BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Des systèmes infinis d'équations

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 119-126
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__119_1>

DES SYSTÈMES INFINIS D'ÉQUATIONS;

PAR M. A. PELLET.

1. Soient les équations

$$(1) \qquad x_p^{m_p} - f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

les f_p étant des fonctions holomorphes; désignons par F_p une fonction majorante de f_p et considérons leurs n équations majorantes

$$(2) \qquad X_p^{m_p} - F_p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0,$$

m étant le plus grand des nombres m_p et $F(X)$ une fonction majorante des n fonctions

$$X^{m-m_p} F_p(X, X, \ldots, X),$$

où le facteur de X^{m-m_p} n'est autre que $F_p(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dans laquelle on a remplacé $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par X; les valeurs positives de X qui rendent positive la fonction

$$X^m - F(X)$$

rendront aussi positives les premiers membres des n équations (2). Les équations (1) ont, dans la majorité des cas, un nombre de systèmes de solutions égal au produit $m_1 m_2 \ldots m_n$, pour chacun desquels les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont des modules inférieurs à ξ, plus petite racine positive de l'équation $X^m - F(X) = 0$, et il n'y en a pas d'autres. Cela se voit immédiatement lorsque $n - 1$ des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont égaux à l'unité, ou encore lorsque f_p ne contient que les p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$. *Voir* mon Mémoire *Sur les équations majorantes* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1909).

2. Appliquons ceci à l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$

(Traité de MM. B. Heywood et Fréchet, p. 49).

On est conduit aux n équations linéaires

$$(3) \qquad x_p = \delta\lambda \left[\sum_{q=2}^{q=n} x_q K(s_p, s_q) \right] + f(s_p),$$

où l'on a posé

$$s_1 = a, \qquad s_2 = a + \delta, \qquad \ldots, \qquad s_n = a + (n-1)\delta = b, \qquad \delta = \frac{b-a}{n-1}$$

et

$$x_p = \varphi(s_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

dans les équations (3) on doit omettre dans le second membre le terme correspondant à $q = p$, lorsque $K(s, s)$ est infini. Enfin on doit faire tendre n vers l'infini. Désignons par μ_s l'intégrale

$$\int_a^b |K(s, t)|\, dt$$

et soit μ son maximum lorsque s varie entre a et b; par ν le maximum du module de $f(s)$ dans le même intervalle ; on est conduit pour x_p à l'équation majorante

$$X - \lambda\mu X = \nu,$$

qui a une racine positive si $\lambda\mu < 1$; on suppose λ paramètre positif;

d'où, pour fonction majorante de $\varphi(s)$,

$$|f(s)| + \frac{\lambda\nu}{1-\lambda\mu}\mu_s,$$

en développant suivant les puissances croissantes de λ.

Ce résultat se vérifie sur l'exemple de M. Picard (Traité de MM. B. Heywood et Fréchet, p. 81).

Plus généralement soit l'équation (p. 4 du Traité)

$$\varphi(M) - \lambda \int_D K(M, P)\,\psi[\varphi(P)]\,d\omega_P = f(M),$$

$\psi(x)$ étant une fonction holomorphe de x donnée, ayant pour fonction majorante $\Psi(X)$. Désignons par μ_M l'intégrale

$$\int_D |K(M, P)|\,d\omega_P = \mu_M,$$

par μ sa valeur maximum lorsque M varie dans le domaine D, par ν le maximum de $|f(M)|$ dans D, une équation majorante de $\varphi(M)$ dans D est

$$X - \lambda\mu\,\Psi(X) = \nu \tag{4}$$

et

$$|f(M)| + \mu_M X,$$

une fonction majorante de $\varphi(M)$, pour tout point M; on peut ordonner $\varphi(M)$ suivant les puissances croissantes de λ si μ, ν, μ_M, $f(M)$ sont finies, et le rayon de convergence est au moins égal à la plus petite valeur positive λ pour laquelle l'équation (4) a une racine double.

3. Soit l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} - \lambda\left(p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_k \frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}} + \ldots + p_m y\right) = 0, \tag{5}$$

les coefficients p étant des fonctions holomorphes de e^x et e^{-x},

$$p = a_0 + a_1 e^x + a_{-1} e^{-x} + \ldots + a_n e^{nx} + a_{-n} e^{-nx} + \ldots,$$

toutes convergentes lorsque la partie réelle de x est comprise entre R et R_1, $R_1 > R$. Si l'on remplace x par $r + r_1\sqrt{-1} + x$, r et r_1

étant réels, les coefficients conservent leur forme et sont convergents lorsque la partie réelle de x est comprise entre $R - r$ et $R_1 - r$, quantités de signes contraires, lorsque r est compris entre R et R_1; ainsi nous supposons $R < 0$ et $R_1 > 0$. Cherchons à satisfaire à cette équation par une fonction y de la forme

$$b_0 e^{\rho x} + b_1 e^{(\rho+1)x} + b_1 e^{(\rho-1)x} + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} b_n e^{(\rho+n)x},$$

ρ étant un nombre non entier et différent de zéro. Les dérivées de y seront de la même forme. Nous prendrons pour inconnue

$$y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}.$$

On aura

$$y^{(m)} = \Sigma\, b_n e^{(\rho+n)x}, \qquad y^{(m-k)} = \Sigma\, b_n \frac{e^{(\rho+n)x}}{(\rho+n)^k}$$

(n variant entre $-\infty$ et $+\infty$).

