H. DULAC

Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 324-383

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__324_0>

SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LE VOISINAGE DE VALEURS SINGULIÈRES,

PAR M. HENRI DULAC.

1. INTRODUCTION. — L'étude de la forme analytique des solutions du système d'équations

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{1}$$

dans le voisinage des valeurs $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, pour lesquelles on suppose que toutes les expressions $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ sont holomorphes et nulles, a déjà fait l'objet de nombreux travaux (¹) justifiés par les applications qu'on peut en faire à diverses théories : solutions asymptotiques, solutions périodiques, stabilité de l'équilibre, solutions d'une équation ou d'un système d'équations linéaires dans le voisinage d'un point singulier. J'ai cru, cependant, qu'il pourrait être utile de reprendre cette étude, bien que je n'aie obtenu comme résultats nouveaux que des extensions de résultats connus. En effet, si la simplicité des résultats, relatifs à des cas que l'on peut considérer comme généraux, ne laisse rien à désirer, l'étude d'autres cas présente des complications qui rendent difficile l'application de ces théories. Il m'a semblé que je disposais d'une méthode plus simple que celles qui avaient été suivies, et qui évitait certaines difficultés que les auteurs cités

---

(¹) PICARD, *Comptes rendus*, t. LXXXVII, 1878, p. 430 et 743; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XII, 1884, p. 48; *Traité d'Analyse*, t. III, p. 4 et 189. — POINCARÉ, *Journal de l'École Polytechnique*, 45ᵉ Cahier, t. XXVIII, 1878, p. 30; *Thèse*, Paris, 1879; *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. II, 1886, p. 154; *Acta mathematica*, t. XIII, 1890, p. 28; *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. V, 1881, p. 161; *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 336. — KŒNIGSBERGER, *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen*, 1889, p. 397. — LIAPOUNOFF, *Communications de la Société mathématique de Karkow*, 1892. Une traduction française de ce Mémoire, due à M. Davaux, a paru dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. IX, 1907; *voir* p. 214, 243, 284, 310. — BENDIXSON, *Stockholm Ofversigt*, t. LI, 1894. — HORN, *Journal de Crelle*, t. CXVI, 1897, p. 265; t. CXVII, p. 104 et p. 254. — LINDELÖF, *Acta Societatis Fennicæ*, t. XXII, nº 7.

n'avaient surmontées qu'à force d'ingéniosité. La méthode que j'emploie consiste à ramener, par des changements de variables, le système (1) à des formes réduites simples, dont l'intégration complète se fait sans peine.

Cette intégration des équations réduites fournit alors la solution du système (1) soit sous forme de développements en série dépendant d'un paramètre variable et de constantes arbitraires, soit sous la forme d'un système d'intégrales. Nous relions ainsi deux séries de résultats dont les uns ont été obtenus par MM. Picard, Kœnigsberger, Liapounoff, Horn et les autres par MM. Poincaré, Bendixson, Lindelöf.

Les diverses formes réduites obtenues mettent facilement en évidence les divers cas possibles et permettent des applications commodes, ainsi que je le montre en examinant en détail le cas où $n = 3$.

2. Dans le système d'équations (1), posons

$$X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L_i + [x_1, x_2, \ldots, x_n]_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

L_i désigne une forme linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $[x_1, x_2, \ldots, x_n]_2$ est une série procédant suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, série ne contenant pas de termes de degré inférieur au second et convergeant si les valeurs absolues des variables sont assez petites. Considérons l'équation caractéristique du système d'équations différentielles linéaires et homogènes

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = L_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines de cette équation.

MM. Poincaré et Picard ont obtenu la solution générale du système (1) lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1° Si l'on représente par des points les divers nombres réels ou imaginaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, il existe une droite D passant par l'origine et laissant d'un même côté tous les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;

2° Il existe un changement linéaire de variables, tel que si les nouvelles variables sont $y_1, y_2, \ldots, y_n$, le système (2) prenne la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i.$$

Cette condition est toujours vérifiée, si tous les nombres λ_i sont distincts [1], mais elle peut encore l'être s'il y a des racines multiples ;

3° Il n'existe entre les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aucune relation de la forme

$$\lambda_i = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \ldots + q_n\lambda_n,$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant des entiers positifs *dont la somme est supérieure à* 1.

Nous diviserons notre étude de la façon suivante :

I. Les conditions 1°, 2° et 3° sont vérifiées. Nous ne traitons ce cas bien connu que pour servir d'introduction à la méthode employée ;

II. Les conditions 1° et 2° sont vérifiées sans que 3° le soit ;

III. La condition 1° est vérifiée, sans que 2° le soit ; la condition 3° peut être vérifiée ou ne pas l'être ;

IV. La condition 1° n'est pas vérifiée, les conditions 2° et 3° peuvent être vérifiées ou non ;

V. Nous ferons l'application de la méthode employée au cas de $n = 2$ et de $n = 3$.

Les trois premières parties peuvent être résumées par le théorème suivant, d'où se déduisent facilement les autres résultats obtenus :

Théorème A. — *La condition* 1° *étant vérifiée, supposons les nombres λ_i rangés de telle sorte que, lorsque l'indice i augmente, la distance du point λ_i à la droite* D *n'aille pas en diminuant. Il existe un changement de variable*

$$z_i = g_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont les formules sont résolubles par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, tel que le système (1) *soit, en introduisant une variable auxiliaire t, remplacé par le système*

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i + \varphi_i(z_1, \ldots, z_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

---

(1) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 4.

les φ_i sont des polynomes ne contenant que les variables z d'indice inférieur à i. Le polynome φ_i ne contient pas d'autres termes que les termes de la forme $z_1^{q_1} z_2^{q_2} \dots z_{i-1}^{q_{i-1}}$ où $q_1, q_2, \dots, q_{i-1}$ sont des entiers positifs ou nuls vérifiant l'égalité

$$\lambda_i = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \dots + q_{i-1}\lambda_{i-1}.$$

Dans le cas IV, nous avons le théorème suivant :

Théorème B. — *Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les divers points λ_i situés d'un même côté d'une droite* D, *passant par l'origine, tandis que les autres points λ_i sont situés soit à l'origine, soit de l'autre côté de* D, *on peut toujours exprimer $x_1, x_2, \dots, x_n$ en fonction de p variables $z_1, z_2, \dots, z_p$ par des formules*

$$x_i = g_i(z_1, \dots, z_p) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

de telle façon que, si les z_i vérifient un système de p équations

$$(r) \qquad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_i + \varphi_j(z_1, z_2, \dots, z_{j-1}) \qquad (j = 1, 2, \dots, p),$$

les valeurs correspondantes des x_i vérifient le système (1). *La solution générale du système* (*r*) *fournit une famille de solutions du système* (1) *dépendant de $p - 1$ arbitraires.*

Les φ_j sont des polynomes obtenus d'après la même règle que dans le théorème A.

I.

3. Plaçons-nous dans le cas I, où les trois conditions 1°, 2° et 3° sont vérifiées. En effectuant le changement linéaire de variables dont il est question dans 2°, et introduisant une variable auxiliaire t, les équations (1) sont ramenées à la forme

$$(3) \qquad \frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

avec

$$(4) \qquad Y_i = \lambda_i y_i + [y_1, \dots, y_n]_2.$$

D'après un théorème connu de Poincaré (1), chacune des

(1) *Thèse*, Paris, 1879. — Picard, *Traité*, t. III, p. 5.

équations

$$(5) \qquad Y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admet pour solution une fonction f holomorphe et nulle pour $y_1 = y_2 \ldots = y_n = 0$. Nous pouvons prendre pour solution de l'équation (5)

$$f_i(y_1, \ldots, y_n) \equiv y_i + [y_1, \ldots, y_n]_2.$$

Faisons le changement de variables

$$(6) \qquad z_i = f_i(y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

équations qu'on peut résoudre par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Les équations (3) et (5) sont remplacées respectivement par les équations

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, \ldots, z_n),$$

$$Z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + Z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} - \lambda_i f = 0.$$

Cette dernière équation, en vertu du changement de variables effectué, admet la solution $f \equiv z_i$. Nous avons donc

$$Z_i - \lambda_i z_i \equiv 0.$$

Dans le cas où les conditions 1°, 2° *et* 3° *sont vérifiées, le système d'équations* (3) *se ramène, par un changement de variables de la forme* (6), *à la forme réduite*

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i.$$

En intégrant ces équations, nous avons $z_i = C_i e^{\lambda_i t}$. Nous pouvons poser $\theta = e^t$. Si nous résolvons alors les formules (6) par rapport aux y_i et si nous remplaçons les z_i par leurs expressions, nous obtenons les développements donnés par M. Picard.

Si nous remarquons qu'on a

$$\frac{z_i}{\theta^{\lambda_i}} \equiv \frac{f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\theta^{\lambda_i}} = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous obtenons les intégrales de Poincaré en éliminant θ entre ces relations prises deux à deux.

II.

4. Préliminaires. — Considérons le cas II, où les conditions 1° et 2° sont vérifiées sans que la condition 3° le soit. Nous supposerons, comme dans le cas I, que les équations (1) soient ramenées à la forme

$$(7) \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}$$

avec

$$Y_i = \lambda_i y_i + [y_1, \ldots, y_n]_2.$$

Ces équations gardent la même forme si l'on multiplie tous les dénominateurs par le facteur imaginaire $e^{i\omega}$: les quantités λ_j sont remplacées par les quantités $\mu_j = e^{i\omega}\lambda_j$.

Si l'on considère les points figurant les imaginaires λ_j, cette opération revient à imprimer aux points λ_j une rotation d'angle ω autour de l'origine. Puisque, d'après 1°, il existe une droite D telle que tous les points λ_j soient du même côté de cette droite, on peut choisir l'angle ω de telle façon que les parties réelles des quantités μ_j soient toutes positives.

Nous pouvons toujours supposer, en revenant aux notations primitives, que les parties réelles des λ sont toutes positives.

Nous allons tout d'abord supposer qu'il en est ainsi.

Rangeons les nombres λ_i (sans modifier leurs indices) dans un ordre tel que leurs parties réelles, qui sont positives, n'aillent pas en décroissant. Si les parties réelles de certains des nombres λ_i sont égales entre elles, nous classerons dans un ordre quelconque ces λ_i les uns par rapport aux autres.

Appelons, avec M. Horn, *combinaison des nombres* λ_i une expression de la forme

$$q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \ldots + q_n\lambda_n,$$

où les nombres q_i sont des entiers positifs ou nuls dont la somme est supérieure à 1. La condition 3° n'étant pas vérifiée, certains des λ seront égaux à des combinaisons d'autres λ.

Les λ étant rangés dans l'ordre que nous avons indiqué, on voit que chacun des nombres λ_i ne peut être égal qu'à une combinaison formée avec les λ qui le précèdent.

Déduisons de cette remarque un moyen pratique d'obtenir toutes les égalités de la forme

$$\lambda_i = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \ldots + q_n\lambda_n$$

qui peuvent exister. Nous considérons successivement les divers nombres λ à partir de celui que nous avons classé le second, et nous cherchons s'il est égal à une combinaison des λ qui le précèdent.

Nous pouvons maintenant, en modifiant convenablement les indices des λ, supposer que les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ne sont égaux à aucune combinaison des λ, tandis que les nombres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ sont égaux à une ou plusieurs combinaisons des λ.

Nous supposerons que les indices aient été modifiés de telle façon que les nombres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ étant rangés dans l'ordre de leurs indices, chacun d'eux ne puisse être égal qu'à une combinaison des λ d'indice inférieur.

Cette condition est réalisée, si les parties réelles des nombres $\lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ ne vont pas en décroissant lorsque l'indice augmente.

La transformation que nous avons employée pour rendre positives les parties réelles de tous les λ, nous ayant rendu tout le service que nous en attendions pour classer commodément les λ, nous pourrons, une fois les indices modifiés comme cela a été indiqué, abandonner cette transformation et revenir aux valeurs primitives des λ.

Soit

$$q_1^r\lambda_1 + q_2^r\lambda_2 + \ldots + q_n^r\lambda_n \tag{8}$$

une des combinaisons égales à l'un des nombres λ_k, k ayant l'une des valeurs $p+1$, $p+2$, $\ldots$, n. Ces combinaisons, où l'indice r prend un nombre fini de valeurs, peuvent etre supposées rangées dans un ordre tel que toutes les combinaisons égales à λ_k soient celles pour lesquelles on a

$$r'_k \leqq r \leqq r''_k,$$

r'_k et r''_k désignant deux entiers.

