A_2; $D_{3\ldots n}$ est normal maximum dans $\mathcal{B}$ et dans $A_3 \ldots A_n$. Mais, $D_{2\ldots n}$ étant normal dans $A_2 \ldots A_n$, $\mathcal{A}$ est normal dans A_2, et $\mathcal{B}$ dans $A_3 \ldots A_n$. Donc $\mathcal{A} = A_2$, et $\mathcal{B} = A_3 \ldots A_n$. Et comme $D_{2\ldots n}$ est normal dans $A_2 \ldots A_n$, $A_2 | D_2$ est abélien et simple, donc d'ordre premier p. Les indices désignés par 1 et 2 étant arbitraires, on voit de plus que $D_{2\ldots n}$ est d'espèce $n-1$ relativement à $A_2, \ldots, A_n$; de même $D_{3\ldots n}$ est d'espèce $n-2$ dans $A_3 \ldots A_n$ relativement à $A_3, \ldots, A_n$; etc.

On a d'ailleurs :

$$
\begin{aligned}
A_1 | D_1 &\equiv G | D_1 D_{2\ldots n}, \\
A_2 | D_2 &\equiv D_{2\ldots n} | D_2 D_{3\ldots n} \equiv D_1 D_{2\ldots n} | D_1 D_2 D_{3\ldots n}, \\
A_3 | D_3 &\equiv D_{3\ldots n} | D_3 D_{4\ldots n} \equiv D_1 D_2 D_{3\ldots n} | D_1 D_2 D_3 D_{4\ldots n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_{n-1} | D_{n-1} &\equiv D_{n-1\,n} | D_{n-1} D_n \equiv D_1 \ldots D_{n-2} D_{n-1\,n} | D_1 \ldots D_n.
\end{aligned}
$$

Or, en échangeant n et $n-1$, on aurait de même

$$A_n | D_n \equiv D_1 \ldots D_{n-2} D_{n-1\,n} | D_1 \ldots D_n \equiv A_{n-1} | D_{n-1}.$$

Mais n et $n-1$ sont deux indices quelconques. Donc, *si* $n \geqq 3$, les $A_i | D_i$ sont des g_p et fournissent les facteurs de composition de $G | D_1 \ldots D_n$ qui est maximum dans le produit direct des $g_p A_i | D_i$ et d'espèce n relativement aux $A_i | D_i$.

Supposons $D_1 = \ldots = D_{n-1} = 1$. Alors G est un $g_{p^{n-1}}$ abélien principal du g_{p^n} $A = A_1 \ldots A_n$. Soient a_i un générateur de A_i et $g = \Pi_1^n a_i^{n_i} (n \geqq 3)$ un élément quelconque de G. Le constitutif de G dans $A_2 \ldots A_n$ étant $A_2 \ldots A_n$, $x_2, \ldots, x_n$ doivent parcourir chacun tous les nombres mod p. Ainsi à chaque système $x_2, \ldots, x_n$ répond un seul x_1, et à chaque x_1 répondent les p^{n-2} systèmes $x_2, \ldots, x_n$ des exposants des éléments $a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n}$ du $g_{p^{n-2}} D_{2 \ldots n}$.

$D_{n-1\,n}$, d'espèce 2 dans $A_{n-1} A_n$, est de la forme $\{a_{n-1} a_n^\alpha\}$ $(\alpha \not\equiv 0 \bmod p)$. En changeant au besoin a_{n-1} en $a_{n-1}^{-\alpha}$, tout élément de $D_{n-1\,n}$ sera de la forme $a_{n-1}^{x_{n-1}} a_n^{x_n}$, $x_{n-1} + x_n$ étant $\equiv 0 \bmod p$. Admettons que, par un changement du générateur a_i de $D_{i \ldots n}$ pour $i = n-1, n-2, \ldots, r+1$, on ait pu faire en sorte que tout élément de $D_{i \ldots n}$ soit de la forme $a_i^{x_i} \ldots a_n^{x_n}$ avec $\Sigma_i^n x_k \equiv 0$ mod p, et soit $a_r a_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \ldots a_n^{\alpha_n}$ un élément de $D_{r \ldots n}$. En changeant au besoin a_r en $a_r^{\alpha_r}$ avec la condition $\Sigma_r^n \alpha_i \equiv 0 \bmod p$, on aura