Substituant dans l'équation et ordonnant, les coefficients doivent être tous nuls, ce qui donne une infinité d'équations pour les quantités b. Si l'on considère l'une d'elles, il y a un seul terme ne s'annulant pas avec λ et formé par l'une des quantités b_n; nous désignerons cette équation par l'indice de cette quantité, qui varie d'une équation à l'autre. Supposons pour un moment connus les $2N + 1$ coefficients b_n ayant un indice inférieur à N en valeur absolue. On arrive, pour les équations en nombre infini dont l'indice est en valeur absolue $\geqq N$, à l'équation majorante

$$B\left[1 - \lambda\left(P_1 \frac{1}{N_1} + P_2 \frac{1}{N_1^2} + \ldots + P_m \frac{1}{N_1^m}\right)\right] = Q,$$

où N_1 représente $N - |\rho|$, Q une fonction linéaire des modules des $2N + 1$ quantités b_n, pour $|n| < N$, les coefficients tendant vers zéro lorsque N tend vers l'infini; P_k la somme des modules des termes de la série p_k, pour $x = 0$, série qui est convergente d'après l'hypothèse faite $R < 0$ et $R_1 > 0$.

On a $B > |b_n|$, pour $n \geqq N$, pourvu que le coefficient de B soit positif, ce qui, quelle que soit la valeur du paramètre positif λ, sera réalisé pour N suffisamment grand. En effet, dans le produit

$p_k y^{(m-k)}$, le coefficient de $e^{(\rho+n)x}$ est égal à

$$\sum \frac{a_\alpha b_{n-\alpha}}{(\rho+n-\alpha)^k},$$

où α entier positif ou négatif satisfait à l'inégalité

$$|n-\alpha| \geqq N;$$

donc ce coefficient a un module inférieur à

$$P_k \frac{B}{N_1^k},$$

B étant le module maximum des quantités b_n, $|n| \geqq N$.

Ainsi le maximum de λ étant donné, on pourra assigner N de façon que l'équation majorante des équations d'indice $|n| \geqq N$ ait une racine positive; on pourra donc résoudre ces équations en ordonnant les inconnues b_n suivant les puissances croissantes de λ, sans se préoccuper de la convergence de leur déterminant. Substituant dans les $2N+1$ équations homogènes d'indice inférieur en valeur absolue à N, on a un système de $2N+1$ équations du premier degré à $2N+1$ inconnues, homogènes; leur déterminant doit être nul pour qu'il y ait un système de solutions, ce qui donne une équation pour ρ; cette équation étant satisfaite, les valeurs de b_n $|n| < N$, seront proportionnelles aux déterminants partiels du premier ordre, supposés non nuls tous ensemble; ces déterminants sont des fonctions entières de λ.

4. Plus généralement, ρ étant une indéterminée, tirons des $2N$ équations d'indice autre que zéro, les valeurs des b_n, $N > |n| > 0$, en fonctions de b_0; puis substituons dans l'équation d'indice zéro, et soit $\Delta(\rho) b_0$ ce que devient le premier membre; on a

$$y^{(m)} - \lambda[p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \ldots + p_m y] = \Delta(\rho) b_0 e^{\rho x};$$

différentions l fois par rapport à ρ; il vient

$$y_l^m - \lambda[p_1 y_l^{(m-1)} + \ldots + p_m y_l] = b_0 e^{\rho x}[\Delta(\rho) x^l + l\,\Delta'(\rho) x^{l-1} + \ldots + \Delta^{(l)}(\rho)],$$

en posant

$$y_l = \frac{d^l y}{d\rho^l}, \qquad \Delta'(\rho) = \frac{d\,\Delta(\rho)}{d\rho}.$$

Ainsi si ρ est une racine multiple d'ordre l de l'équation $\Delta(\rho) = 0$, $y, y_1, \ldots, y_{l-1}$ sont l solutions de l'équation (5).

Si $\Delta(\rho)$ est différent de zéro, posons

$$b_0 = \frac{c}{\Delta(\rho)}, \qquad \frac{y}{\Delta(\rho)} = z;$$

z est une solution de l'équation

$$(6) \qquad z^{(m)} - \lambda(p_1 z^{(m-1)} + \ldots + p_m z) = c e^{\rho x}$$

et

$$\frac{d^l z}{d\rho^l}$$

de l'équation (6) où l'on remplace le second membre par $c x^l e^{\rho x}$.