5. Réduction des équations (7) a une forme réduite. —

D'après le théorème déjà employé de Poincaré, l'équation

$$(8') \qquad Y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_j f = 0,$$

où j a l'une des valeurs $1, 2, \ldots, p$, admet une intégrale

$$f_j = y_j + [y_1, \ldots, y_n]_2.$$

Faisons le changement de variables

$$z_j = f_j(y, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

substituant aux p variables y_j les p variables z_j. En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas I, nous voyons que les équations (3) sont remplacées par les équations

$$(9) \qquad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(10) \quad \frac{dy_k}{dt} = Y'_k(z_1, \ldots, z_p, y_{p+1}, \ldots, y_n) \equiv \lambda_k y_k + [z_1, \ldots, z_p, y_{p+1}, \ldots; y_n]_2$$
$$(k = p+1, \ldots, n).$$

Si nous considérons maintenant l'équation

$$(11) \quad \lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_p z_p \frac{\partial f}{\partial z_p} + Y'_{p+1} \frac{\partial f}{\partial y_{p+1}} + \ldots + Y'_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+1} f = 0,$$

nous pourrons chercher à vérifier cette équation au moyen d'une fonction

$$(12) \qquad f \equiv y_{p+1} + [z_1, \ldots, z_p, y_{p+1}, \ldots, y_n]_2.$$

Le coefficient du terme $C_{m_1 m_2 \ldots m_n} z_1^{m_1} \ldots z_p^{m_p} y_{p+1}^{m_{p+1}} \ldots y_n^{m_n}$ dans le premier membre de cette série se calculera en égalant à o la somme des termes semblables au terme considéré. On obtient une égalité de la forme

$$(13) \quad [m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_n \lambda_n - \lambda_{p+1}] C_{m_1, \ldots, m_n} = - P_{m_1, m_2, \ldots, m_n},$$

$P_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ désignant une fonction des coefficients des séries γ'_k et des constantes $C_{p_1 p_2 \ldots p_n}$, pour lesquels on a

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n < m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$$

Le second membre de (13) sera donc connu, si l'on suppose que l'on ait d'abord déterminé les termes de degré 2, ensuite ceux de de degré 3, et ainsi de suite. On sera, en général, arrêté par une impossibilité dans la détermination de ces coefficients C; en effet, λ_{p+1} étant égal à toutes les combinaisons (8), pour lesquelles on a

$$(14) \qquad 1 = r'_{p+1} \leqq r \leqq r''_{p+1};$$

faisons

$$m_1 = q_1^r, \qquad m_2 = q_2^r, \qquad \ldots, \qquad m_n = q_n^r$$

et désignons par a_r la valeur de $P_{q_1^r q_2^r \ldots q_n^r}$, l'égalité (13) devient

$$a_r = 0,$$

condition qui, en général, ne sera pas vérifiée. Remarquons que r ayant l'une des valeurs indiquées, on a

$$q_{p+1}^r = q_{p+2}^r = \ldots = q_n^r = 0.$$

Pour former une équation analogue à (11) et admettant une solution de la forme (12), posons

$$\varphi_{p+1} \equiv \Sigma a_r z_1^{q_1^r} z_2^{q_2^r} \ldots z_p^{q_p^r},$$

la somme Σ s'étend à tous les termes pour lesquels r prend une valeur vérifiant les inégalités (14), les coefficients a_r ont les valeurs indiquées plus haut et se calculeront de la manière indiquée, à mesure que l'on déterminera les coefficients C de la série que nous allons définir. Considérons l'équation

$$(15) \qquad \lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_p z_p \frac{\partial f}{\partial z_p} + Y'_{p+1} \frac{\partial f}{\partial y_{p+1}} + \ldots + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+1} f - \varphi_{p+1} = 0$$

et cherchons à vérifier cette équation par une solution de la forme (12), nous aurons des calculs identiques à ceux que nous avons indiqués, mais on ne sera plus arrêté par une impossibilité lorsqu'on arrivera à la détermination d'un coefficient, tel que l'on ait $m_1 \lambda_1 + \ldots m_n \lambda_n - \lambda_{p+1} = 0$. En effet, le second membre de l'équation analogue à (13) sera

$$a_r - P_{q_1^r \ldots q_n^r},$$

et a_r est choisi par hypothèse de telle façon que ce second membre soit nul. Le coefficient $C_{q_1^r, \ldots, q_n^r}$ pourra être pris arbitrairement. Pour fixer les idées, nous ferons ce coefficient égal à o. En continuant ainsi, nous obtenons une série f de la forme indiquée et vérifiant l'équation (15). La convergence de cette série se démontre, sauf une légère modification comme dans le théorème de Poincaré; nous donnerons du reste n° 11 une démonstration comprenant la démonstration actuelle comme cas particulier.

Désignons par f_{p+1} la solution que nous venons d'obtenir pour l'équation (15) et faisons le changement de variables

$$z_{p+1} = f_{p+1} \equiv y_{p+1} + [z_1, \ldots, z_p, y_{p+1}, \ldots, y_n]_2,$$

les équations (9) ne changent pas, les équations (10) sont remplacées par les équations

$$(16)\qquad \begin{gathered} \frac{dz_{p+1}}{dt} = Z_{p+1}, \\ \frac{dy_k}{dt} = Y''_k = \lambda_k y_k + [z_1, \ldots, z_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_n]_2 \\ (k = p+2, \ldots, n). \end{gathered}$$

L'équation aux dérivées partielles est remplacée par

$$\lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_p z_p \frac{\partial f}{\partial z_p} + Z_{p+1} \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} + Y''_{p+2} \frac{\partial f}{\partial y_{p+2}} + \ldots + Y''_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+1} f - \varphi_{p+1} = 0.$$

Cette équation admettant la solution $f \equiv z_{p+1}$, nous avons

$$Z_{p+1} \equiv \lambda_{p+1} z_{p+1} + \varphi_{p+1}(z_1, \ldots, z_p).$$

En raisonnant sur l'équation

$$\lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + Z_{p+1} \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} + Y''_{p+2} \frac{\partial f}{\partial y_{p+2}} + \ldots + Y''_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+2} f = 0,$$

comme nous avons raisonné sur l'équation (11), nous voyons qu'on est, en général, arrêté par une impossibilité, lorsqu'on cherche à satisfaire à cette équation par une série entière

$$f(z_1 \ldots, z_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_n)$$

mais, si l'on désigne par

$$\varphi_{p+2}(z_1, \ldots, z_{p+1}) = \Sigma a_r z_1^{q_1^r} z_2^{q_2^r} \ldots z_{p+1}^{q_{p+1}^r},$$

un certain polynome ne contenant que les variables $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}$, et que l'on obtient en donnant à l'indice r, dans la somme Σ, toutes les valeurs vérifiant les inégalités

$$r'_{p+2} \leqq r \leqq r'_{p+1},$$

et en calculant les constantes a_r, comme cela a été indiqué pour φ_{p+1}, nous voyons qu'on peut vérifier l'équation

$$(17)\qquad \lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + Z_{p+1} \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} + Y''_{p+2} \frac{\partial f}{\partial y_{p+2}} + \ldots + Y''_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+2} f - \varphi_{p+2} = 0$$

par une fonction

$$f_{p+2} = y_{p+2} + [z_1, \ldots, z_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_n]_2,$$

et l'on voit, comme précédemment, que si l'on pose

$$z_{p+2} = f_{p+2} \equiv y_{p+2} + [z_1, \ldots, z_{p+1}, y_{p+1}, \ldots, y_n]_2,$$

la première des équations (16) sera remplacée par l'équation

$$\frac{dz_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2} z_{p+2} + \varphi_{p+2}(z_1, \ldots, z_{p+2}),$$

les autres équations (16) ne changeant pas de forme.

En continuant de la même façon, on voit qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Si les conditions 1° *et* 2° *sont vérifiées, il existe un changement de variables*

$$(18)\qquad z_i = y_i + [y_1, \ldots, y_n]_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et un système de polynomes $\varphi_k(z_1, \ldots, z_{k-1})$ *tel que le système* (7) *soit remplacé par le système*

$$(19)\qquad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(20)\qquad \frac{dz_k}{dt} = \lambda_k z_k + \varphi_k(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}) \qquad (k = p+1, \ldots, n).$$

Énoncé qui conduit bien au théorème A.

Remarque I. — Les variables z peuvent donc se diviser en deux catégories : celles auxquelles correspond une équation de la forme (19) et celles auxquelles correspond une équation (20). Si certains des polynomes φ_k se réduisent identiquement à 0, les variables correspondantes feront partie de la première catégorie. Ajoutons que rien ne prouve qu'il y ait une distinction essentielle entre les deux catégories de variables : nous allons voir qu'en modifiant la manière dont nous avons ramené les équations à une forme réduite (19), (20), on peut, dans certains cas, augmenter le nombre des variables de la première catégorie.

Remarque II. — Dans la détermination du changement de variables, $z_i = f_i(y_1, \ldots, y_n)$ qui a ramené les équations (7) à une forme réduite, les fonctions f_j correspondant aux valeurs $1, 2, \ldots, p$ de l'indice j sont déterminées indépendamment les unes des autres, et chacune d'elles est déterminée d'une façon unique, car on voit facilement que chacune d'elles doit vérifier l'équation (8′). Il n'en est plus de même des fonctions f_k correspondant aux valeurs $p+1$, $p+2$, ..., n de l'indice k. Dans chacune d'elles, nous pourrons, ainsi que nous l'avons dit, choisir arbitrairement certains coefficients. Si, au lieu de prendre ces coefficients nuls, comme nous l'avons fait pour fixer les idées, nous donnons à ces coefficients des valeurs quelconques, rien ne sera modifié dans la suite des raisonnements. Le polynome φ_{p+1} est déterminé encore d'une façon unique ; mais, la détermination du polynome φ_{p+2} peut dépendre du choix que l'on a fait pour les coefficients arbitraires de f_{p+1}. De même, la détermination du polynome φ_k pour $k > p+2$ peut dépendre du choix que l'on a fait pour les coefficients arbitraires de f_{p+1}, f_{p+2}, ..., f_{k-1}. Il en résulte qu'il est possible que la réduction à une forme réduite ait lieu de plusieurs façons. En choisissant convenablement les coefficients arbitraires, il est possible qu'on obtienne une forme réduite plus simple que celle que nous avons,

Considérons, par exemple, le système

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = 2y + x^2, \qquad \frac{dz}{dt} = 3z + x^3,$$

qui est déjà ramené à une forme réduite. Si nous posons $u = z - xy$, nous avons la forme réduite plus simple

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = 2y + x^2, \qquad \frac{du}{dt} = 3u.$$

Remarque III. — Rien n'est changé à nos raisonnements si, dans les équations (7), plusieurs des nombres λ_i sont égaux entre eux.

6. Intégration des équations réduites. — Les p équations (19) ont leur solution générale donnée par

$$z_j = C_j e^{\lambda_j t}, \tag{21}$$

les C_j étant des constantes arbitraires,

Si, dans φ_{p+1}, nous remplaçons $z_1, z_2, \ldots, z_p$ par leurs expressions, nous avons

$$\varphi_{p+1}(z_1, \ldots, z_p) = e^{\lambda_{p+1}t}\varphi_{p+1}(C_1, \ldots, C_p). \tag{22}$$

En effet, si $a_r z_1^{q_1^r} z_2^{q_2^r} \ldots z_p^{q_p^r}$ est un des termes de φ_{p+1} nous avons

$$\lambda_1 q_1^r + \lambda_2 q_2^r + \ldots + \lambda_p q_p^r = \lambda_{p+1}.$$

La première des équations (20) devient donc

$$\frac{dz_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1} z_{p+1} + e^{\lambda_{p+1}t}\varphi_{p+1}(C_1, \ldots, C_p)$$

dont la solution générale est

$$z_{p+1} = e^{\lambda_{p+1}t}[C_{p+1} + t\,\varphi_{p+1}(C_1, \ldots, C_p)].$$

La seconde des équations (20) deviendra de même

$$\frac{dz_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2} z_{p+2} + e^{\lambda_{p+2}t}\psi_{p+2}(t, C_1, \ldots, C_{p+1})$$

en posant

$$\psi_{p+2}(t, C_1, \ldots, C_{p+1}) = \varphi_{p+2}[C_1, C_2, \ldots, C_p, C_{p+1} + t\,\varphi_{p+1}(C_1, \ldots, C_p)],$$

nous aurons donc

$$z_{p+2} = e^{\lambda_{p+2}t}[C_{p+2} + P_{p+2}(t, C_1, \ldots, C_{p+1})].$$

P_{p+2} est, comme ψ_{p+2}, un polynome par rapport à t et aux constantes $C_1, C_2, \ldots, C_{p+1}$; le degré de P_{p+2} par rapport à t sera supérieur d'une unité au degré de ψ_{p+2} par rapport à t.

Nous pourrons continuer à opérer de la même façon et arriver à intégrer l'équation contenant z_n. On aura

$$z_k = e^{\lambda_k t}[C_k + P_k(t, C_1, \ldots, C_{k-1})] \qquad (k = p+1, \ldots, n). \tag{23}$$

Les C sont des constantes et P_k un polynome par rapport à t et aux C.

Remarque I. — Posons, pour abréger,

$$u_i = C_i e^{\lambda_i t}.$$

Nous avons, d'après (22)

$$e^{\lambda_{p+1} t}\varphi_{p+1}(C_1, \ldots, C_p) = \varphi_{p+1}(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$
$$e^{\lambda_{p+2} t}\psi_{p+2}(t, C_1, \ldots, C_p) = \varphi_{p+2}[u_1, u_2, \ldots, u_p, u_{p+1} + t\,\varphi_{p+1}(u_1, \ldots, u_p)].$$

Il en résulte que $e^{\lambda_{p+2} t}P_{p+2}(t, C_1, \ldots, C_{p+1})$ sera un polynome en $u_1, u_2, \ldots, u_p, u_{p+1}$ dont les coefficients seront des polynomes du second degré en t. En continuant à raisonner de même, on voit que l'on a

$$z_k = u_k + Q_k(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, t) \qquad (k = p+1, \ldots, n).$$

Q_k est un polynome en $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ et t. Les termes de ce polynome sont au moins du second degré par rapport à u_1, $u_2, \ldots, u_{k-1}$.

Remarque II. — Si, comme cela arrive souvent, t est une variable auxiliaire qu'il n'est pas utile de conserver, nous pourrons éliminer t entre les formules d'intégration (22) et (23). Nous choisirons, parmi les variables z_j de la première catégorie, une variable, z_1, par exemple, à laquelle nous ferons jouer un rôle particulier. Les équations différentielles (19) et (20) ne changeant pas lorsqu'on change t en $t - t_0$, nous ne diminuerons pas la généralité de la solution fournie par les formules

$$z_j = C_j e^{\lambda_j t},$$
$$z_k = e^{\lambda_k t}[C_k + P_k(t, C_1, \ldots, C_{k-1})].$$

en supposant que pour $t = 0$ l'on ait $z_1 = 1$, ce qui revient à supposer $C_1 = 1$. Nous voyons, du reste, que les formules ainsi obtenues nous fournissent, pour chaque système de valeurs initiales attribuées à $z_1, z_2, \ldots, z_n$, une solution et une seule des équations

$$(24)\qquad \frac{dz_1}{\lambda_1 z_1} = \frac{dz_2}{\lambda_2 z_2} = \ldots = \frac{dz_{p+1}}{\lambda_{p+1} z_{p+1} + \varphi_{p+1}} = \ldots = \frac{dz_n}{\lambda_n z_n + \varphi_n},$$

nous avons donc bien la solution générale de ce système d'équations différentielles.

Nous aurons donc, en faisant $C = 1$ et en supposant $\lambda_1 = 1$, comme on peut toujours le faire en divisant par λ_1 tous les dénominateurs des équations (24),

$$t = \log z_1,$$
$$z_j = C_j z_1^{\lambda_j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, p),$$
$$z_k = z_1^{\lambda_k}[C_k - P_k(\log z_1, 1, C_2, \ldots, C_{k-1})] \qquad (k = p+1, \ldots, n).$$

Remarque III. — Si, parmi les expressions y_i, il en est une λ_r qui se réduise à $\lambda_r y_r$, nous pourrons poser

$$z_r = y_r,$$

les autres changements de variables (18) s'effectuant comme cela a été indiqué. Cette variable z_r fera sûrement partie des variables de la première catégorie, nous pourrons donc lui faire jouer le rôle que jouait z_1 dans la remarque précédente.