$$D_{r \ldots n} = D_{r+1 \ldots n} \Sigma_x (a_r^{\alpha_r} \ldots a_n^{\alpha_n})^x, \qquad x = 0, \ldots, p-1,$$

ou

$$D_{r \ldots n} = \Sigma a_r^{x_r} \ldots a_n^{x_n},$$

la somme étant étendue à toutes les solutions $x_r, \ldots, x_n$ de $\Sigma_r^n x_k \equiv 0 \bmod p$.

En continuant ainsi, on pourra faire en sorte que $G = \Sigma a_1^{x_1} \ldots a_n^{x_n}$, la somme étant étendue à toutes les solutions $x_1, \ldots, x_n$ de $\Sigma_1^n x_k \equiv 0 \bmod p$.

En supposant maintenant les D_i quelconques et $A_i = D_i \Sigma a_i^n$ $(x = 0, \ldots, p-1)$, on peut choisir les a_i de manière que $G = D_1 \ldots D_n \Sigma a_1^{x_1} \ldots a_n^{x_n}$, la somme étant encore étendue à toutes les solutions $x_1, \ldots, x_n$ de $\Sigma_1^n n_k \equiv 0 \bmod p$ (¹).

On voit qu'*un groupe d'espèce n relativement à* $A_1, \ldots, A_n$, *pour* $n \geqq 3$, *et maximum dans* A, *est normal dans* A *et d'indice premier*.

(¹) L'exemple donné par M. Remak (*Bulletin de la Soc. math.*, t. XLI, 1913, p. 161, en note) est un cas particulier de la théorie précédente.

Il est clair que, pour $n = 2$ comme pour $n > 2$, un diviseur normal maximum de A d'espèce 2 relativement à A_1, A_2 a un indice premier, puisque cet indice est de l'ordre de $A_1 | D_1 \equiv A_2 | D_2$. Mais, pour $n = 2$, un diviseur de A peut être maximum et d'espèce 2 sans être normal. On le voit en prenant, par exemple, pour $A_i = \Sigma a_i$ ($i = 1, 2$) le groupe de substitutions $(x^i_k, \Sigma a_{kl} x^i_{kl})$ $(k, l = 1, \ldots, \nu)$ de déterminant 1 dans un champ de Galois (d'ordre suffisamment élevé), pour D_i le central de A_i, et pour G le groupe $D_2 \Sigma a_1 a_2$, a_2 étant formée avec les x^2 comme a_1 avec les x^1.

Il résulte de ce qui a été dit que *tout diviseur maximum d'un produit direct* A *dont l'espèce relativement aux facteurs directs de* A *est* > 2 *est normal dans* A.

On remarquera qu'un groupe d'espèce n relativement à $A_1, \ldots, A_n$ n'est pas nécessairement maximum dans A. On le voit de suite en considérant les différents homomorphismes qu'on peut établir entre $A_{i_1} \ldots A_{i_r}$ et $A_{i_{r+1}} \ldots A_{i_n}$ (*E.*, 65). Soit, par exemple, $n = 2$ et $A_1 = \{12, 123\}$, $A_2 = \{45, 456\}$. Pour $D_1 = \{123\}$, $D_2 = \{456\}$, G est un $g_{18}\, G_1$ d'indice 2 dans A et par suite maximum. Pour $D_1 = D_2 = 1$, G est un $g_6\, G_2 < G_1$. G_1 et G_2 sont d'espèce 2 relativement à A_1 et A_2. De plus G_2 n'est pas normal dans A.

Supposons $n \geqq 2$. Soient A_i un g_{p^2} (p premier) abélien principal de générateurs a_i, a'_i, et Γ le $g_{p^{n-1}}$ formé des $a_1^{x_1} \ldots a_n^{x_n}$, où $\Sigma_1^n x_i \equiv 0 \bmod p$. Il est clair que $\{\Gamma, a'_1 \ldots a'_n\}$ est d'espèce n sans être maximum.