Si la parenthèse de l'équation (5) contenait un terme en $y^{(m)}$, si l'on avait l'équation

$$y^{(m)} - \lambda[p y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \ldots + p_m y] = 0,$$

le nouveau coefficient p étant de la même forme que les autres et, comme eux, convergent pour partie réelle de x comprise entre R et R_1, ce qui précède serait applicable, mais seulement pour les valeurs de λ inférieures à $\frac{1}{P}$, P étant la somme des modules des coefficients de p.

5. Une solution du problème qui précède a été donnée par M. Poincaré (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XIV, p. 77) dans le cas de $m = 2$, et sa méthode a été étendue au cas général par M. Helge von Koch (*Acta mathematica*, t. XV et t. XVIII).

Mais la méthode actuelle, plus simple, est applicable à des équations linéaires aux dérivées partielles analogues, équations qu'on pourrait aussi bien appeler équations aux intégrales partielles.

Soit

$$u = \sum_m \sum_n a_{m,n} e^{(\rho+m)x + (\rho_1+n)y},$$

les sommes s'étendant à toutes les valeurs entières positives et négatives de m et de n. Désignons par $u^{(\alpha,\beta)}$ une fonction de même forme ayant pour dérivée $\alpha^{\text{ième}}$ par rapport à x, et $\beta^{\text{ième}}$ par rapport à y la fonction u :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u^{(\alpha,\beta)}}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}} = u,$$

$$u^{(\alpha,\beta)} = \sum_m \sum_n a_{m,n} \frac{e^{(\rho+m)x+(\rho_1+n)y}}{(\rho+m)^{\alpha}(\rho_1+n)^{\beta}},$$

ρ et ρ_1 indéterminés non entiers positifs ou négatifs, ni nuls.

Considérons les p équations

$$(7) \qquad z_i - \lambda f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les f_i étant des fonctions homogènes et du premier degré des quantités $z_j^{(\alpha,\beta)}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ et $\alpha + \beta \geqq 1$; de plus les coefficients sont des fonctions de la forme précédente, en y faisant $\rho = \rho_1 = 0$,

$$\sum\sum a_{m,n} e^{mx+ny},$$

ces séries étant toutes convergentes pour partie réelle de x comprise entre $-\mathrm{R}$ et R_1, et de y comprise entre $-\mathrm{R}'$ et R'_1, R, R_1, R', R'_1 étant des quantités positives.

Cherchons à satisfaire aux équations (7) par des fonctions de la forme de u,

$$z_i = \sum_m \sum_n b_{m,n}^{(i)} e^{(\rho+m)x+(\rho_1+n)y};$$

on est conduit à une infinité d'équations entre les indéterminés $b_{m,n}^{(i)}$ qui se réduisent respectivement à l'une de ces quantités pour $\lambda = 0$. Regardons pour un moment comme connue l'une des quantités $b_{00}^{(0)}$ par exemple, et mettons de côté l'équation qui se réduit à $b_{00}^{(0)}$ pour $\lambda = 0$; les équations restantes permettent de développer les autres quantités $b_{m,n}^{(i)}$ suivant les puissances croissantes de λ; ces développements sont des fonctions entières de λ, convergents quelle que soit λ. Substituant dans l'équation mise à part, on est conduit à une relation entre ρ et ρ_1, et $b_{00}^{(0)}$ peut être pris arbitrairement.

6. La méthode peut s'appliquer à des équations ne pouvant se ramener à la forme précédente; ainsi à l'équation

$$a_0 \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p}} + a_1 \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p-1}\,\partial y} + \ldots + a_k \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p-k}\,\partial y^k} + \ldots + a_{2p} \frac{\partial^{2p} z}{\partial y^{2p}} - u z = 0,$$

si elle est à caractéristiques imaginaires, c'est-à-dire si l'équation

$$a_0 r^{2p} + a_1 r^{2p-1} + \ldots + a_k r^{2p-k} + \ldots + a_{2p} = 0$$

n'a que des racines imaginaires, u étant toujours une fonction de la forme

$$\sum\sum a_{m,n} e^{mx+ny},$$

m et n prenant toutes les valeurs entières positives et négatives.

Si l'on ne considère que les fonctions u régulières, c'est-à-dire si m et n ne prennent que les valeurs entières positives ou nulles, la méthode s'applique à l'équation

$$a_0 \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + a_1 \frac{\partial^p z}{\partial x^{p-1}\,\partial y} + \ldots + a_p \frac{\partial^p z}{\partial y^p} - \lambda f = 0,$$

f étant une fonction linéaire et homogène des dérivées de z d'ordre inférieur à p, ayant par conséquent

$$1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2} \text{ termes,}$$

les coefficients étant des fonctions régulières de x et y pourvu que l'équation

$$a_0 r^p + a_1 r^{p-1} + \ldots + a_p = 0$$

n'ait pas de racine positive.

Enfin on peut étendre la méthode aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.