J. SIRE

Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 148-160
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__148_1>

SUR LA PUISSANCE DE L'ENSEMBLE DES POINTS SINGULIERS TRANSCENDANTS DES FONCTIONS INVERSES DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. J. SIRE.

1. Dans une Note publiée à la fin des *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, de M. Pierre Boutroux, M. Painlevé a posé les deux questions suivantes :

1° Une fonction uniforme, continue dans une aire D et qui est holomorphe dans cette aire, sauf peut-être pour un ensemble parfait partout discontinu de points singuliers, est-elle holomorphe dans toute l'aire ?

2° L'ensemble des points singuliers transcendants de la fonction inverse d'une fonction entière est-il toujours dénombrable ?

M. Denjoy, en reprenant un exemple donné par M. Pompéiu dans sa thèse, a montré que la première de ces questions se résout par la négative. Nous allons établir qu'il en est de même de la seconde, en construisant une fonction entière telle que l'ensemble des points singuliers transcendants de la fonction inverse ait effectivement la puissance du continu. Il nous est nécessaire, pour parvenir à une telle fonction entière, de montrer qu'il existe des fonctions entières satisfaisant à la condition suivante : elles convergent uniformément vers une limite déterminée λ, quand la variable converge vers le point à l'infini en restant à l'intérieur au sens large d'un angle A qui diffère de π d'aussi peu que l'on veut, tandis qu'elles convergent uniformément vers une limite $\mu \neq \lambda$ quand la variable converge vers le point à l'infini en restant à l'intérieur de l'angle A' dont les côtés sont les prolongements des côtés de l'angle A.

2. *La fonction entière*

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma(1+\nu\sigma)} \qquad (\sigma > 0)$$

vérifie, pour tous les points de l'angle

$$(1) \qquad \frac{\pi\sigma}{2} + \varepsilon \leqq \theta \leqq 2\pi - \frac{\pi\sigma}{2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ nombre positif arbitraire}),$$

la relation

$$(2) \qquad g(x) = \frac{i\gamma}{x^{\frac{1}{2}}} - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{x^{-\nu}}{\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\Gamma(1-\nu\sigma)} + x^{-\alpha}\varepsilon(x)$$

$$(m < \alpha < m+1,\ m > 1),$$

γ *désignant un nombre réel fini et* $\varepsilon(x)$ *convergeant uniformément vers zéro lorsque* x *augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle* (1).

Nous poserons à cet effet

$$\varphi(z)=\frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+\sigma z)},$$

de sorte que la fonction $g(x)$ pourra s'écrire

$$g(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(\nu)x^{\nu}.$$

Ceci étant, nous considérerons avec M. Lindelöf (¹) l'intégrale

$$\int_{S}\frac{\varphi(z)x^{z}\,dz}{e^{2\pi iz}-1},$$

S désignant le contour formé par la demi-circonférence C_R admettant le point $x=-\alpha$ comme centre, de rayon $n+\frac{1}{2}+\alpha$ et située dans le demi-plan $\tau\geqq-\alpha\,(z=\tau+it)$ et du diamètre de cette demi-circonférence. La fonction $\frac{\varphi(z)x^{z}}{e^{2\pi iz}-1}$ admettra comme pôles simples à l'intérieur du contour S les points d'affixes entières

$$-m,\quad -m+1,\quad \ldots,\quad n-1,\quad n$$

et le point d'affixe $-\frac{1}{2}$. Le résidu correspondant à un pôle d'affixe entière ν étant égal à $\frac{\varphi(\nu)x^{\nu}}{2\pi i}$ et le résidu correspondant au point d'affixe $-\frac{1}{2}$ étant égal à

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-2\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)},$$

nous aurons, en appliquant le théorème des résidus,

$$-\gamma i x^{-\frac{1}{2}}+\sum_{\nu=-m}^{n}\varphi(\nu)x^{\nu}=\int_{S}\frac{\varphi(z)x^{z}\,dz}{e^{2\pi iz}-1}\qquad\left[\gamma=\frac{\pi}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)}\right].$$

(¹) LINDELÖF, *Le calcul des résidus*, p. 110.