Par exemple, si nous avons le système d'équations différentielles, considéré par M. Horn

$$(25) \qquad x\frac{dx_i}{dx} = \lambda_i x_i + a_i x + [x, x_1, \ldots, x_n]_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les racines de l'équation caractéristique sont $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si la condition 2° est vérifiée, le changement linéaire de variable qui ramène les équations (24) à la forme (7) est

$$y_i = x_i + \frac{a_i x}{\lambda_i - 1}.$$

Si la condition 1° est vérifiée, les théories précédentes s'appliquent, et il existe un changement de variables

$$(26) \qquad z_i = y_i + [x, y, \ldots, y_n]_2$$

qui ramène le système donné à la forme

$$\frac{dx}{dt} = x,$$
$$(27) \qquad \frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i + \varphi_i(x, z_1, \ldots, z_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Certains des polynomes φ_i peuvent être identiquement nuls.

Nous pouvons faire jouer à la variable x le rôle que jouait z_1 dans la remarque précédente, et nous aurons

$$z_i = x^{\lambda_i}[C_i + P_i(\log x, 1, C_1, C_2, \ldots, C_{i-1})]. \tag{28}$$

On peut encore écrire, d'après la Remarque I,

$$z_i = C_i x^{\lambda_i} + Q_i(x, C_1, x^{\lambda_1}, \ldots, C_{i-1}\, x^{\lambda_{i-1}}, \log x),$$

Q_i est un polynome par x, $C_1 x^{\lambda_1}$, ..., $C_{i-1}\, x^{\lambda_{i-1}}$ et $\log x$.

7. Développements de M. Horn [1]. — Si nous résolvons les formules (18) du changement de variables par rapport aux y_i, nous avons

$$y_i = z_i + [z_1, \ldots, z_n]_2.$$

Si, dans ces formules, nous remplaçons les z_i par leurs expressions (21) et (23), *nous aurons, d'après la* remarque *I*, *des développements des y_i suivant les puissances des quantités $C_i e^{\lambda_i t}$, les coefficients de ces développements étant des polynomes par rapport à t.*

Ces développements sont convergents si les valeurs de t sont telles que les modules des z_i soient suffisamment petits.

En particulier, pour les équations (25) de M. Horn, les formules (26) nous donneront

$$y_i = z_i + [x, z_1, \ldots, z_n]_2,$$

et en remplaçant les z_i par leurs expressions (28), nous aurons les développements des fonctions y_i suivant les puissances des x et des quantités $C_i x^{\lambda_i t}$, les coefficients de ces développements étant des polynomes en $\log x$. Ce sont les développements que M. Horn a obtenus par la méthode des coefficients indéterminés.

Remarque. — Une fois établies l'existence et la convergence des développements dont nous venons de parler, la méthode la plus pratique pour obtenir autant de termes que l'on veut de ces développements me paraît être la méthode suivante, dont on remarquera

(1) Avant d'avoir été étudiés par M. Horn, ces développements avaient été brièvement signalés par M. Liapounoff dans le Mémoire cité, écrit en russe.

l'analogie avec la méthode donnée par M. Liapounoff, bien qu'elle me paraisse dériver d'un principe tout différent.

Les coefficients des développements trouvés étant des polynomes par rapport aux constantes $C_1, \ldots, C_n$, nous pourrons les écrire sous la forme de séries procédant suivant les puissances de ces constantes.

Nous allons chercher les termes de ces développements. Soit

$$y_i = (y_i)_1 + (y_i)_2 + \ldots + (y_i)_s + \ldots \tag{29}$$

le développement de y_i, en désignant par $(y_i)_s$ des polynomes homogènes de degré s. Lorsque nous remplaçons, dans les équations

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + (y_1, \ldots, y_n)_2, \tag{30}$$

les y_i par ces expressions, les deux membres de chacune de ces équations deviennent deux séries entières par rapport à C_i, séries qui doivent être identiques. Nous égalerons successivement dans les deux membres les termes de degré 1, 2, ..., s. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{(dy_i)_1}{dt} &= \lambda_i (y_i)_1, \\ \frac{(dy_i)_s}{dt} &= \lambda_i (y_i)_s + (A_i)_s, \end{aligned} \tag{31}$$

$(A_i)_s$ désigne l'ensemble des termes de degré s par rapport aux constantes qui sont fournis par le développement du terme $[y_1, \ldots, y_n]_2$ du second membre de (30), lorsque les y_i sont remplacés par leurs expressions (29). $(A_i)_s$ est un polynome connu formé avec les expressions $(y_i)_j$ pour lesquelles l'indice j est inférieur à o.

Nous avons

$$(y_i)_1 = C_i e^{\lambda_i t}.$$

Les expressions $(A_i)_2$ seront donc des sommes de termes de la forme αe^{at}, a étant une combinaison des λ_i et α un polynome homogène et du second degré en $C_1, \ldots, C_n$. Nous aurons, par exemple, en faisant $i = q$

$$(A_q)_2 = \sum \alpha_j e^{a_j t},$$

d'où, en cherchant pour $s = 2$ et $i = q$ une solution particulière de l'équation (31),

$$(y_q)_2 = \sum \frac{a_j e^{a_j t}}{\alpha_j - \lambda_q}.$$

Dans le cas où certains des nombres a_j sont égaux à λ_q, nous aurons dans $(y_q)_2$ des termes de la forme $\alpha t e^{at}$.

Nous aurons de même toutes les expressions $(y_i)_n$. Le calcul des expressions $(y_i)_s$, connaissant toutes les fonctions $(y_i)_s$ pour lesquelles on a $s' < s$, se présente de la même façon. On a, par exemple,

$$\frac{d(y_n)_s}{dt} = \lambda_n (y_n)_s + \sum \alpha_j t^{a_j} e^{b_j t},$$

où les expressions α_j sont des polynomes homogènes de degré s par rapport aux C_i, a_j des entiers positifs, b_j des combinaisons des λ_i. On sait trouver d'une façon tout élémentaire une solution de la forme

$$(y_n)_s = \sum \beta_j t^{c_j} e^{b_j t},$$

où β_j est homogène et de degré s par rapport aux C_i ; le plus grand des entiers c_j est égal au plus grand des entiers a_j, si aucun des nombres b_j n'est égal à λ_n, mais pourra lui être supérieur d'une unité dans le cas, qui n'est pas ici exceptionnel, où λ_n est égal à certains des b_j. La même méthode de calcul s'applique pour $(y_i)_s$, quelle que soit la valeur de i.

Dans le cas des équations (25) de M. Horn, nous mettons ces équations sous la forme (27) et nous faisons le changement de variables (26) donnant les équations (27).

On a

$$x = C e^t,$$

$$z_i = x^{\lambda_i}[C_i + P_i(\log x, C, C_1, \ldots, C_{i-1})].$$

Nous aurons donc, d'après la méthode précédente, le développement des fonctions y_i en séries dont les termes successifs $(y_i)_1$, $(y_i)_2$, $(y_i)_s$ seront d'après la Remarque I du n° 6, des polynomes homogènes et de degrés respectifs 1, 2, ..., s par rapport aux expressions Ce^t, $C_i e^{\lambda_i t}$. Les coefficients de ces polynomes sont eux-mêmes des polynomes en t. D'après la remarque II du n° 6, on peut faire $C = 1$. On a donc $t = \log x$. Les fonctions $(y_i)_s$ sont donc des polynomes homogènes et de degré s par rapport à x et aux quantités $C_i x^{\lambda_i}$. Les coefficients de ces polynomes sont des polynomes en $\log x$.

8. Intégrales de M. Lindelöf. — Des formules (21) et (23) donnant la solution générale du système (19) (20), nous allons déduire, en éliminant t et résolvant par rapport aux constantes C_i, des fonctions restant constantes pour une solution quelconque de ce système et vérifiant, par suite, l'équation aux dérivées partielles

$$Z(f) \equiv Z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + Z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0, \tag{32}$$

où l'on a

$$Z_i = \lambda_i z_i + \varphi_i(z_i, \ldots, z_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

les polynomes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont, d'ailleurs, identiquement nuls. Nous avons les formules (21) et (23)

$$z_j = C_j e^{\lambda_j t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{33}$$

$$z_{p-1} = e^{\lambda_{k+1} t}[C_{p+1} + t\,\varphi_{p+1}(C_1, C_2, \ldots, C_p)], \tag{34}$$

$$z_k = e^{\lambda_k t}[C_k + P_k(t, C_1, \ldots, C_{k-1})] \qquad (k = p+2, \ldots, n). \tag{35}$$

D'après la Remarque I du n° 6, nous pouvons, en posant $u_i = C_i e^{\lambda_i t}$, écrire

$$z_j = u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$z_{p+1} = u_{p+1} + t\,\varphi_{p+1}(z_1, \ldots, z_p), \tag{36}$$

$$z_k = u_k + Q_k(u_1, \ldots, u_{k-1}, t) \qquad (k = p+2, \ldots, n), \tag{37}$$

Q_k étant un polynome en $u_1, \ldots, u_{k-1}$ et t.

Si, dans l'égalité (35) relative à $k = p+1$, nous remplaçons $u_1, \ldots, u_{k-1}$ par leurs valeurs tirées des égalités précédentes, nous avons

$$z_{p+2} = u_{p+2} + S_{p+2}(z_1, \ldots, z_{p+1}, t).$$

En opérant de même pour une valeur quelconque de k, nous obtenons

$$z_k = u_k + S_k(z_1, \ldots, z_{k-1}, t) \qquad (k = p+1, \ldots, n),$$

S_k étant un polynome en $z_1, \ldots, z_{k-1}$ et t. Ces relations peuvent encore s'écrire

$$z_k = C_k e^{\lambda_k t} + S_k(z_1, \ldots, z_{k-1}, t). \tag{38}$$

Nous les obtiendrons encore en éliminant $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ entre une des égalités (35) et les égalités (33), (34), (35) qui la précèdent.

Nous pouvons, comme nous l'avons remarqué, supposer $C_1 = 1$, $\lambda_1 = 1$, d'où

$$z_1 = e^t, \qquad t = \log z_1.$$

En portant ces valeurs dans (33), (34), (35) et résolvant par rapport aux constantes, nous avons les $n - 1$ intégrales suivantes de l'équation (32) :

$$(39) \qquad J_i \equiv z_i z^{-\lambda_i} = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(40) \qquad J_{p+1} \equiv [z_{p+1} - \log z_1 \varphi_{p+1}(z_1, \ldots, z_p)] z^{-\lambda_{p+1}} = C_{p+1},$$

$$(41) \quad J_k \equiv [z_k - S_k(z_1, \ldots, z_{k-1}, \log z_1] z^{-\lambda_k} = C_k \qquad (k = p+2, \ldots, n).$$

Nous pouvons obtenir des intégrales plus simples que celles données par les formules (41). Transformons d'abord la solution (40). En remarquant que, d'après les formules (33), on a

$$\varphi_{p+1}(z_1, \ldots, z_p) = z_1^{\lambda_{p+1}} \varphi_{p+1}(C_1, \ldots, C_p),$$

nous pouvons remplacer l'intégrale (40) par l'intégrale

$$(42) \qquad J \equiv z_{p+1}(\varphi_{p+1})^{-1} - \log z_1 = C.$$

D'autre part, un quelconque des λ_k étant égal à une combinaison des λ d'indice moindre et ceux-ci, jusqu'à λ_{p+1} inclusivement, étant égaux, à des combinaisons de λ d'indice moindre, un quelconque des λ_k sera égal au moins à une combinaison de λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Nous aurons

$$\lambda_k = q_1^{k'} \lambda_1 + q_2^{k'} \lambda_2 + \ldots + q_p^{k'} \lambda_p.$$

Les formules (33) donnent, en introduisant un certain produit Π_k, et faisant $C_1 = 1$

$$(43) \qquad \prod\nolimits_k \equiv z_1^{q_1^{k'}} z_2^{q_2^{k'}} \ldots z_p^{q_p^{k'}} = z_1^{\lambda_k} C_2^{q_2^{k'}} \ldots C_p^{q_p^{k'}}.$$

On peut donc remplacer tout d'abord les intégrales (41) par les intégrales

$$J'_k = [z_k - S_k(z_1, \ldots, z_{k-1}, \log z_1)] \left(\prod\nolimits_k\right)^{-1} = C'_k.$$

Si maintenant de (42) nous tirons

$$\log z_1 \equiv z_{p+1}(\varphi_{p+1})^{-1} - J,$$

et si, dans une des intégrales J'_k, nous remplaçons $\log z$ par cette expression, nous obtenons une expression G, que nous pourrons écrire

$$G \equiv G_0 + G_1 J + \ldots + G_q J^q + \ldots + G_s J^s$$

en l'ordonnant suivant les puissances de J. L'entier s a une valeur qui varie suivant la valeur de k. On a

$$G_0 \equiv [z_k + R_0(z_1, \ldots, z_{k-1})] \left(\prod_k\right)^{-1},$$

$$G_q \equiv R_q(z_1, \ldots, z_{k-1}) \left(\prod_k\right)^{-1} \qquad (q - 1, 2, \ldots, s).$$

Les expressions R_0, R_q, R_s étant des fonctions rationnelles dont les dénominateurs sont des puissances de φ_{p+1}.

L'expression G est une solution de l'équation (32). Si dans (32) nous remplaçons f par G, en remarquant que, puisque J est solution de (32) on a $Z(J) = 0$, nous avons

$$(44) \qquad Z(G_0) + Z(G_1)J + \ldots + Z(G_q)J^q + \ldots + Z(G_s)J^s = 0.$$

Cette identité doit avoir lieu, quels que soient $z_1, \ldots, z_k$. Choisissons, pour ces variables, des valeurs arbitraires (n'annulant pas φ_{p+1} afin d'éviter toute difficulté), laissons aux variables z_2, $z_3, \ldots, z_k$ les valeurs choisies et faisons décrire à z_1 une courbe fermée autour de $z_1 = 0$. Lorsque z_1 aura décrit m fois cette courbe, la valeur de J aura varié de $2m\pi\sqrt{-1}$, tandis que les coefficients des puissances de J dans le polynome (44) reprennent les mêmes valeurs. Le polynome (44) en J, qui est nul pour une infinité de valeurs de J, sera donc identiquement nul. Il en résulte que $G_0, G_q, \ldots, G_s$ sont des solutions de l'équation (32).

Si nous appliquons d'abord cette méthode pour $k = p + 2$, G_0 nous fournit l'intégrale

$$I_{p+2} \equiv [z_{p+2} + T_{p+2}(z_1, \ldots, z_{p+1})] \left(\prod_k\right)^{-1} = C_{p+2},$$

qui est distincte des solutions (39) et (40) déjà obtenues, puisque celles-ci ne dépendaient que des variables $z_1, \ldots, z_{p+1}$. Quant aux expressions $G_1, G_2, \ldots, G_s$, ou bien elles se réduisent à des constantes, ou bien elles ne fournissent pas d'intégrales distinctes des intégrales deja obtenues. En effet, une quelconque de ces expressions, ne pouvant contenir que les variables $z_1, \ldots, z_{p+1}$, est une solution de l'équation

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j z_j \frac{\partial f}{\partial z_j} + [\lambda_{p+1}\, z_{p+1} + \varphi_{p+1}(z_1, \ldots, z_p)] \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} = 0.$$

Or, nous avons déjà avec (39) et (40) p solutions distinctes de cette équation.

