BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FATOU

Sur les lignes singulières des fonctions analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 113-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__113_1>

SUR LES LIGNES SINGULIÈRES DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. FATOU.

J'ai étudié, dans les *Acta mathematica* (t. XXX, 1906, p. 364 et suiv.), les propriétés que possèdent, au voisinage de leur cercle de convergence, les séries de Taylor qui restent bornées à l'intérieur de ce cercle et j'ai démontré que les fonctions qu'elles représentent possèdent la propriété suivante : en tous les points z_0 du cercle de la convergence, sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle, la fonction $f(z)$ tend vers une valeur déterminée quand z tend vers z_0 en restant à l'intérieur d'un angle inférieur à π ayant pour bissectrice le rayon Oz_0.

Je me propose d'étendre cette propriété aux fonctions qui sont holomorphes ou méromorphes à *l'intérieur* d'un cercle C et qui de plus sont assujetties à cette condition que, lorsque z varie dans C, le point représentatif $Z = f(z)$ ne vienne jamais se placer sur un certain continu linéaire γ.

Pour abréger le langage, nous dirons qu'une fonction (analytique ou harmonique) possède la propriété $\mathfrak{P}$ en un point m d'une ligne analytique L, lorsque cette fonction supposée définie d'un certain côté de L, prend une valeur limite finie et bien déterminée quand le point représentatif tend vers m en restant à l'intérieur d'un angle inférieur à π ayant pour bissectrice la normale à L ; nous dirons qu'elle possède la propriété $\mathfrak{P}'$, si le cas d'une limite infinie n'est pas exclu, les autres hypothèses restant les mêmes.

Soit alors $F(z)$ une fonction n'ayant dans C d'autres singularités que les pôles, en nombre fini ou infini, mais telle qu'on n'ait jamais

$$F(z) = \alpha$$

pour un point z intérieur à C, et un point α appartenant à un continu linéaire.

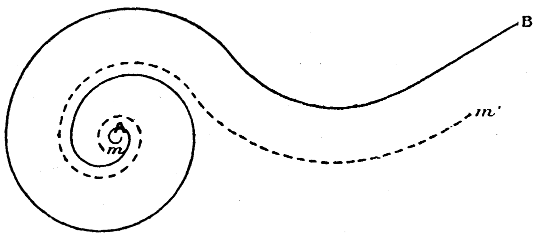
Soit γ ce continu ; je dis qu'on peut choisir sur γ deux points A et B jouissant de la propriété suivante : lorsque le point Z varie dans son plan, sans jamais rencontrer γ (ou une partie de γ), la fonction

$$\frac{Z - A}{Z - B}$$

a un argument qui varie entre des limites finies.

La chose est à peu près évidente si l'on prend pour γ le segment de droite AB, ou une coupure curviligne ne présentant pas de singularités ; dans ce cas, en effet, le point Z ne peut tourner qu'un nombre limité de fois autour du point A ou du point B, et tout chemin fermé qui ne contient à son intérieur aucun des deux points A et B ou qui contient ces deux points à la fois ramène l'argument à sa valeur initiale. Mais il peut en être autrement dans le cas où γ possède en A, par exemple, un point asymptote (*fig* 1) ; dans ce cas, le point Z, pour aller de m en m' sans traverser γ, devra décrire la courbe ponctuée qui tourne autour de A un nombre de fois d'autant plus grand que m est plus rapproché de A, de sorte que l'argument de $Z - A$ peut croître indéfiniment. Comme nous pouvons toujours, dans nos raisonnements, remplacer

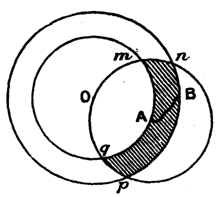
Fig. 1.



γ par une partie finie quelconque de γ, il est possible de choisir A et B de manière à éviter cette singularité ; mais lorsque l'on considère un continu quelconque, la possibilité d'un tel choix demande quelques explications.

Remarquons qu'un point asymptote d'une courbe possède cette propriété que sa distance à un point O quelconque du plan extérieur à la courbe n'est jamais un maximum ou un minimum pour

Fig. 2.

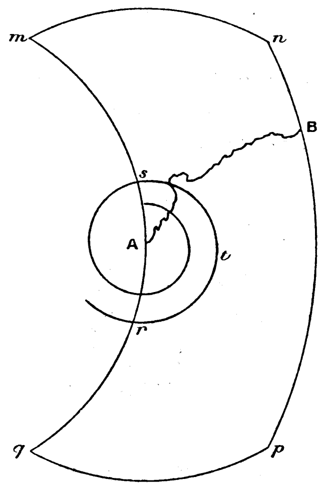


la distance du point O à un point variable de la courbe; ceci nous amène donc à choisir un point A de la façon suivante : Soit (*fig.* 2) un point O extérieur à γ : la distance de O à γ possède un minimum différent de zéro et ce minimum est atteint pour un point A ; γ ne contient donc aucun point à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon OA; décrivons de A comme centre un cercle égal au précédent et prenons un point M de γ intérieur à ce cercle et tel qu'il existe un segment γ' de γ ayant pour extrémités A et M et qui soit tout entier à l'intérieur de ce même cercle : on déduit facilement de la définition d'un continu linéaire la possibilité d'un tel choix. Considérons alors le continu γ' : la distance de O à γ'

possède un maximum qui se trouve atteint pour un certain point B; on doit supposer B différent de A, si le continu de γ' ne se réduit pas à un arc de cercle de centre O; B peut coïncider avec M ou être distinct de M ; dans ce dernier cas, nous réduisons γ' au *segment* AB que nous appellerons c.