Ceci posé, la fonction $\frac{1}{\Gamma(1+\sigma z)}$ vérifiant la relation (1)

$$\left|\frac{1}{\Gamma[1+\sigma(\alpha+\rho e^{i\psi})]}\right| < e^{\left(\frac{\pi\sigma}{2}+\varepsilon\right)\rho},$$

α désignant une constante réelle quelconque et ε un nombre positif arbitraire; pour $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ et à partir d'une valeur de ρ suffisamment grande, la fonction $\varphi(z)$ qui ne diffère de la fonction $\frac{1}{\Gamma(1+\alpha z)}$ que par la présence du facteur $\frac{1}{z+\frac{1}{2}}$ vérifiera dans les mêmes conditions la relation

$$|\varphi(\alpha+\rho e^{i\psi})| < e^{\left(\frac{\pi\sigma}{2}+\varepsilon\right)\rho}.$$

Alors nous aurons, d'après M. Lindelöf (2), pour tout point de l'angle (1),

$$-i\gamma x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{\nu=-m}^{\infty} \varphi(\nu) x^{\nu} = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(z) x^z \, dz}{e^{2\pi i z}-1}$$

avec

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(z) x^z \, dz}{e^{2\pi i z}-1} = x^{-\alpha}\,\varepsilon(x),$$

$\varepsilon(x)$ convergeant uniformément vers zéro lorsque x augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle (1), d'où l'on déduit immédiatement la relation (2).

Remarque. — La quantité $\gamma = \frac{\pi}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)}$ est positive et décroissante pour toutes les valeurs de σ appartenant à l'intervalle $(0, 2-\eta)$, η désignant un nombre positif très petit. Elle admet donc dans cet intervalle $(0, 2-\eta)$ un minimum $k = \pi$ et un maximum $K = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}$.

3. La relation $x = y^2$ fait correspondre aux points du plan

(1) *Cf.* LINDELÖF, *loc. cit.*, p. 120.

(2) *Ibid.*, p. 113-116.

des x situés dans l'angle (1), les points du plan des y appartenant à chacun des angles

$$(3)\qquad \frac{\pi\sigma}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\leqq\theta\leqq\pi-\frac{\pi\sigma}{4}-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$(4)\qquad \pi+\frac{\pi\sigma}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\leqq\theta\leqq 2\pi-\frac{\pi\sigma}{4}-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors si c désigne une constante positive supérieure à γ et si nous posons

$$h(y)=c\pm iy\,g(y^2),$$

où il faudra prendre le signe — si la détermination de y qui décrit l'angle (3) est pour chaque point x appartenant à l'angle (1) égale à la détermination de $x^{\frac{1}{2}}$ qui figure dans la formule (2) et le signe + dans le cas contraire, nous aurons, comme on le constate aisément, pour tous les points de l'angle (3),

$$h(y)=c+\gamma-\sum_{1}^{m}\varphi(-\nu)y^{-(2\nu-1)}+y^{-(2\alpha-1)}\varepsilon(y^2),$$

et pour tous les points de l'angle (4)

$$h(y)=c-\gamma-\sum_{1}^{m}\varphi(-\nu)y^{-(2\nu-1)}+y^{-(2\alpha-1)}\varepsilon(y^2),$$

$\varepsilon(y^2)$ convergeant uniformément vers zéro lorsque y augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'un quelconque des angles (3) ou (4). Alors on en déduit que *la fonction entière $h(y)$ converge uniformément vers le nombre positif $c+\gamma$ lorsque y augmente vers l'infini en restant à l'intérieur de l'angle* (3) *et vers le nombre positif $c-\gamma$ lorsque y s'éloigne à l'infini en restant à l'intérieur de l'angle* (4).

Ceci étant vrai, quelque petits que soient les nombres positifs σ et ε, on voit, en remarquant que $\dfrac{1}{\left|\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\right|}$ est bornée pour toutes les valeurs de σ appartenant à l'intervalle $(0, 2-\eta)$, qu'il existe *des fonctions entières tendant uniformément vers un nombre positif λ lorsque y augmente indéfiniment dans un angle* A *qui est inférieur à π d'aussi peu que l'on voudra et* *vers le nombre positif* $\mu \neq \lambda$, *lorsque* y *augmente indéfiniment dans l'angle* A′ *opposé par le sommet à* A.