En appliquant successivement pour $k = p+3, p+4, \ldots, n$ la méthode indiquée, on voit de la même façon que l'on obtient chaque fois une seule intégrale, distincte des intégrales précédentes.

Enfin, si dans les $n-1$ intégrales obtenues, nous remplaçons les z_i par leurs expressions (18) en fonction des y, nous obtenons les intégrales du système (7) obtenues par M. Lindelöf. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si les conditions 1° *et* 2° *sont vérifiées, il existe un système de fonctions*

$$z_i = y_i + [y_1, \ldots, y_n]_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$y_i = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \ldots + a_n^i x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tel que l'équation

$$X_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

admette les $n-1$ intégrales suivantes

$$z_j z^{-\lambda_i} \qquad (i = 2, 3, \ldots, p),$$

$$z_{p+1}[\varphi(z_1, \ldots, z_p)]^{-1} - \log z_1,$$

$$(45) \qquad [z_k + T_k(z_1, \ldots, z_{k-1})]\Big(\prod_k\Big)^{-1} \qquad (k = p+2, \ldots, n),$$

où φ est un polynome, Π_k un produit de puissances entières des variables $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et T_k *une fonction rationnelle de $z_1, \ldots, z_{k-1}$ dont le dénominateur est une puissance de φ.*

Remarque I. — D'après la formule (43), nous pouvons dans (45) remplacer Π_k par $z_1^{\lambda_k}$. La substitution inverse, qui avait été faite pour simplifier les raisonnements, n'a pas besoin d'être maintenue dans les résultats. Nous pourrons en faire abstraction.

Remarque II. — Pour obtenir les intégrales (45), nous avons d'abord éliminé $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$ entre une des équations (35) et les équations (35), (34) et (33) qui la précèdent. Nous avons ensuite remplacé e^t par z_1 et t par $\log z_1$.

Ceci revient à faire $C_1 = 1$ dès le début du calcul, à remplacer la première des équations (33) par $z_1 = e^t$ et à éliminer $t, C_2, \ldots, C_{k-1}$ entre les relations que nous avions considérées. Nous avons alors résolu la relation obtenue par rapport à C_{k-1} et remplacé $\log z_1$ par $z_{p+1}(\varphi_{p+1})^{-1} - J$.

Pour obtenir l'expression G_0 qui nous a fourni une intégrale, nous n'avons conservé que les termes ne contenant pas J. Il est donc évident que nous pouvons faire dès le début du calcul $J = 0$, ce qui revient à faire, dans (40) et (34), $C_{p+1} = 0$. De plus, au lieu de faire cette hypothèse après avoir éliminé les constantes $C_2, C_3, \ldots, C_{k-1}$, nous pouvons la faire avant de les éliminer.

En résumé, *pour obtenir les diverses intégrales* (45), *nous intégrons les équations* (19) *et* (20) *jusqu'à celle de rang* k ; *nous particularisons l'intégration en faisant* $C_1 = 1$, $C_{p+1} = 0$. *Nous obtenons ainsi les relations*

$$z_1 = e^t, \qquad z_j = C_j e^{\lambda_j t} \qquad (j = 2, 3, \ldots, p),$$
$$z_{p+1} = t\,\varphi_{p+1}(1, C_2, \ldots, C_p),$$
$$z_i = e^{\lambda_i t}[C_i + P_i(t, 1, C_2, \ldots, C_p, 0, C_{p+1}, \ldots, C_{i-1})]$$
$$(i = p+1, \ldots, k).$$

Nous éliminons enfin les $k-1$ *quantités* $e^t, t, C_2, \ldots, C_p, C_{p+1}, \ldots, C_{k-1}$ *entre les* k *relations que nous avons. En résolvant par rapport à* C_k *la relation obtenue, nous avons l'intégrale* (45).

Remarque III. — Si, parmi les polynomes P_k des formules (35), il en est un autre que $t\varphi_{p+1}$ dans lequel t figure seulement au premier degré, nous pouvons faire jouer à la relation (35) correspondante le rôle joué par la relation (34).

III.

9. Considérons le cas où la condition 1° étant vérifiée, les conditions 2° et 3° ne le sont pas. Nous supposons que l'équation caractéristique ait des racines multiples. On sait ([1]) que, dans ce cas, il existe un changement linéaire de variables, substituant les variables y_i aux variables x_i, et tel que les équations différentielles (1) deviennent

$$(46)\qquad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + b_i p_{i-1} + (y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons eu soin d'attribuer les indices de telle façon que les racines égales λ_i de l'équation caractéristique aient des indices consécutifs. Les constantes b_i peuvent être nulles ; elles sont toujours nulles pour les valeurs de i telles que l'on ait $\lambda_i \neq \lambda_i - 1$. Les constantes b_i qui ne sont pas nulles peuvent être supposées égales à 1.

Faisons le changement de variables

$$(47)\qquad t = \log u^r, \qquad y_i = u^{r_i} u_i.$$

Nous avons

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{r_i}{r} u^{r_i} u_i + u^{r_i} \frac{du_i}{dt},$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i u^{r_i} u_i + b_i u^{r_{i-1}} u_{i-1} + [u^{r_1} u_1, \ldots, u^{r_n} u_n]_2.$$

D'où

$$(48)\qquad \frac{du_i}{dt} = \left(\lambda_i - \frac{r_i}{r}\right) u_i + b_i u^{r_{i-1} - r_i} u_{i-1} + [u^{r_1} u_1, \ldots, u^{r_n} u_n]_2 u^{-r_i}.$$

Si nous voulons que, dans le second membre de chacune de ces équations, le premier terme soit le seul terme du premier degré par rapport aux variables u, u_1, ..., u_n, il faut d'abord que, si b_i n'est pas nul, on ait $r_{i-1} > r_i$. Pour fixer les idées, nous prendrons

$$r_{i-1} = 1 + r_i.$$

---

[1] *Voir*, par exemple, Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, 2ᵉ éd., p. 488.

Toutes les expressions $[u^{r_1} u_1, \ldots, u^{r_n} u_n]_2$ contiendront par suite u^{2r_n} en facteur ; il suffira donc, pour avoir la forme d'équation voulue, de prendre

$$2r_n > r_1,$$

c'est-à-dire

$$2r_n > r_n + n - 1, \qquad r_n > n - 1.$$

Nous prendrons

$$r_i = 2n - i.$$

Si nous posons

$$(49) \qquad \mu_i = \lambda_i - \frac{r_i}{r},$$

nous avons, d'après (48),

$$(50) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{u}{r},$$

$$(51) \qquad \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i + [u, u_1, \ldots, u_n]_2.$$

La condition 1° étant vérifiée pour les équations (1), on peut toujours, ainsi que nous l'avons vu n° 4, supposer que les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ont leurs parties réelles positives. On peut alors prendre r assez grand pour que les parties réelles des nombres μ_i soient aussi toutes positives, et que le nombre $\frac{1}{r}$ que nous pouvons désigner par μ_0 soit inférieur aux parties réelles des autres nombres. La condition 1° sera donc vérifiée pour les équations (50) (51), puisque les parties réelles des nombres $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ sont positives. La condition 2° est vérifiée, d'après la forme même des équations (51).

Nous ne supposerons pas que la condition 3° soit vérifiée. Si nous supposons les nombres λ_i rangés de telle façon que leurs parties réelles n'aillent pas en décroissant, il en sera *a fortiori* de même pour les nombres μ_i. Un de ces nombres μ_i ne pourra être égal qu'à une combinaison des nombres $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{i-1}$ d'indice inférieur à i. Nous pourrons toujours supposer, en prenant s'il le faut $p = 1$, que les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ ne sont égaux à aucune combinaison des nombres μ.

Si nous appliquons au système des équations (50) et (51) la méthode employée au début du n° 5, nous voyons que, pour chaque valeur de $j = 1, 2, \ldots, p$, il existe une fonction

$$F_j = u_j + [u, u_1, \ldots, u_n]_2$$

vérifiant l'équation

$$(52)\qquad \frac{u}{r}\frac{\partial F}{\partial u}+\sum_{i=1}^{n}(\mu_i u_i+[u, u_1, \ldots, u_n]_2)\frac{\partial F}{\partial u_i}-\mu_j F=0.$$

Nous allons montrer que l'on peut écrire, en revenant aux variables $y_1, \ldots, y_n$,

$$(53)\qquad u^{r_j}F_j(u, u_1, \ldots, u_n)=F_j(1, y_1, \ldots, y_n)\equiv f_j(y_1, \ldots, y_n),$$

identité définissant une certaine série entière f_j. Nous montrerons ensuite qu'on a

$$(54)\qquad f_j\equiv y_j+[y, \ldots, y_n]_2.$$

Les termes de l'expression $[u, u_1, \ldots, u_n]_2$ qui figurent dans le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ proviennent de l'expression

$$(55)\qquad b_i y_{i-1}+[y_1, \ldots, y_n]_2$$

divisée par u^{r_i}, ainsi qu'on le voit, en se reportant à la formation des équations (48) et (51). Un terme $my_1^{m_1}, y_2^{m_2}, \ldots, y_n^{m_n}$ de l'expression (55) fournira, dans le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u_i}$, un terme $mu^{m_0}u_1^{m_1}, \ldots, u_n^{m_n}$ en posant

$$(56)\qquad m_0=m_1r_1+m_2r_2+\ldots+m_nr_n-r_i.$$

Partant de là, nous allons montrer que, si les termes de F_j qui sont de degré inférieur à q s'expriment, après avoir été multipliés par u^{r_j}, au moyen d'un polynome en $y_1, \ldots, y_n$, il en sera de même pour les termes de degré q.

Écrivons, en effet, l'équation (52) sous la forme

$$(57)\qquad \frac{u}{r}\frac{\partial F}{\partial u}+\sum_{i=1}^{n}\mu_i u_i\frac{\partial F}{\partial u_i}-\mu_j F=-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i y_{i-1}+[y_1, \ldots, y_n]_2}{u^{r_i}}\frac{\partial F}{\partial u_i},$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ pourront dans le second membre de (55) être remplacés par leurs expressions (46). Soit $lu^{l_0}u_1^{l_1}\ldots, u_n^{l_n}$ un terme de degré inférieur à q de F_j. Puisque le produit de ce terme par u^{r_j} est un terme d'un polynome en $y_1, \ldots, y_n$, nous devons avoir, d'après (56),

$$(58)\qquad l_0=l_1r_1+l_2r_2+\ldots+l_nr_n-r_j.$$

Les termes du second membre de (57) fournis par le terme que nous venons de considérer sont les termes de l'expression

$$-l\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i y_{i-1}+[y_1, \ldots, y_n]_2}{u^{r_i}}\, l_i u^{l_0} u_1^{l_1}\ldots u_i^{l_i-1}\ldots u^{l_n},$$

qui peut s'écrire, d'après (58),

$$-l\sum_{i=1}^{n}(b_i y_{i-1}+[y_1, \ldots, y_n]_2)\, l_i y_1^{l_1}\ldots y_i^{l_i}\ldots y_n^{l_n} u^{-r_j}.$$

Il en résulte que, lorsqu'on déterminera les termes de degré q de F_j, en identifiant dans les deux membres de (55) les termes de degré q, on ne pourra obtenir que des termes qui, multipliés par u^{r_j}, s'exprimeront en fonction entière de $y_1, \ldots, y_n$.

Pour $q=2$, les termes de F_j de degré inférieur à 2 se réduiront à u_j, nous avons $u^{r_j}u_j = y_j$. Il résulte donc bien de la propriété démontrée que $u^{r_j}F_j$ est une série entière en $y_1, \ldots, y_n$. Un terme $lu^{l_0}u_1^{l_1}, \ldots, u_n^{l_n}$ de F_j peut s'écrire d'après (58) $ly_1^{l_1}, \ldots, y_n^{l_n}u^{-r_j}$; nous avons donc bien l'égalité (53).

Pour démontrer que f_j n'a pas d'autre terme du premier degré que le terme y_j, faisons les remarques suivantes :

1° Un terme $c_i y_i$ de f_j, provient d'un terme $c_i u^s u_i$ de F_j, nous aurons donc d'après (53) et les valeurs de r_i et r_j

$$s = r_i - r_j = j - i.$$

Ceci montre d'abord que l'on doit avoir $i \leqq j$, et ensuite que, pour obtenir les termes du premier degré de f_j, il suffit de chercher les termes de F_j qui sont de la forme $c_i u^{j-i} u_i$, c'est-à-dire les termes où $u_1, \ldots, u_n$ figurent au premier degré.

2° Si l'on considère un de ces termes, la somme des termes semblables qui figurent dans (52) doit être identiquement nulle. Si nous remarquons que dans (52) tous les coefficients des dérivées de F contiennent $u_1, \ldots, u_n$ au moins au premier degré, nous voyons que, pour obtenir dans (52) les termes du premier degré en $u_1, \ldots, u_n$, il suffit de considérer les termes du premier degré en $u_1, \ldots, u_n$ dans F et dans les coefficients des dérivées de F.

3° Pour $i \leqq p$, on a $b_i = 0$. En effet, nous avons dit à propos de (46) que, si b_i est différent de o, on a $\lambda_i = \lambda_i - 1$, c'est-à-dire

$$\mu_i = \mu_{i-1} + \frac{1}{r}, \qquad \mu_i = \mu_0 + \mu_{i-1}.$$

Contrairement aux hypothèses faites, un des nombres μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_p$ serait égal à une combinaison des nombres μ, si un des nombres $b_1, \ldots, b_p$ n'était pas nul.

En utilisant les trois remarques précédentes, on voit que les termes de F_j qui sont du premier degré en $u_1, \ldots, u_n$ vérifient l'identité

$$\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{j-i}{r} + \mu_i - \mu_j\right) c_i u^{j-i} u_i \equiv 0.$$

Il en résulte que tous les coefficients c_i sont nuls, à l'exception de c_j qui reste arbitraire et que nous prenons égal à 1. Le seul terme du premier degré de f_j est bien y_j.