On voit que ce continu c doit être compris entre les deux cercles de centre O passant par A et B, et en outre intérieur au cercle de centre A passant par O. Il est donc compris à l'intérieur ou sur le contour du quadrilatère curviligne $mnpq$; dans ces conditions il est clair que le point Z ne peut tourner autour de A d'un angle surpassant 4π sans rencontrer c; en effet, si Z décrit un chemin tel que celui de la figure 3 entourant A et non B, il existe néces-

Fig. 3.



sairement une partie rts de ce chemin qui réunit entre eux deux points du contour $mnpq$, laissant de part et d'autre les deux points A et B. Donc la ligne c qui, nous l'avons vu, est complètement intérieure à ce quadrilatère coupera nécessairement le chemin rts.

On fera un raisonnement analogue pour le point B et l'on en déduira que le point Z ne pouvant tourner que d'un angle limité autour des points A et B, l'argument de $\frac{Z-A}{Z-B}$ est lui-même limité.

Après cette digression nécessaire *d'analysis situs*, revenons à la question qui nous intéresse, et considérons la fonction

$$G(z) = \log\left[\frac{F(z) - A}{F(z) - B}\right],$$

$F(z)$ ne prenant jamais les valeurs A et B, $G(z)$ est holomorphe et uniforme dans C, et, d'après ce qui précède, sa partie imaginaire reste bornée.

Posons

$$z = re^{i\theta}, \qquad G(z) = \sum_0^{\infty}(a_n + ib_n)r^n e^{ni\theta} = P(r, \theta) + i\,Q(r, \theta),$$

$Q(r, \theta)$ étant bornée, la série $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente (*loc. cit.*, p. 374), le rayon du cercle C étant égal à 1.

L'identité connue

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |G(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)r^{2n}$$

montre ensuite que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |G(re^{i\theta})|^2\, d\theta$$

a une limite finie quand r tend vers 1.

Ceci rappelé, remarquons qu'on peut choisir la constante k de manière que la fonction

$$H(z) = \frac{1}{G(z) - k}$$

soit bornée dans C; il suffit de prendre k purement imaginaire et supérieur en module au module maximum de $Q(r, \theta)$.

A la fonction H, holomorphe et bornée dans C on peut appliquer le théorème rappelé au début de cet article : H possède la propriété $\mathfrak{D}$, *presque partout*, sur le cercle C.

Donc $G(z)$ possède presque partout la propriété $\mathfrak{D}'$ sur C. Mais l'égalité

$$\lim_{r=1}\int_{-\pi}^{+\pi} |G(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \text{quantité finie},$$

montre qu'on ne peut avoir

$$\lim_{r=1} |G(re^{i\theta})| = \infty$$

que pour un ensemble de mesure nulle de valeur de θ.

On peut donc dire que $G(z)$ possède la propriété $\mathcal{D}$ *presque partout* sur C.

L'égalité

$$F(z) = \frac{A - Be^{G(z)}}{1 - e^{G(z)}}$$

montre ensuite que $G(z)$ tendant vers une limite *finie* y, $F(z)$ tend vers la limite bien déterminée, finie ou infinie,

$$\frac{A - Be^{y}}{1 - e^{y}}.$$

On peut donc dire que $F(z)$ possède la propriété $\mathcal{D}'$ presque partout sur le cercle C.

On peut donner un énoncé un peu plus général, en transformant l'énoncé précédent par une représentation conforme. Cet énoncé est le suivant :

Soit une ligne analytique $\mathcal{L}$ *et une fonction analytique* $F(z)$ *définie d'un côté de* $\mathcal{L}$, *et n'ayant au voisinage de* $\mathcal{L}$ *d'autres singularités que des pôles. Supposons, en outre, que* $F(z)$ *ne puisse pas prendre au voisinage de* $\mathcal{L}$ *les valeurs d'un continu linéaire.*

Cela étant, en tous les points z_0 *de* $\mathcal{L}$, *sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle*, $F(z)$ (qui a, en général, $\mathcal{L}$ comme ligne singulière essentielle) *prend une valeur limite bien déterminée, finie ou infinie, quand* z *tend vers* z_0 *suivant un chemin faisant un angle fini avec* $\mathcal{L}$.

On voit que la proposition démontrée par nous dans les *Acta* subsiste essentiellement si les *valeurs exceptionnelles* de la fonction, au lieu de remplir un domaine, sont distribuées sur une ligne.

On pourrait se demander si la méthode si féconde de M. Picard pour démontrer certaines propriétés des fonctions entières et qui repose, comme l'on sait, sur l'emploi de la fonction modulaire, ne permettrait pas d'étendre le théorème aux fonctions ayant, par exemple, trois valeurs exceptionnelles. Mais l'exemple même des fonctions modulaires et fuchsiennes montre qu'il existe des fonctions uniformes affectées de coupures et ayant en outre un nombre fini quelconque de valeurs exceptionnelles, qui ne possèdent en aucun point de leur coupure ou seulement en une infinité dénombrable de points, les propriétés remarquables que nous avons découvertes pour les fonctions étudiées dans cette Note.

Il est bon de rappeler, d'ailleurs, que cette étude repose essentiellement sur la connaissance des propriétés de l'intégrale de M. Lebesgue.