4. Décrivons du point $y = 0$ comme centre une circonférence C de rayon égal à l'unité et désignons par C_1 la portion de C située au-dessus de l'axe des quantités réelles ξ. Partageons cette demi-circonférence C_1 en trois parties égales et excluons tous les points intérieurs au sens étroit à l'arc médian, de même que les points de la circonférence C diamétralement opposés à ces derniers. Partageons de même chacun des deux arcs restants de C_1 en trois parties égales et excluons tous les points intérieurs au sens étroit à chacun des deux arcs médians, de même que les points de la circonférence C qui leur sont diamétralement opposés et continuons ainsi indéfiniment. Considérons l'ensemble des points restants de la circonférence C (les extrémités de C_1 étant également exclues), nous désignerons par E_1 la portion de cet ensemble située sur la demi-circonférence C_1 et par E_2 la portion de cet ensemble située sur la demi-circonférence C_2; chacun de ces ensembles E_1 et E_2 est, comme on le sait, un ensemble parfait non dense ayant la puissance du continu.

Le nombre des arcs de la demi-circonférence C_1 exclus pendant la $n^{\text{ième}}$ opération est égal à $\lambda(n) = 2^{n-1}$. Nous désignerons par

$$s_{n,1}, \quad s_{n,2}, \quad \ldots, \quad s_{n,\lambda(n)}$$

ces arcs exclus en les supposant rangés dans l'ordre où les rencontre un mobile parcourant la demi-circonférence C_1 en partant de son origine située sur l'axe des ξ positifs pour aboutir à son extrémité située sur l'axe des ξ négatifs, par σ_n leur longueur commune, par $a_{n,j}$ et $b_{n,j}$ les extrémités droite et gauche de l'arc $s_{n,j}$, par $a'_{n,j}$ et $b'_{n,j}$ les points de la circonférence C diamétralement opposés aux points $b_{n,j}$ et $a_{n,j}$ et enfin par $\theta_{n,j}$ l'angle que fait la bissectrice de l'angle $a_{n,j}\,O b_{n,j}$ avec l'axe des ξ positifs.

Ceci posé, considérons la suite des fonctions

$$f_{n,1}(y), \quad f_{n,2}(y), \quad \ldots, \quad f_{n,\lambda(n)}(y),$$

où $f_{n,j}(y)$ est la fonction qui se déduit de la fonction $h(y)$ du n° 3 en y remplaçant σ par σ_n, y par $y e^{-i\theta_{n,j}}$ et le nombre positif c

par le nombre positif c_n appartenant à l'intervalle

$$(2\gamma_n, 3\gamma_n)\left[\gamma_n = \left|\frac{\pi}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma_n}{2}\right)}\right|\right].$$

En vertu d'un résultat de ce n° 3, la fonction $f_{n,j}(y)$ convergera uniformément vers le nombre positif $\alpha_n = c_n - \gamma_n$ quand y augmente indéfiniment en restant intérieur au sens large à l'angle $a_{n,j}\,\mathrm{O}a'_{n,j}$ et vers le nombre positif $\beta_n = c_n + \gamma_n$ quand y augmente indéfiniment en restant intérieur au sens large à l'angle $b_{n,j}\,\mathrm{O}b'_{n,j}$.

Si comme nous le supposons, le nombre positif c_n, défini comme il vient d'être dit précédemment, est le même pour chacune des fonctions $f_{n,j}(y)$ $[j = 1, 2, \ldots, \lambda(n)]$, les nombres α_n et β_n seront les mêmes pour chacune de ces fonctions et leur différence $\beta_n - \alpha_n$ qui est égale à $2\gamma_n$ restera comprise entre $2\mathrm{K}$ et $2k$ et cela quel que soit l'indice n, K et k étant les nombres définis dans la remarque du n° 2, en supposant $\eta = 1$.