F_j vérifiant l'équation (52), on en déduit (¹), en se servant de l'identité (53) et en revenant aux variables $y_1, \ldots, y_n$, que f_j vérifie l'équation

$$(59) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i p_i + b_i p_{i-1} + [y_1, \ldots, y_n]_2)\frac{\partial f}{\partial y_i} - \lambda_j f_j = 0.$$

Si nous raisonnons alors comme aux nᵒˢ **3** et **5**, on voit que, si l'on fait le changement de variables,

$$(60) \quad z_j = f_j(y_1, \ldots, y_n) = y_j + [y_1, \ldots, y_n]_2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

les équations (46) seront remplacées par les équations

$$(61) \qquad \frac{dz_i}{dt} = \lambda_j z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

$$(62) \quad \frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k = g_k(z_1, \ldots, z_p, y_{p+1}, \ldots, y_n) \quad (k = p+1, \ldots, n),$$

où $g_{p+1}, g_{p+2}, \ldots, g_n$ sont des séries entières sans termes constants, dont les termes du premier degré se réduisent respectivement à $b_{p+1} z_p$, $b_{p+2} y_{p+1}, \ldots, b_n y_{n-1}$.

(¹) On peut remarquer que (52) exprime que $e^{-\mu_j t}F_j$ est une intégrale du système (50), (51); il en résulte que d'après (53) et (49) $e^{-\lambda_j t}f_j$ est une intégrale du système (46), d'où l'équation (59).

D'après ce que nous venons de voir, il existe pour $s = p$ un changement de variables

$$(63)\quad z_j = f_j(y_1, \ldots, y_n) \equiv y_j + [y_1, \ldots, y_n]_2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

qui ramène le système donné (46) au système des équations

$$(64)\quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_i z_j + \varphi_j(z_1, \ldots, z_{j-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

$$(65)\quad \frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k + g_k(z_1, \ldots, z_s, y_{s-1}, \ldots, y_n) \qquad (k = s+1, \ldots, n),$$

où les φ_j et les g_k sont respectivement des polynomes et des séries entières. De plus, les termes du premier degré de φ_j se réduisent à $b_j z_j$ et ceux de g_k se réduisent à $b_{s+1} z_s$ pour $k = s+1$ et à $b_k y_{k-1}$ pour $k = s+2, \ldots, n$. En effet, en prenant pour $s = p$ tous les polynomes φ_j identiquement nuls, nous avons bien établi la propriété énoncée pour $s = p$. Nous allons montrer que, si cette propriété est vraie pour une valeur de s, elle est vraie pour $s+1$.

Faisons le changement de variables

$$(66)\quad \begin{cases} z_j = u^{r_j} v_j & (j = 1, 2, \ldots, s), \\ y_k = u^{r_k} u_k & (k = s+1, \ldots, n); \end{cases}$$

les équations (64) et (65) prennent respectivement la forme

$$(67)\quad \frac{dv_j}{dt} = \mu_j v_j + \Phi_j(u, v_1, \ldots, v_{j-1}),$$

$$(68)\quad \frac{du_k}{dt} = \mu_k u_k + G_k(u, v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_n),$$

en posant

$$(69)\quad u^{r_j}\Phi_j(u, v_1, \ldots, v_{j-1}) = \varphi_j(z_1, \ldots, z_{j-1}),$$

$$(70)\quad u^{r_k} G_k(u, v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_n) = g_k(z_1, \ldots, z_s, y_{s+1}, \ldots, y_n).$$

Cherchons à déterminer une fonction

$$F_{s+1}(u, v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_n) = u_{s+1} + [u, v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_n]_2$$

et un polynome $\Phi_{s+1}(u, v_1, \ldots, v_s)$ de manière à vérifier l'équation

$$(71)\quad \frac{u}{r}\frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{s=1}^{s}(\mu_j v_j + \Phi_j)\frac{\partial F}{\partial v_j} + \sum_{k=s+1}^{n}(\mu_k u_k + G_k)\frac{\partial F}{\partial u_k} - \mu_{s+1} F = \Phi_{s+1}.$$

Nous écrirons cette équation

$$(72)\qquad \frac{u}{r}\frac{\partial F}{\partial u}+\sum \mu_j v_j \frac{\partial F}{\partial v_j}+\sum \mu_k v_k \frac{\partial F}{\partial u_k}-\mu_{s+1} F$$
$$= \Phi_{s+1}-\sum \Phi_j \frac{\partial F}{\partial v_j}-\sum G_k \frac{\partial F}{\partial u_k}.$$

Raisonnons comme nous l'avons fait au n° 5 sur l'équation (11). Si nous supposons que Φ_{s+1} soit identiquement nul, nous serons arrêtés, en général, par une impossibilité dans la détermination des termes de F_s. En effet, si nous avons

$$(73)\qquad \mu_{s+1}=\frac{q_0}{r}+q_1\mu_1+\ldots+q_s\mu_s$$

lorsque nous voudrons déterminer le coefficient du terme $u^{q_0} v_1^{q_1}, \ldots, v_s^{q_s}$ de F_{s+1} la somme des coefficients des termes semblables sera nulle dans le premier membre de (72), tandis que dans le second membre elle sera égale à un nombre $-a$. Si au contraire, nous introduisons dans Φ_{s+1} un terme $a u^{q_0} v_1^{q_1}, \ldots, v_s^{q_s}$, cette impossibilité ne se présentera pas et nous pourrons choisir arbitrairement le coefficient du terme considéré de F_{s+1}. *Pour simplifier, nous le prendrons nul.* En déterminant, comme nous l'avons fait dans les cas analogues, des termes de degré de plus en plus élevé de F_{s+1}, nous serons ainsi conduits à déterminer en même temps des termes de Φ_{s+1}. Nous conviendrons de n'introduire dans Φ_{s+1} que les termes qu'il est strictement nécessaire d'introduire pour vérifier l'équation (71).

Nous allons montrer que F_{s+1} et Φ_{s+1} possèdent les deux propriétés signalées pour F_j lorsqu'on a $j<p$. On a

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} & u^{r_{s+1}}\Phi_{s+1}(u, v_1, \ldots, v_1)=\Phi_{s+1}(1, z_1, \ldots, z_0)\equiv \varphi_{s+1}(z_1, \ldots, z_0), \\ & u^{r_{s+1}}F_{s+1}(u, v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_n) \\ & \quad = F_{s+1}(1, v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, u_n)\equiv f_{s+1}(z_1, \ldots, z_s, y_{s+1}, \ldots, y_n). \end{aligned}\right.$$

identités définissant φ_{s+1} et f_{s+1} et, de plus, les termes de degré minimum de φ_{s+1} et f_{s+1} sont respectivement $b_{s+1} z_s$ et y_{s+1}.

La première propriété s'exprime en disant que, si l'on multiplie par $u^{r_{s+1}}$ un terme de F_{s+1} ou de Φ_{s+1}, on obtient, en tenant compte des formules (66), un monome entier en $z_1, \ldots, z_s, y_{s+1}, \ldots, y_n$. Cette propriété est évidente pour le terme du premier degré de

F_{s+1} puisqu'on a $u'^{s+1} u_{s+1} = y_{s+1}$. Pour montrer qu'elle est vraie pour tous les termes de F_{s+1} et de Φ_{s+1}, nous n'avons qu'à raisonner pour l'équation (71) comme nous l'avons fait pour l'équation (52) et à nous servir des relations (69), (70) et (74). Nous montrerons ainsi que les termes successifs qui s'introduisent dans l'expression

$$\sum \Phi_j \frac{\partial F}{\partial v_j} + \sum G_k \frac{\partial F}{\partial u_k} \tag{75}$$

qui figure dans le second membre de (72) jouissent tous de la propriété indiquée. Il en est donc de même des termes de F_{s+1} puisqu'on les détermine par l'identification des deux membres de (72). Les termes de Φ_{s+1} qui, d'après ce que nous avons dit, sont égaux à certains des termes de (75) jouissent donc aussi de la propriété indiquée. La propriété exprimée par les égalités (74) est donc démontrée.

Pour démontrer que les termes du premier degré de φ_{s+1} et f_{s+1} se réduisent bien aux deux termes indiqués, utilisons les deux premières remarques employées dans la démonstration analogue relative à f_j pour $j \leqq p$. Désignons respectivement par

$$u_{s+1} + \sum_{i=1}^{s} c_i u^{s+1-i} v_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i u^{s+1-i} v_i$$

l'ensemble des termes du premier degré, en $v_1, \ldots, v_s, u_{s+1}, \ldots, u_n$ de F_{s+1} et Φ_{s+1}. L'équation nous fournit l'identité

$$b_{s+1} u v^s + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{s+1-i}{r} + \mu_i - \mu_{s+1} \right) c_i u^{s+1-i} v_i \\ + \sum_{i=1}^{s} c_i b_i u^{s+2-i} v_{i-1} = \sum_{i=1}^{s} a_i u^{s+1-i} v_i.$$

Les coefficients c_i et a_i ne sont assujettis qu'à vérifier cette identité. De plus, d'après les conventions faites dans la détermination de F_{s+1} et de Φ_{s+1}, nous devons prendre ces coefficients égaux à o toutes les fois qu'il sera possible de le faire. On voit ici qu'on doit prendre $a_s = b_{s+1}$ et qu'on peut prendre égaux à o tous les coefficients $c_1, \ldots, c_s, a_1, \ldots, a_{s-1}$. Nous avons bien

$$(76) \qquad \begin{cases} f_{s+1} = y_{s+1} + [z_1, \ldots, z_s, y_{s+1}, \ldots, y_n]_2, \\ \varphi_{s+1} = b_{s+1}, z_s + [z_1, \ldots, z_s]_2, \end{cases}$$

F_{s+1} vérifiant l'équation (71), on en déduit, en revenant aux variables $z_1, \ldots, z_s, y_{s+1}, \ldots, y_n$ et se servant de (74) et (49) que f_{s+1} vérifie l'équation

$$(77) \quad \sum_{j=1}^{s} (\lambda_j z_j + \varphi_j) \frac{\partial f}{\partial z_j} + \sum_{k=s+1}^{n} (\lambda_k y_k + y_k) \frac{\partial f}{\partial y_k} - \lambda_{s+1} f = \varphi_{s+1}.$$

Si nous raisonnons alors comme nous l'avons fait au n° 5, on voit que si l'on fait le changement de variable

$$(78) \quad z_{s+1} = f_{s+1}(z_1, \ldots, z_s, y_{s+1}, \ldots, y_n) \equiv y_{s+1} + [z_1, \ldots, y_s, y_{s+1}, \ldots, y_n]_2$$

la première des équations (65) est remplacée par l'équation

$$\frac{dz_{s+1}}{dt} = \lambda_{s+1}, z_{s+1} + \varphi_{s+1}(z_1, \ldots, z_s),$$

les équations suivantes ne changent pas de forme, z_{s+1} y figure au lieu de y_{s+1}, les termes du premier degré des g_k ne changent pas.

L'ensemble des deux changements (63) et (78) équivaut à un changement de variables de la forme (63), j prenant les valeurs $1, 2, \ldots, s+1$. Il donne un système d'équations (64) et (65) où s est remplacé par $s+1$, les polynomes φ_j et les séries g_k ayant les termes du premier degré que l'on a indiqués.

Le changement de variables (63), dont nous avons parlé, existant pour $s = p$, existera pour $s = p+1, p+2, \ldots, n$. Pour $s = n$ ce changement ramène les équations (46) à la forme

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i, z_i + \varphi_i(z_1, \ldots, z_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous pouvons donc énoncer dans le cas III, où la condition 2° n'est pas vérifiée, le même théorème que dans le cas II, n° 5. En complétant les démonstrations qui précèdent par les remarques qui vont suivre, nous arriverons à l'énoncé du théorème A (n° 2).

Toutes les conséquences que nous avons tirées de ce théorème dans le cas II : intégration des équations, développements de

M. Horn, intégrales de Poincaré et de M. Lindelöf, s'étendent sans modification au cas III où la condition 2° n'est pas vérifiée.

Remarque I. — D'après le théorème que nous avons invoqué à propos de la convergence de la série f_{p+1} vérifiant l'équation (15), il est évident que la série F_{s+1} est convergente si, η et η' étant des nombres assez petits, l'on a

$$(79)\qquad |u|\leqq\eta',\qquad |v_j|\leqq\eta,\qquad |u_k|\leqq\eta,$$

mais il peut ne pas paraître évident qu'il existe un nombre ε tel que la série f_{s+1} soit convergente si l'on a $|z_j|<\varepsilon$ et $|y_k|<\varepsilon$. L'objection peut être levée en montrant que l'on peut prendre $\eta'=1$ et que d'après (74) la série f_{s+1} sera convergente si l'on a $|z_j|\leqq\eta$, $|y_k|\leqq\eta$. Il est plus simple de raisonner de la façon suivante. On peut toujours, en prenant un nombre ε assez petit, choisir des nombres u, v_j, u_k vérifiant les conditions (79) et tels que les valeurs correspondantes de z_j et y_k, données par les formules (66), soient $z_1=z_2=\ldots=z_s=y_{s+1}=\ldots=y_n=\varepsilon$. La série $u^{r_{s+1}}F_{s+1}$ étant convergente pour ces valeurs de u, v_j, u_k, tous ses termes seront inférieurs en module à un nombre fixe M. Il en sera donc de même des termes de la série f_{s+1} et celle-ci, d'après une généralisation connue du théorème d'Abel, sera convergente pour $|z_j|<\varepsilon$, $|y_k|<\varepsilon$.

Remarque II. — Considérons un terme $au^{q_0}u_1^{q_1}\ldots u_s^{q_s}$ du polynome Φ_{s+1}.

Nous avons l'égalité (73)

$$(80)\qquad \mu_{s+1}=\frac{q_0}{r}+q_1\mu_1+\ldots+q_s\mu_s.$$

Ce terme multiplié par $u^{r_{s+1}}$ devant donner le terme $z_1^{q_1}z_2^{q_2}\ldots z_s^{q_s}$ du polynome φ_{s+1}, nous aurons, d'après (56),

$$(81)\qquad q_0=q_1r_1+\ldots+q_sr_s-r_{s+1}.$$

Si dans (80) nous remplaçons les μ par leurs expressions (49) et si nous nous servons de (81), nous obtenons

$$(82)\qquad \lambda_{s+1}=q_1\lambda_1+\ldots+q_s\lambda_s.$$

Les seuls termes qui figurent dans le polynome φ_{s+1} sont les termes $a z_1^{q_1} z_2^{q_2} \ldots z_s^{q_s}$ pour lesquels l'égalité (82) est vérifiée. Lorsque nous aurons déterminé toutes les égalités possibles de la forme (82), nous connaîtrons la forme du polynome φ_{s+1}, il ne restera plus qu'à déterminer ses coefficients. *Nous avons donc bien la loi de formation des polynomes* φ_1 *indiquée dans l'énoncé du théorème* A.