Appelons angle A tout angle ayant l'origine pour sommet et interceptant entre ses côtés un des arcs de la circonférence C compris entre deux arcs consécutifs de cette circonférence exclus pendant la $n^{\text{ième}}$ opération. Le nombre de ces arcs sera égal à $\mu(n) = 2\lambda(n) = 2^n$. Nous les représenterons par

$$\mathrm{A}_{n,1}, \quad \mathrm{A}_{n,2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_{n,\mu(n)},$$

en les supposant rangés dans l'ordre où les rencontre un mobile parcourant la circonférence C dans le sens positif et partant de l'axe des ξ positifs. Alors l'angle $\mathrm{A}_{n,1}$ admettra l'axe des ξ positifs comme bissectrice et l'angle $\mathrm{A}_{n,\lambda(n)+1}$ admettra l'axe des ξ négatifs comme bissectrice et les deux angles

$$\mathrm{A}_{n,\lambda(n)+1-q} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_{n,\lambda(n)+1+q} \; [q = 1, 2, \ldots, \lambda(n) - 1]$$

seront symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles.

Posons

$$f_n(y) = \sum_{j=1}^{\lambda(n)} f_{n,j}(y).$$

Un angle quelconque A étant, pour chaque valeur de j appartenant à la suite des nombres $1, 2, 3, \ldots, \lambda(n)$, intérieur à l'un des angles $a_{n,j}\,\mathrm{O}a'_{n,j}$ et $b_{n,j}\,\mathrm{O}b'_{n,j}$ la fonction $f_n(y)$ converge uniformément vers une limite positive lorsque y augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle A. Nous désignerons par $\mu_{n,p}$ la limite correspondant à l'angle $A_{n,p}$ et nous allons comparer les nombres $\mu_{n,p}$ entre eux.

L'angle $A_{n,1}$ étant intérieur à chacun des angles

$$a_{n,j}\,Oa'_{n,j}\ [j=1,\ 2,\ \ldots,\ \lambda(n)]$$

nous aurons

$$\mu_{n,1}=\lambda(n)\alpha_n,$$

puisque chaque fonction $f_{n,j}(y)$ converge vers α_n lorsque y augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle $a_{n,j}\,Oa'_{n,j}$. Ceci étant, si p est un nombre entier vérifiant les relations

$$2 \leqq p \leqq \lambda(n)+1,$$

on a

$$\mu_{n,p}=\mu_{n,1}+2(p-1)\gamma_n.$$

En effet, l'angle $A_{n,p}$ étant intérieur aux $p-1$ angles

$$b_{n,j}\,Ob'_{n,j}\ [j=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1]$$

et aux $\lambda(n)-p+1$ angles $a_{n,j}\,Oa'_{n,j}\ [j=p,\ \ldots,\ \lambda(n)]$ et comme chacune des fonctions $f_{n,j}(y)$ converge uniformément vers β_n lorsque y augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle $b_{n,j}\,Ob'_{n,j}$, nous aurons

$$\mu_{n,p}=(p-1)\beta_n+[\lambda(n)-p+1]\alpha_n=\mu_{n,1}+2(p-1)\gamma_n,$$

puisque

$$\beta_n-\alpha_n=2\gamma_n.$$

Il résulte de ce qui précède que la suite des nombres

$$\mu_{n,1},\quad \mu_{n,2},\quad \ldots,\quad \mu_{n,\lambda(n)+1}$$

forme une progression arithmétique à termes positifs dont la raison est égale à $2\gamma_n$, par suite ces nombres sont distincts et le module de la différence de deux quelconques d'entre eux est compris entre $2\gamma_n$ et $2\lambda(n)\gamma_n$. Par conséquent, en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut, cette différence restera comprise, pour toutes les valeurs de n, entre les deux nombres $2k$ et $2\lambda(n)K$.