Remarque III. — Dans le cas II, la somme $q_1 + q_2 + \ldots + q_s$ des entiers figurant dans l'égalité (82), doit être au moins égale à 2; les polynomes φ_i ne contiennent *jamais* de termes du premier degré. Dans le cas III, c'est la somme $q_0 + q_1 + \ldots + q_s$ qui doit être supérieure à 1 et $q_1 + \ldots + q_s$ peut être égal à 1. Si la condition 2° n'est pas vérifiée, certains des polynomes φ_1 contiennent toujours des termes du premier degré. Nous avons vu que, *si* b_i *n'est pas nul dans* (46), φ_i *contient le terme* $b_i z_{i-1}$. On voit encore, d'après ce que nous avons dit, que *chacun des polynomes* φ_i *contient, au plus, un terme du premier degré : le terme* $b_i z_{i-1}$.

Remarque IV — Si la condition 3° est vérifiée, les polynomes φ_i ne contiennent que des termes du premier degré, et l'on obtient la forme réduite

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i + b_i z_{i-1}, \qquad i = 2, \ldots, n).$$

Remarque V. — A peu près tous les raisonnements de ce n° 9 ont eu pour objet la démonstration de l'existence d'une solution f_j de l'équation (71) lorsqu'on choisit convenablement φ_j. L'existence de cette solution avait été démontrée au n° 5, dans le cas où tous les b_i sont nuls. La méthode que nous avons suivie nous a démontré, par une voie détournée, qu'une pareille solution existe dans tous les cas.

IV.

10. Dans le cas où la condition 1° est vérifiée, les formules (18) qui expriment les z_i, en fonction des y_i, mettent en évidence que, pour étudier toutes les solution du système (1) ou du système (46), telles que les valeurs absolues des x_i ou des y_i soient suffisamment

petites, il suffit d'étudier toutes les solutions du système réduit (19), (20), telles que les z_i prennent des valeurs assez petites. Les développements de M. Horn ou les intégrales de MM. Poincaré et Lindelöf, qui donnent la solution générale du système (19), (20) pour $|z_i|$ assez petit, donneront donc la solution générale du système (1) ou du système (46) pour $|x_i|$ ou $|y_i|$ assez petits.

Nous n'aurons pas un résultat aussi complet lorsque la condition 1° n'est pas vérifiée. Nous pourrons seulement trouver un certain nombre de catégories de solutions, dépendant chacune d'un certain nombre de constantes. Ce résultat a déjà été établi par MM. Picard, Poincaré, Horn, Liapounoff, sous diverses formes et dans des cas plus ou moins étendus. On pourra comparer la méthode que je suis avec la méthode employée par Poincaré dans le Mémoire cité du Tome XIII des *Acta*.

Considérons une droite D passant par l'origine et ne rencontrant aucun des points λ_i. Cette droite, puisque la condition 1° n'est pas vérifiée, laissera p points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ d'un côté et $n-p$ points $\lambda_{p-1}, \ldots, \lambda_n$ de l'autre côté. Nous pouvons toujours supposer, comme au n° 4, que les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ont leurs parties réelles positives, tandis que les nombres $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ ont leurs parties réelles négatives. Nous pouvons également toujours mettre, par un changement linéaire de variables, les équations (1) sous la forme

$$(83) \qquad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + A_i(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$A_i \equiv b_i y_{i-1} + [y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n]_2.$$

Nous considérerons successivement les trois cas suivants :

A. Cas particulier où la condition suivante est remplie :

Condition (a). Toutes les séries $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_n$ sont identiquement nulles, lorsqu'on y fait $y_{p+1} = y_{p+2} = \ldots = y_n = 0$.

B. Cas où la condition (a) n'est pas vérifiée, mais où la condition suivante est vérifiée :

Condition (b). Tous les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont nuls.

C. Cas où ni la condition (a), ni la condition (b) ne sont vérifiées.

11. Cas A. — Les équations (83) seront vérifiées, si l'on prend

$$y_{p+1} = y_{p-2} = \ldots = y_n = 0,$$

tandis que $y_1, y_2, \ldots, y_p$ vérifient les équations

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j p_j + A_j(y_1, \ldots, y_p, 0, 0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

La condition 1° du n° 2 étant vérifiée pour ce système, sa solution générale a été obtenue; $y_1, \ldots, y_p$ seront donnés par exemple par des développements procédant suivant les puissances des quantités $C_1 e^{\lambda_1 t}$, $C_2 e^{\lambda_2 t}$, ..., $C_p e^{\lambda_p t}$, les C étant des constantes arbitraires. Les coefficients de ces développements peuvent être des polynomes en t, si certains des λ_j sont égaux à des combinaisons d'autres λ_j.

Cas B. — Nous allons, par un changement de variables, ramener ce cas au précédent. Faisons le changement

$$(84) \qquad y'_k = y_k - f_k(y_1, \ldots, y_p) \qquad (k = p+1, p+2, \ldots, n).$$

Nous avons

$$(85) \qquad \frac{dy'_k}{dt} = \lambda_k y_k + A_k(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n) - \sum_{j=1}^{p} (\lambda_j y_j + A_j) \frac{\partial f_k}{\partial y_k}.$$

Remplaçons, dans le second membre de ces relations, y_k par $y_k + f_k$ et exprimons que chacun de ces seconds membres est identiquement nul pour $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \ldots = y'_n = 0$. Cela revient à exprimer que le second membre de (85) est nul lorsqu'on remplace y_k par f_k. On a donc

$$(86) \qquad \sum_{j=1}^{p} [\lambda_1 y_j + A_j(y_1, \ldots, y_p, f_{p+1}, \ldots, f_n)] \frac{\partial f_k}{\partial y_j} - \lambda_k f_k$$
$$= A_k(y_1, \ldots, y_p, f_{p+1}, \ldots, f_n) \qquad (k = p+1, \ldots, n)$$

avec

$$A_i = [y_1, \ldots, y_p, f_{p+1}, \ldots, f_n]_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons ainsi $n - p$ équations aux dérivées partielles pour déterminer les $n - p$ fonctions $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n$.

On pourra toujours vérifier ces équations au moyen de séries entières en $y_1, \ldots, y_p$ convergentes lorsque les variables sont assez petites. En effet, si l'on suppose déterminés les termes de degré inférieur à q des séries $f_{p+1}, \ldots, f_n$ et si l'on veut déterminer un terme

$$C^k_{m_1, m_2, \ldots, m_p} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_p^{m_p}$$

de f_k, on obtiendra, en identifiant dans les deux membres de (86), les termes semblales au terme considéré,

$$(87) \qquad (m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_p\lambda_p - \lambda_k) C^k_{m_1, m_2, \ldots, m_p} = P^k_{m_1, m_2, \ldots, m_p},$$

$P^k_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$ étant une fonction connue des coefficients des A_k et des coefficients déjà déterminés des f_k. Les termes de moindre degré de la série f_k seront semblables aux termes de moindre degré de la série $A_k(y_1, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0)$. Le coefficient de chacun de ces termes s'obtient par une égalité de la forme (87), dont le second membre est le coefficient du terme de $A_k(y_1, \ldots, y_p, \ldots, 0, \ldots, 0)$ semblable au terme considéré. Dans l'égalité (87), le coefficient $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_p\lambda_p - \lambda_k$ n'est jamais nul, car les parties réelles des différents termes $m_1\lambda_1, m_2\lambda_2, \ldots, m_p\lambda_p$ et $-\lambda_k$ sont, par hypothèse, toutes positives.

Les séries f_k ainsi obtenues sont convergentes. Soit ε la plus petite des parties réelles des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, -\lambda_{p+1}, -\lambda_{p+2}, \ldots, -\lambda_n$. Nous avons

$$(88) \qquad |m_1\lambda_1 + \ldots + m_p\lambda_n - \lambda_k| > \varepsilon(m_1 + m_2 + \ldots + m_p),$$

car le module d'une quantité est supérieur à sa partie réelle et de plus nous diminuons certains des termes réels en remplaçant ces termes par les termes correspondants du second membre. Désignons ensuite par

$$\frac{M(y_1 + \ldots + y_p + f_{p+1} + \ldots + f_n)^2}{1 - \dfrac{y_1 + \ldots + y_p + f_{p+1} + \ldots + f_n}{r}}$$

une fonction majorante commune aux diverses séries $A_k(y_1, \ldots, y_p, f_{p+1}, \ldots, f_n)$. Les termes des séries f_k seront inférieurs en module aux termes correspondants des fonctions F_k qui vérifient les équations

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{p} y_j \frac{\partial F_k}{\partial y_j} = \frac{M(y_1 + \ldots + y_p + F_{p+1} + \ldots + F_n)^2}{1 - \dfrac{y_1 + \ldots + y_p + F_{p+1} + \ldots + F_n}{r}} \left(1 + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\right).$$

Il est évident que ces diverses fonctions F seront identiques et seront égales à une fonction $F(u)$ dépendant seulement de la somme

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_p = u.$$

Cette fonction $F(u)$ vérifie l'équation différentielle

$$\varepsilon u \frac{dF}{du} = \frac{M(u+qF)^2}{1 - \dfrac{u+qF}{r}}\left(1 + q\frac{dF}{du}\right),$$

où nous posons $q = n - p$. Cette équation s'écrit

$$\left[\varepsilon u - \varepsilon\frac{(u+qF)}{r} - Mq(u+qF)^2\right]\frac{dF}{du} = M(u+qF)^2$$

et admet, d'après un théorème connu de Briot et Bouquet, une solution $F(u)$ holomorphe et nulle pour $u = 0$. Cette série F étant convergente pour u suffisamment petit, les séries f_k seront aussi convergentes, lorsque le module des quantités $y_1, y_2, \ldots, y_p$ seront suffisamment petits.

Si nous faisons le changement de variables (84), les équations (83) deviendront

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_i y_j + [y_1, \ldots, y_p, y'_{p+1}, \ldots, y'_n]_2,$$

$$(89) \qquad \frac{dy'_k}{dt} = \lambda_k y'_k + [y_1, \ldots, y_p, y'_{p+1}, \ldots, y'_n]_2.$$

Les équations (89) sont identiquement vérifiées en prenant $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \ldots = y'_n = 0$; nous sommes donc ramenés au cas où l'hypothèse (a) est vérifiée. Nous chercherons les solutions pour lesquelles on a $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \ldots = y'_n = 0$ et par suite

$$y'_{pn} = y'_{pn} = \ldots = y'_n,$$

$$(90) \qquad \frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + [y_1, \ldots, y_n, 0 \ldots 0]_2 \qquad (j + 1, 2, \ldots, p),$$

$y_1, y_2, \ldots, y_p$ s'exprimeront au moyen de développements procédant suivant les puissances des p quantités $C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, C_p e^{\lambda_p t}$. Nous avons, d'autre part, pour les solutions que nous considérons, $y'_k = 0$ ($k = p + 1, \ldots, n$); nous aurons donc, d'après (84),

$$(91) \qquad y_k = f_k(y_1, \ldots, y_p) \qquad (k = p + 1, \ldots, n),$$

et, par suite, les n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront exprimées au moyen de développements contenant p arbitraires.

Si nous considérons l'espace à n dimensions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les courbes intégrales que nous obtenons ainsi forment une famille dépendant de $p-1$ paramètres, car on peut, comme nous l'avons remarqué ailleurs, faire $C_1 = 1$ sans modifier ces courbes. Toutes les courbes ainsi obtenues sont situées sur les multiplicités à p dimensions représentées par les équations (91).

Cas C. — Supposons enfin que l'hypothèse (b) ne soit plus vérifiée. Nous ferons, comme au n° 9, le changement de variables

$$(92) \qquad t = \log u^r, \qquad y_i = u^{r_i} u_i \qquad (r_i = 2n - i).$$

Les équations (83) deviennent

$$(93) \quad \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i + B_i(u, u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les B_i sont des séries ne contenant ni termes constants, ni termes du premier degré, et l'on a

$$u^{r_i} B_i(u, u_1, \ldots, u_n) = A_i(y_1, \ldots, y_n),$$
$$\mu_i = \lambda_i - \frac{r_i}{r}.$$

On peut donc supposer r assez grand pour que les nombres $\mu_1, \ldots, \mu_p$ aient leurs parties réelles positives. Les parties réelles des nombres $\mu_{p+1}, \ldots, \mu_n$ sont évidemment négatives. La condition (b) étant vérifiée pour les équations (93) auxquelles nous adjoignons l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{r},$$

les résultats obtenus dans le cas B nous montrent que nous avons des solutions de ce système, pour lesquelles $u_1, u_2, \ldots, u_n$ seront développables en séries procédant suivant les puissances de $e^{\frac{t}{r}}$, $C_1 e^{\mu_1 t}, \ldots, C_p e^{\mu_p t}$; les coefficients de ces développements peuvent être des polynomes en t. Il résulte alors immédiatement des formules (92) que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront exprimés par des développements de même forme dépendant des p constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_p$.

Montrons que, pour les solutions ainsi obtenues, nous avons entre les y des relations analogues aux relations (91).