Supposons maintenant que l'indice p vérifie les relations

$$\lambda(n)+2 \leqq p \leqq \mu(n)$$

et posons

$$p=\lambda(n)+1+q$$

l'angle $A_{n,\lambda(n)+1+q}$ sera intérieur aux q angles

$$a'_{n,j}\, O a_{n,j} \ (j = 1, 2, \ldots, q)$$

et aux $\lambda(n) - q$ angles

$$b'_{n,j}\, O b_{n,j} \ [j = q+1, \ldots, \lambda(n)];$$

alors nous aurons

$$\mu_{n,\lambda(n)+1+q} = q\alpha_n + [\lambda(n) - q]\beta_n = \mu_{n,1} + 2[\lambda(n) - q]\gamma_n = \mu_{n,\lambda(n)+1-q}.$$

Comme les angles $A_{n,\lambda(n)+1+q}$ et $A_{n,\lambda(n)-1+q}$ sont symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles, on voit que la fonction $f_n(y)$ converge vers la même limite lorsque y augmente indéfiniment en restant à l'intérieur d'un angle $A_{n,p}$ $[p = 2, \ldots, \lambda(n)]$ ou de son symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles

Soit D_n l'ensemble des points du plan des y tels que chacun d'eux soit intérieur au sens large à un angle $A_{n,h}$ $[h = 1, 2, \ldots, \mu(n)]$. D'après ce qui précède la fonction $f_n(y)$ sera bornée dans D_n, nous désignerons par η_n le maximum de $|f_n(y)|$ dans D_n.

5. Si nous procédons ainsi pour toutes les valeurs entières et positives de n, nous obtiendrons une infinité dénombrable de fonctions entières $f_n(y)$. Ceci étant, nous pouvons déterminer la suite des nombres positifs $\varphi(n)$, ($n = 1, 2, \ldots,$ *ad infinitum*) satisfaisant aux conditions suivantes :

I. La fonction $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(y)}{\varphi(n)}$ est une fonction entière;

II. La série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{\varphi(n)}$ est convergente.

Désignons par (L_1) l'ensemble des demi-droites issues de l'origine et passant par les différents points de l'ensemble E_1 et par (L_2) l'ensemble des demi-droites issues de l'origine et passant par les divers points de l'ensemble E_2 [E_1 [1] et E_2 étant les ensembles définis au début du n° **4**]. Soit L_1 une certaine demi-droite de l'ensemble E_1, cette demi-droite sera pour chaque valeur de n intérieure à un certain angle $A_{n,h}$, l'indice h [2] prenant les valeurs

(1) Nous supposerons dans ce qui suit, pour plus de clarté dans l'exposition, que E_1 comprend en outre les extrémités de C_1.

(2) L'indice h peut varier avec n.

1, 2, ..., $\lambda(n)+1$. Posons

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{n,h}}{\varphi(n)},$$

je dis que la fonction $f(y)$ converge vers μ, lorsque y s'éloigne à l'infini suivant la demi-droite L_1. Soit à cet effet ε un nombre positif arbitrairement petit; les séries à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{n,h}}{\varphi(n)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1} \frac{\eta_n}{\varphi(n)}$$

étant convergentes, nous pouvons déterminer un entier p tel que l'on ait

$$(5) \qquad \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\mu_{n,h}}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\eta_n}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le rayon L_1 étant intérieur pour chaque valeur de n à $A_{n,h}$ et par suite à D_n, nous aurons, pour tout point de ce rayon et quel que soit n,

$$|f_n(y)| < \eta_n.$$

Par conséquent, nous aurons, en tenant compte de la seconde des inégalités (5),

$$(6) \qquad \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f_n(y)}{\varphi(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ceci étant, nous désignerons par $s_p(y)$ la somme des p premiers termes de la série définissant la fonction $f(y)$ et par s_p la somme des p premiers termes de la série définissant le nombre μ. La demi-droite L_1 étant intérieure aux angles $A_{1,h}$; $A_{2,h}$, ..., $A_{n,h}$ chacune des fonctions $f_n(y)$ ($n = 1, 2, \ldots, p$) converge vers la limite $\mu_{n,h}$ quand y s'éloigne à l'infini sur la demi-droite L_1. Il en résulte donc que la fonction $s_p(y)$ convergera vers s_p quand y s'éloigne à l'infini en suivant le même chemin. On en conclut qu'au nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif R_ε tel que l'on ait

$$(7) \qquad |s_p(y) - s_p| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout point y du chemin L_1 dont la distance à l'origine est supérieure à R_ε.