Pour démontrer l'existence, pour les équations (93), des solutions considérées nous introduisons, conformément à ce que nous avons fait dans le cas B, de nouvelles variables $u'_{p+1}, \ldots, u'_n$ définies par

$$(94) \qquad u'_k = u_k - F_k(u, u_1, \ldots, u_p),$$

et nous considérons toutes les solutions pour lesquelles on a

$$u'_{p+1} = u'_{p+2} = \ldots = u'_n = 0.$$

Les fonctions F_k sont des séries entières vérifiant les $n-p$ équations

$$(95) \qquad \frac{u}{r}\frac{\partial F_k}{\partial u} + \sum_{j=1}^{p} [\lambda_j u_j + B_j(u, u_1, \ldots, u_p, F_{p+1}, \ldots, F_n)] \frac{\partial F_k}{\partial u_j} - \lambda_k F_k$$
$$= B_k(u, u_1, \ldots, u_p, F_{p+1}, \ldots, F_n).$$

Les raisonnements que nous avons faits pour l'équation (54) s'appliquent sans modifications aux équations (95) et nous montrent qu'on a

$$u^{r_k} F_k(u, u_1, \ldots, u_p) = F_k(1, y_1, \ldots, y_p) \equiv f_k(y_1, \ldots, y_p),$$

identité définissant la série entière f_k. On a donc, d'après (94),

$$(94') \qquad u^{r_k} u'_k = y_k - f_k(y_1, \ldots, y_p) \qquad (k = p+1, \ldots, n);$$

$u'_{p+1}, u'_{p+2}, \ldots, u'_n$ étant nuls pour toutes les solutions considérées, nous aurons, pour toutes ces solutions, les relations (91)

$$(96) \qquad y_k = f_k(y_1, \ldots, y_p) \qquad (k = p+1, \ldots, n).$$

Remarque I. — Le coefficient b_{p+1} du terme $b_{p+1} y_p$ de A_{p+1} est nul, car on a toujours $\lambda_{p+1} \neq \lambda_p$. Il en résulte que $f_k(y_1, \ldots, y_p)$ ne contient pas de termes du premier degré. Dans le cas B, nous voyons en effet que les expressions $A_k(y_1, y_2, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0)$ ne contiennent pas de termes du premier degré. Il en sera de même pour f_k, puisque les termes de moindre degré de f_k sont semblables aux termes de moindre degré de $A_k(y_1, \ldots, y_p, 0, \ldots, 0)$. Dans le cas C, les expressions $B_k(u, u_1, \ldots, u_p, 0_{p+1}, \ldots, 0_n)$, où $k = p + 1, p + 2, \ldots, n$, ne contiennent que des termes du second degré au moins par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Il en résulte, en raisonnant comme nous l'avons fait au n° 9, pour la fonction F_j vérifiant l'équation (57), que $F_{p+1}, \ldots, F_n$ ne contiennent pas de termes du premier degré en $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Donc $f_{p+1}, \ldots, f_n$ ne contiendront pas de termes du premier degré en $y_1, y_2, \ldots, y_p$. On a

$$f_k(y_1, y_2, \ldots, y_p) = [y_1, y_2, \ldots, y_p]_2.$$

La convergence des séries f_k se déduit de la convergence des séries F_k en raisonnant comme dans la remarque I du n° 9.

Remarque II. — Pour compléter les résultats obtenus, faisons les remarques suivantes :

Le système (83) jouit dans le cas A où la condition (a) est remplie de la propriété suivante : Il existe une solution de ce système pour laquelle on a $y_{p+1} = y_{p+2} = \ldots = y_n = 0$, tandis que y_1, $y_2, \ldots, y_p$ prennent des valeurs initiales que l'on peut choisir arbitrairement. Réciproquement, si cette propriété est vérifiée, la condition (a) est remplie. En effet, si nous considérons les solutions pour lesquelles on a $y_{p+1} = y_{p+2} = \ldots = y_n = 0$, le système (83) devient

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + A_i(y_1, \ldots, y_p, 0, 0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, y),$$

$$(\alpha) \qquad 0 = A_k(y_1, \ldots, y_p, 0, 0) \qquad (k = p + 1, \ldots, n).$$

Si ces dernières égalités (α) ne sont pas identiquement vérifiées, elles établissent des relations entre les valeurs initiales de y_1, y_2, $y_3, \ldots, y_p$. Ces égalités (α) doivent donc se réduire à des identités : la condition (a) est remplie.

2° Si nous posons

$$y'_k = u^{r_k} u'_k \qquad (k = p + 1, \ldots, n),$$

nous avons, d'après (94'),

$$(96') \qquad y'_k = y_k - f_k(y_1, \ldots, y_p) \qquad (k = p + 1, \ldots, n).$$

Faisons le changement de variables défini par ces formules (96'), les équations (83) deviennent

$$(97)\quad \frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + C_j(y_1, \ldots, y_p, y'_{p+1}, \ldots, y'_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$(97')\quad \frac{dy'_k}{dt} = \lambda_k y'_k + C_k(y_1 \ldots, y_p, y'_{p+1}, \ldots, y'_n) \qquad (k = p+1, \ldots, n),$$

les expressions C_i ont la même forme que les expressions A_i correspondantes, les y'_k jouent le rôle des y_k.

D'après ce que nous avons dit, le système des équations (93) admet une solution pour laquelle les quantités $u'_{p+1}, \ldots, u'_n$ définies par (94) sont identiquement nulles, tandis que u_1, u_2, $u_3, \ldots, u_p$ prennent des valeurs initiales arbitraires. Puisqu'on a $y'_k = u^{r_k} u'_k$ et que $u = e^{\frac{t}{r}}$ ne peut jamais être nul, on voit que, pour que les u'_k soient nuls $(k = p+1, \ldots, n)$, il faut et il suffit que les y'_k le soient. De plus, d'après les formules $y_j = u^{r}_j u_j$, on voit qu'en choisissant convenablement les valeurs initiales de u_1, $u_2, \ldots, u_p$, on peut donner à $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des valeurs initiales arbitraires. Le système d'équation (97), (97') admettant une solution pour laquelle on a $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \ldots = y'_n$, tandis que y_1, $y_2, \ldots, y_n$ prennent des valeurs initiales arbitraires, la condition (a) est vérifiée. Nous aurons

$$C_k(y_1, y_2, \ldots, y_p, 0, 0) \equiv 0 \qquad (k = p+1, \ldots, n).$$

3° Nous voyons que, comme dans le cas B, notre méthode revient à faire un changement de variables (96') de manière à être ramené au cas A. Nous en concluons, comme dans B, que les fonctions $f_{p+1}, \ldots, f_n$ vérifient les $n-p$ équations (86), mais ici on a

$$A_i(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n) = b_i y_{i-1} + [y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n]_2$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

et les constantes $b_1, b_2, \ldots, b_p$ ne sont pas supposées nulles. Nous avons donc démontré que ce système d'équations admet pour solutions des séries entières $f_k(y_1, \ldots, y_p)$ ne contenant pas de termes de degré inférieur au second. La démonstration de ce théorème s'étend, au moyen d'un changement linéaire de variables, au cas où les termes du premier degré des expressions A_j sont des fonctions linéaires quelconques des seules variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

La convergence des séries f_k qui résulte de la démonstration donnée entraîne, comme cas particuliers, la convergence de toutes les séries employées dans ce travail.

Le théorème que nous avons démontré sur l'existence des solutions de (86) a été établi par Poincaré (*Acta*, t. XIII), dans le cas où tous les b_j sont nuls. Il a été démontré par M. Liapounoff (Mémoire cité, p. 310) dans un cas qui se ramène par un changement linéaire de fonctions au cas que nous avons considéré.

Remarque III. — Nous avons obtenu, dans la remarque II, le résultat suivant : il existe un changement de variables (96′) ramenant le système (83) au système (97), (97′) pour lequel la condition (a) est vérifiée. Si nous cherchons toutes les solutions du système (97), (97′) pour lesquelles on a $y'_{p+1} = \ldots = y'_n = 0$. Ce système se réduit à

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + b_j y_{j-1} + [y_1, \ldots, y_p]_2.$$

La condition 1° étant vérifiée pour ce système, on peut, au moyen d'un changement de variables

$$y_j = z_j + [z_1, \ldots, z_p]_2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{98}$$

le ramener à la forme réduite

$$\frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j + \varphi_j(z_1, \ldots, z_{j-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{99}$$

et les formules (96) nous donneront

$$y_k = f_k(y_1, \ldots, y_p) = [z_1, \ldots, z_p]_2 \qquad (k = p+1, \ldots, n). \tag{100}$$

Toute solution du système (99) donnera, par l'intermédiaire des formules (98) et (100), une solution du système (83). La solution générale du système (99) nous donnera une famille de solutions (83) s'exprimant au moyen de développements suivant les puissances de $C_1 e^{\lambda_1 t}$, $C_2 e^{\lambda_2 t}$, ..., $C_p e^{\lambda_p t}$. Les coefficients de ces développements peuvent être des polynomes en t. Nous arrivons donc au théorème suivant d'où l'on déduit immédiatement le théorème B (n° 2).

Étant donné le système

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_i y_i + \mathrm{B}_i y_{i-1} + [y_1, \ldots, y_n]_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *les divers points* λ_i *situés d'un même côté d'une droite* D *passant par l'origine, tandis que tous les autres points* λ_i *sont situés de l'autre côté de* D. *On peut toujours exprimer* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *en fonction de p variables* $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *par des formules*

$$\begin{aligned} y_j &= z_j + [z_1, \ldots, z_p]_2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \\ y_k &= [z_1, \ldots, z_p]_2 \qquad (k = p+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

de telle façon que si $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *vérifient un certain système d'équations différentielles*

$$\frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j + \varphi_j(z_1, \ldots, z_{j-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

toute solution de ce système fournisse une solution du système donné.

Remarque IV. — Tous les résultats que nous avons obtenus subsisteraient si certains des nombres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ étaient nuls. Il n'y aurait qu'à modifier la démonstration de l'inégalité (88) en désignant par ε la plus petite des parties réelles des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $-\lambda_{p+1}, -\lambda_{p+2}, \ldots, -\lambda_n$, en ne considérant parmi ces derniers que ceux qui ne sont pas nuls.

Remarque V. — Si aucun des nombres $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ n'est nul, nous pouvons faire jouer à ces nombres le rôle joué par les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Nous aurons donc une nouvelle famille de solutions dépendant de $n-p$ arbitraires. Si certains des nombres $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$, par exemple $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_{p+s}$, étaient nuls, nous ferions jouer aux nombres $\lambda_{p+s+1}, \ldots, \lambda_n$ le rôle joué par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

En faisant varier la position de la droite D, sans jamais la faire passer par ceux des points λ_i qui ne sont pas confondus avec l'origine, nous aurons, pour chaque manière de séparer, au moyen de cette droite, les points λ_i en deux groupes, deux familles de solutions dépendant, l'une de p' constantes arbitraires, l'autre de q' et si l'on désigne par s le nombre des λ_i qui sont nuls, on a $p' + q' = n - s$.

V.

13. Cas d'une seule équation différentielle. — Considérons le cas où l'on a $n = 2$, c'est-à-dire l'équation

$$\text{(101)} \qquad \frac{dx}{\alpha x + \beta y + [x, y]_2} = \frac{dy}{\alpha' x + \beta' p + [x, y]_2}.$$

Nous allons facilement retrouver les résultats connus relatifs à cette équation.

Si les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique

$$(\alpha - \lambda)(\beta' - \lambda) - \beta\alpha' = 0$$

ne sont pas nulles toutes les deux, les résultats précédents s'appliquent.

Pour que la condition 1° soit vérifiée, il faut et il suffit que le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ ne soit ni négatif, ni nul, ni infini. Si cette condition 1° n'est pas vérifiée, les résultats du n° **11** mettent seulement en évidence l'existence bien connue de deux solutions holomorphes, si λ_1, λ_2 est négatif, et d'une seule solution, si λ_1 ou λ_2 sont nuls.

Supposons que la condition 1° soit vérifiée. La condition 2° est sûrement vérifiée si l'on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Il existe un changement de variable, tel que, si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ étant les nouvelles variables, l'équation (101) se mette, si la condition 2° est vérifiée, sous la forme

$$\text{(102)} \qquad \frac{d\bar{x}}{\bar{x} + [\bar{x}, \bar{y}]_2} = \frac{d\bar{y}}{\lambda\bar{y} + [\bar{x}, \bar{y}]_2},$$

et, si la condition 2° n'est pas vérifiée, sous la forme

$$\text{(103)} \qquad \frac{d\bar{x}}{\bar{x} + [\bar{x}, \bar{y}]_2} = \frac{d\bar{y}}{\bar{y} + a\bar{x} + [\bar{x}, \bar{y}]_2}.$$

Pour que la condition 3° ne soit pas vérifiée, il faut qu'on ait, soit $\lambda = m$, soit $1 = m\lambda$, le nombre m étant un entier. Le premier cas seul peut se présenter si l'on suppose, comme on peut toujours le faire, qu'on a $\lambda_1 : \lambda_2 > 1$, lorsque ce rapport est réel.

Il résulte alors de ce que nous avons vu que si λ n'est pas un entier, les équations (102) se ramènent, par un changement de variables

$$\bar{x} = x_1 + [x_1, y_1]_2, \qquad \bar{y} = y_1 + [x_1, y_1]_2, \tag{104}$$

à la forme

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{\lambda y_1}. \tag{105}$$

Si λ est un entier ($\lambda = m$), un changement (104) donne les équations

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{m y_1 + a x_1^m}, \tag{106}$$

a étant une constante. C'est encore cette même forme (106) avec $m = 1$ qu'on obtient si la condition 2° n'est pas vérifiée. Nous supposons que dans (106) a n'est pas nul ; en effet, si a est nul, on est dans le cas de l'équation (105).

Les solutions générales (105 et (106) sont données respectivement par

$$y_1 = C x_1^{\lambda}, \qquad y_1 = C x_1^m + a x_1^m \log x. \tag{107}$$

On voit que l'équation (106) n'admet pas de solution $y = [x_1]_1$, en désignant par cette notation une solution holomorphe et nulle pour $x_1 = 0$. Il en résulte que l'équation correspondante (102) ou (103) n'admet pas non plus de solution $\bar{y} = [\bar{x}]_1$, car une pareille solution entraînerait, d'après les formules (104), l'existence d'une solution $y_1 = [x_1]_1$. Au contraire, l'équation (105) admet toujours la solution holomorphe $y_1 = 0$ et en admet une infinité d'autres si λ est un entier. Donc, lorsqu'on pourra ramener à la forme réduite (105) l'équation (102) ou (103), cette équation admettra au moins une solution $\bar{y} = [\bar{x}]_1$.

Si λ n'est pas un entier, on obtient toujours la forme réduite (105).

Si λ est un entier, on peut obtenir, soit la forme réduite (105), soit la forme réduite (106). Il résulte de ce qui précède que, pour savoir dans lequel de ces deux cas on se trouve, il n'est pas nécessaire d'effectuer le changement de variable (104). On met, suivant qu'on a $\lambda > 1$ ou $\lambda = 1$, l'équation (101) sous la forme (102) ou (103). Il suffit alors de chercher si cette dernière équation admet une solution $\overline{y} = [\overline{x}]_1$. Si l'on a $\lambda > 1$, il ne peut se présenter d'impossibilité dans la recherche des coefficients du développement $[\overline{x}]_1$ que dans la détermination du terme en $\overline{x}^m$. Si l'on a $\lambda = 1$ et par suite l'équation (103), il ne peut se présenter d'impossibilité que si l'on a dans cette équation $a \neq 0$. Dans les deux cas, on sait que les séries obtenus sont convergentes.

Si nous remarquons que, d'après les formules (104), on a, en désignant par P et Q des fonctions de la forme $[x, y]_1$

$$x_1 = \mathrm{P}(x, y), \qquad y_1 = \mathrm{Q}(x, y),$$

on voit, d'après (107), que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

L'intégrale générale de l'équation (101) *se met, ou bien sous la forme*

$$\mathrm{QP}^{-\lambda} = \text{const.},$$

puisque dans (106) *on peut supposer* $a = 1$, *ou bien sous la forme*

$$\mathrm{QP}^{-m} - \log \mathrm{P} = \text{const.}$$

Elle ne se met sous cette seconde forme que dans les deux cas suivants :

1° *Le rapport des racines* λ_1 *et* λ_2 *de l'équation caractéristique étant égal à* 1, *l'équation* (101) *se ramène par un changement linéaire de variable à la forme* (103) *avec* $a \neq 0$.