Comme

$$|f(y) - \mu| \leqq |f(y) - s_p(y)| + |s_p(y) - s_p| + |s_p - \mu|,$$

on aura donc en tenant compte de (5), (6) et (7)

$$|f(y) - \mu| < \varepsilon,$$

pour tout point de la demi-droite L_1 dont la distance à l'origine est supérieure à R_ε.

Considérons maintenant une demi-droite L_2 de l'ensemble (L_2), que nous supposons être symétrique de la demi-droite L_1 précédemment considérée par rapport à l'axe des quantités réelles. Cette demi-droite L_2 sera pour chaque valeur de n intérieur à un certain angle $A_{n,k}$ symétrique de l'angle $A_{n,h}$ par rapport à l'axe des quantités réelles. Comme d'après le numéro précédent

$$\mu_{n,k} = \mu_{n,h},$$

la fonction $f(y)$ convergera également vers le nombre μ lorsque y augmentera indéfiniment en se déplaçant sur le rayon L_2.

6. Soient P_1 et P'_1 deux points de la demi-circonférence C_1 appartenant à l'ensemble E_1, nous dirons que l'arc $P_1 P'_1$ de cette demi-circonférence C_1 est de rang q, s'il existe un nombre entier q tel que l'arc $P_1 P'_1$ ne contienne à son intérieur aucun des arcs exclus de C_1 pendant les $(q - 1)$ premières opérations tandis qu'il contient à son intérieur un arc et un seul exclu à la $q^{\text{ième}}$ opération. Désignons par l_1 la longueur de l'arc $P_1 P'_1$ et supposons que l'un au moins des deux points P_1 et P'_1 ne soit pas extrémité d'un arc contigu à l'ensemble E_1; dans ce cas, le rang de l'arc $P_1 P'_1$ sera égal au nombre entier q vérifiant les relations

$$\frac{\pi}{3^{q-1}} > l_1 > \frac{\pi}{3^q}.$$

En effet, la longueur d'un arc exclu à la $n^{\text{ième}}$ opération étant égale à $\frac{\pi}{3^n}$ et les points P_1 et P'_1 appartenant à E_1, l'arc $P_1 P'_1$ ne renfermera à son intérieur aucun des arcs exclus pendant les $(q - 1)$ premières opérations. Si, d'autre part, nous considérons l'ensemble des arcs exclus pendant les n premières opérations, deux arcs consécutifs quelconques de cet ensemble sont séparés par un arc dont la longueur est égale à $\frac{\pi}{3^n}$, il s'ensuit que $P_1 P'_1$ comprendra à son intérieur un arc exclu à la $q^{\text{ième}}$ opération. Il n'en contiendra d'ailleurs qu'un seul, car dans le cas contraire il en résulterait que $l_1 \geqq \frac{\pi}{3^{q-1}}$, ce que nous ne supposons pas.

7. Soient L_1, L'_1 deux demi-droites distinctes de l'ensemble (L_1) ne passant par aucune extrémité d'arcs contigus à E_1 ; désignons par $A_{n,h}$ et $A_{n,h'}$ les deux angles A qui, pour une valeur déterminée de n, comprennent respectivement L_1 et L'_1. Alors, si L'_1 est à droite de L_1, nous aurons pour chaque valeur de n : $h' \leqq h$ et par suite d'après un résultat de la page 155 : $\mu_{n,h'} \leqq \mu_{n,h}$, puisque les indices h et h' ne prennent que des valeurs appartenant à la suite des nombres $1, 2, \ldots, \lambda(n)+1$.

Les rayons L_1 et L'_1 interceptent sur C_1 un arc $P_1 P'_1$ dont la longueur est différente de zéro et dont les extrémités ne sont pas extrémités d'arcs contigus à E_1. Par suite (*cf.* n° 6) le rang de cet arc sera un nombre fini q et nous aurons

$$A_{n,h} = A_{n,h'} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, (q-1)$$
$$A_{q,h} \neq A_{q,h'} \quad \text{avec} \quad h' = h - 1$$

et par conséquent

$$\mu_{n,h} = \mu_{n,h'} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, (q-1)$$
$$\mu_{q,h} - \mu_{q,h'} = 2\gamma_q$$

puisque $h' = h - 1$ (*cf.* p. 155).

Désignons par $Q_1 Q'_1$ l'arc exclu de la $q^{\text{ième}}$ opération et intérieur à l'arc $P_1 P'_1$ (Q'_1 étant l'extrémité droite de cet arc et Q_1 son extrémité gauche). Désignons par m le plus petit des rangs des deux arcs non nuls $P_1 Q_1$ et $P'_1 Q'_1$: m sera un nombre fini au moins égal à $q+1$. Nous aurons donc

$$A_{n,h} = A_{n,h'} \quad \text{pour} \quad q < n < m$$

et, par suite, pour ces mêmes valeurs de n

$$\mu_{n,h} = \mu_{n,h'}.$$

Pour $n \geqq m$ il viendra $A_{n,h} \neq A_{n,h'}$ et la différence $h - h'$ qui pour $n = m$ est au moins égale à 1, n'ira pas en décroissant à partir de $n = m$, de sorte que l'on aura pour ces valeurs de n

$$\mu_{n,h} - \mu_{n,h'} \geqq 2\gamma_n.$$

Ceci étant, désignons par μ' le nombre μ correspondant au rayon L'_1 et considérons la série

$$\mu - \mu' = \sum_{n=q}^{\infty} \frac{\mu_{n,h} - \mu_{n,h'}}{\varphi(n)};$$

d'après ce qui précède, le premier terme de cette série sera positif et égal à $\frac{2\gamma_q}{\varphi(q)}$, tandis que les autres, sauf au plus un nombre fini d'entre eux qui sont nuls, seront positifs. On en conclut que si l'arc $P_1 P'_1$ intercepté par les deux rayons L_1 et L'_1 sur C_1 est de rang q, on a

$$\mu - \mu' \geqq \frac{2\gamma_q}{\varphi(q)}$$

et par suite que les nombres μ et μ' sont distincts.

Comme les rayons L_1 et L'_1 précédents de l'ensemble (L_1) ont été choisis arbitrairement et comme (L_1) a la puissance du continu, il s'ensuit que l'ensemble (μ_1) des limites distinctes μ correspondant aux divers rayons de (L_1) a également la puissance du continu. L'ensemble (μ_2) des limites distinctes μ_2 correspondant aux divers rayons de l'ensemble (L_2) comprenant, en vertu d'un résultat du n° 5, tous les nombres de l'ensemble (μ_1), sauf les deux nombres qui correspondent aux deux rayons $O\xi$ et $O\xi'$ ($\xi\xi'$ étant l'axe des quantités réelles), aura également la puissance du continu.

8. Soit M une demi-droite issue de l'origine et passant par le milieu d'un arc exclu de la circonférence C, en procédant d'une manière analogue à celle utilisée au n° 5, on voit que la fonction $f(y)$ converge vers l'infini, lorsque y s'éloigne à l'infini suivant une demi-droite M.

Comme entre deux demi-droites L, il y a toujours au moins une demi-droite M, il s'ensuit qu'entre deux rayons quelconques le long desquels la fonction $f(y)$ converge vers une limite finie, il y a une infinité de rayons le long desquels la fonction $f(y)$ converge vers l'infini.

9. Désignons par $y(x)$ la fonction multiforme définie par l'équation

$$x = f(y).$$

Comme tout point $x = \mu$ [μ étant un nombre quelconque de l'ensemble (μ_1)] est, d'après une proposition connue, un point singulier transcendant de la fonction $y(x)$, nous pouvons énoncer, en tenant compte du résultat du n° 7, la proposition suivante :

L'ensemble des points singuliers transcendants de la fonction $y(x)$ a effectivement la puissance du continu.