2° *Le rapport des racines* λ_1 *et* λ_2 *étant un entier m et l'équation étant ramenée à la forme* (102) *avec* $\lambda = m$, *il est impossible de déterminer le terme de degré m d'un développement* $\overline{y} = [\overline{x}]_1$ *vérifiant l'équation* (102).

14. Cas de deux équations. — I. Considérons le cas de deux équations à trois variables

$$\frac{dx}{\mathrm{X}(x, y, z)} = \frac{dy}{\mathrm{Y}(x, y, z)} = \frac{dz}{\mathrm{Z}(x, y, z)}, \tag{108}$$

où X, Y, Z contiennent des termes du premier degré. Nous n'examinerons que le cas où la condition 1° est vérifiée, ce qui revient à dire que les affixes des trois racines λ_1, λ_2, λ_3 de l'équation caractéristique sont les sommets d'un triangle à l'intérieur duquel ne se trouve pas l'origine. Nous allons rechercher quelles sont les formes réduites les plus simples possibles auxquelles on peut ramener le système (108), lorsque les conditions 2° ou 3° ne sont pas vérifiées.

Si nous supposons tout d'abord la condition 2° vérifiée, un changement linéaire de variables permet de supposer que les termes du premier degré de X, Y, Z se réduisent respectivement à $\lambda_1 x$, $\lambda_2 y$, $\lambda_3 z$. Pour trouver les polynomes φ qui figurent dans les formes réduites, nous avons à chercher toutes les façons possibles dont une quelconque des quantités λ_1, λ_2, λ_3 peut s'exprimer au moyen d'une combinaison linéaire des deux autres.

Considérons tout d'abord le cas où une seule des racines λ_1, λ_2, λ_3 figure dans une de ces combinaisons. Nous pouvons supposer qu'on a $\lambda_2 = m\lambda_1$. Deux cas se présentent alors : 1° λ_3 n'est pas égal à une combinaison de λ_1 et λ_2; 2° λ_3 est égal à une combinaison de λ_1 et λ_2 : on a $\lambda_3 = p\lambda_1 + q\lambda_2$. Dans les deux cas nous pourrons, en remplaçant t par $t : \lambda_1$, prendre $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = m$.

Dans le cas 1°, un changement de variable du genre de ceux employés ramène, en supprimant l'indice de λ_3, le système à la forme réduite

$$(109) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{\lambda z} = dt,$$

dont l'intégrale générale est donnée par

$$z = \mathrm{C}x^\lambda, \qquad y = \mathrm{B}x^m + ax^m \log x.$$

Dans le cas 2°, nous avons une combinaison telle qu'on ait $\lambda_3 = p + qm$ et il peut y avoir d'autres combinaisons telles qu'on ait $\lambda_3 = p' + q'm$. Il suffit pour cela qu'on ait

$$p' + q'm = p + qm, \qquad p' - p = m(q - q'),$$
$$q' = q - r, \qquad p' = p + rm.$$

Nous pouvons supposer qu'on a $q' \leqq q$, puisque rien ne distingue les uns des autres les couples de nombres p, q ; p', q'. Le nombre r sera donc un entier positif, au plus égal à q. Il faut de plus qu'on ait

$$p \leqq m.$$

S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions, en faisant $r = -1$, prendre $q' = q + 1$ et $p' = p - m$, ces valeurs de q' et p' étant positives seraient acceptables et l'on n'aurait pas $q' \leqq q$. Nous avons donc, par un changement de variables, la forme réduite

$$(110) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{(p+qm)z + \sum_{r=0}^{q} b_r x^{p+rm} y^{q-r}} = dt.$$

Pour obtenir l'intégrale générale, conformément à ce que nous avons fait au n° **6**, nous prenons

$$(111) \qquad x = e^t, \qquad y = \mathrm{B}\, e^{mt} + a t\, e^{mt}.$$

En remplaçant dans la troisième équation x, y par ces expressions, nous aurions z. Si nous voulons obtenir les intégrales de M. Lindelöf, nous avons d'abord, d'après (111),

$$(112) \qquad \frac{y}{x^m} - a \log x = \mathrm{B}.$$

Nous devons ensuite, d'après la remarque II, n° **8**, supposer $\mathrm{B} = 0$ dans les relations (111), qui donnent

$$(113) \qquad x = e^t, \qquad y = a t\, e^{mt},$$

intégrer dans cette hypothèse l'équation en $\frac{dz}{dt}$ et enfin porter dans l'intégrale générale ainsi obtenue les valeurs de e^t et de t tirées des relations (111). Nous avons ainsi

$$\frac{dz}{dt} = (p+qm)z - e^{(p+qm)t} \sum_{r=0}^{q} b_r (at)^{q-r},$$

$$z = \mathrm{C}\, e^{(p+qm)t} + \frac{t}{a} e^{(p+qm)t} \sum_{r=0}^{q} \frac{b_r}{q-r+1} (at)^{q-r},$$

$$z = \mathrm{C} x^{p+qm} + \frac{y x^{p+qm}}{a^2 x^m} \sum_{r=0}^{q} \frac{b_r}{q-r+1} \left(\frac{y}{x^m}\right)^{q-r},$$

$$(114) \qquad z - \frac{1}{a^2} \sum_{r=1}^{q} \frac{b_r}{q-r+1} x^{p+m(r-1)} y^{q-r+1} = \mathrm{C} x^{p+qm} + \frac{b_0 y}{(q+1) a^2 x^{m-p}}.$$

Si nous prenons le premier membre de (114) pour nouvelle variable z, la première intégrale (112) ne sera pas changée et l'intégrale (114) nous donne

$$\frac{z}{x^{p+qm}} - \frac{b_0 y}{(q+1)a^2 x^{(q+1)m}} = \mathrm{C},$$

qui est l'intégrale de M. Lindelöf relative à un système (110) où $b_1, b_2, \ldots, b_q$ seraient nuls. En supprimant l'indice de b_0, on voit donc que le système (108) est ramené à la forme réduite simple

$$(115) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{(p+qm)z + bx^p y^q} = dt \qquad p \leqq m.$$

Si a et b ne sont pas nuls, on peut les supposer égaux à 1, en changeant y en ay et z en bz.

II. Considérons le cas où il n'y a entre les racines λ_1, λ_2, λ_3 aucune relation de la forme $\lambda_2 = m\lambda_1$, mais où une combinaison de deux des racines est égale à la troisième racine

$$(116) \qquad \lambda_3 = p\lambda_2 + q\lambda_2.$$

Nous pouvons distinguer deux cas, suivant que cette égalité a lieu pour un seul couple de valeurs de p et de q, ou bien a lieu pour différentes valeurs de p et q.

1° Dans le premier cas, nous pouvons faire $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$ et nous avons la forme réduite

$$(117) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\lambda y} = \frac{dz}{(p+q\lambda)z + ax^p y^q} = dt,$$

dont l'intégration est immédiate.

2° Dans le second cas, nous devons avoir, en dehors de l'égalité (116), une ou plusieurs égalités $\lambda_3 = p'\lambda_1 + q'\lambda_2$, d'où

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p'-p}{q-q'} = \frac{\beta}{\alpha},$$

$\alpha : \beta$ étant une fraction irréductible. Nous pouvons prendre

$$\lambda_1 = \alpha, \qquad \lambda_2 = \beta, \qquad p' - p = r\beta, \qquad q - q' = r\alpha,$$
$$p = p + r\beta, \qquad q' = q - r\alpha.$$

Nous pouvons, comme tout à l'heure, supposer qu'on a $q' \leqq q$, ce qui exige que l'entier r ne prenne que des valeurs positives.

Il faut de plus, pour que q' soit positif, que l'on ait $r < q : \alpha$.

Si s est le plus grand entier tel que l'on ait $s \leqq q : \alpha$, nous aurons $r \leqq s$.

Enfin, il faut qu'on ait $p < \beta$, car si cette condition n'était pas vérifiée, on aurait, en prenant $r = 1$, un couple de valeurs positives $p' = p - \beta$, $q' = q + \alpha$ qui seraient acceptables, tandis que r doit être positif d'après nos hypothèses. Nous avons la forme réduite

$$(118) \qquad \frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dz}{(p\alpha + q\beta)z + \sum_{r=0}^{s} b_r x^{p+r\beta} y^{q-r\alpha}} = dt,$$

d'où

$$x = e^{\alpha t}, \qquad y = \mathrm{B}\, e^{\beta t}, \qquad z = e^{(p\alpha + q\beta)t}\left(\mathrm{C} + t \sum_{r=0}^{s} b_r \mathrm{B}^{q-r\alpha}\right),$$

$$z = \mathrm{C} x^p y^q + \frac{\log x}{\alpha} \sum_{r=0}^{s} b_r x^{p+r\beta} y^{q-r\alpha}.$$

III. Passons au cas où l'équation caractéristique a une racine double. Trois cas peuvent se présenter :

1° Aucune des deux racines distinctes n'est égale à une combinaison formée avec l'autre racine. Nous pouvons prendre

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = \lambda,$$

et nous avons la forme réduite

$$(119) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + ax} = \frac{dz}{\lambda z} = dt,$$

où l'on peut supposer $a = 1$.

2° La racine double est égale à une combinaison de la racine simple. Nous pouvons prendre

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = m, \qquad m \text{ entier positif},$$

et nous avons la forme réduite

$$(120) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{mz + by + cx^m} = dt.$$

On a ensuite, conformément au n° 6,

(121) $x = e^t, \qquad y = \text{B}\, e^{mt} + at\, e^{mt}, \qquad y = \text{B}x^m + ax^m \log x.$

Pour obtenir l'intégrale de M. Lindelöf, faisons $\text{B} = 0$, nous avons

$$\frac{dz}{dt} = mz + abt\, e^{mt} + c\, e^{mt},$$

$$z = \text{C}\, e^{mt} + e^{mt}\left(\frac{abt^2}{2} + ct\right),$$

$$z = \text{C}x^m + x^m\left(\frac{by^2}{2ax^{2m}} + \frac{cy}{ax^m}\right),$$

(122) $$z - \frac{cy}{a} = \text{C}x^m + \frac{by^2}{2ax^m}.$$

Si nous prenons pour nouvelle variable z l'expression $z - \dfrac{cy}{a}$, la première intégrale (121) ne sera pas changée et (122) nous donne

$$\frac{z}{x^m} - \frac{by^2}{2ax^m} = \text{C},$$

qui est l'intégrale (122) relative à un cas où l'on a $c = 0$. Le système (120) est donc ramené à la forme réduite plus simple

(123) $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{mz + by} = dt,$$

ou l'on peut supposer $a = 1$ et $b = 1$ si ces constantes ne sont pas nulles.

3° La racine simple est égale à une combinaison formée avec la racine double. Nous pouvons prendre

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = m. \qquad m \text{ entier},$$

et nous avons la forme réduite

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + ax} = \frac{dz}{mz + \sum_{r=0}^{m} b_r x^{m-r} y^r} = dt,$$

d'où

$$x = e^t. \qquad y = \text{B}\, e^t + at\, e^t, \qquad y = \text{B}x + ax \log x.$$

Pour calculer l'intégrale de M. Lindelöf, faisons $\text{B} = 0$, nous avons successivement :

$$\frac{dz}{dt} = mz + e^{mt}\sum_{r=0}^{m} b_r(at)^r,$$

$$z = \mathrm{C}\,e^{mt} + \frac{t\,e^{mt}}{a}\sum_{r=0}^{m}\frac{b_r}{r+1}(at)^r,$$

$$z = \mathrm{C}x^m + \frac{yx^{m-1}}{a}\sum_{r=0}^{m}\frac{b_r}{r+1}\left(\frac{y}{x}\right)^r,$$

$$(124)\qquad z - \frac{1}{a}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{b_r}{r+1}x^{m-1-r}y^{r+1} = \mathrm{C}x^m + \frac{b_m y^{m+1}}{(m+1)x}.$$

Si nous prenons comme nouvelle variable z le polynome qui est dans le premier membre de cette égalité (124), nous aurons

$$\frac{z}{x^m} - \frac{b_m y^{m+1}}{(m+1)x^{m+1}}$$

qui est l'intégrale de M. Lindelöf relative au cas où l'on a

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0.$$

Si nous faisons ce changement de variable et si nous supprimons l'indice de b_m, nous avons la nouvelle forme réduite

$$(125)\qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+ax} = \frac{dz}{mz+by^m}.$$

IV. Supposons que l'équation caractéristique ait une racine triple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Nous avons, en utilisant la remarque IV, n° 9, la forme réduite

$$(126)\qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+ax} = \frac{dz}{z+by} = dt,$$

d'où

$$x = e^t, \qquad y = \mathrm{B}e^t + ate^t,$$

et en faisant ensuite $\mathrm{B} = 0$ pour obtenir l'intégrale de M. Lindelöf

$$\frac{dy}{dt} = z + abte^t,$$

$$z = \mathrm{C}e^t + \frac{abt^2}{2}e^t, \qquad \frac{z}{x} - \frac{by^2}{2ax^2} = \mathrm{C}.$$

Nous obtenons ainsi 8 systèmes : (109), (115), (117), (118), (119), (123), (125), (126), que nous appellerons *formes réduites exceptionnelles*. Si nous ajoutons à ces 8 formes réduites le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\lambda y} = \frac{dz}{\mu z} = dt, \tag{127}$$

que nous appellerons *forme réduite normale* et qui convient au cas général où les conditions 2° et 3° sont vérifiées, ainsi qu'aux cas particuliers où les constantes a et b figurant dans les *formes réduites exceptionnelles* sont toutes nulles, nous aurons le tableau complet des formes réduites, dans le cas où la condition 1° est vérifiée.

Remarque. — Pour traiter les questions qu'on peut étudier à l'aide des formes réduites, il est utile d'éviter d'examiner le même cas avec 2 formes réduites différentes. Pour éviter ces doubles emplois, il est nécessaire de préciser les valeurs que peuvent prendre les constantes a, b, p, q, λ qui figurent dans ces équations. C'est ce que nous allons faire, en exprimant que pour chacune des formes réduites nous n'avons pas d'autres relations entre les racines λ_1, λ_2, λ_3 que les relations que nous avons envisagées et spécifiées dans l'établissement de chacune de ces formes réduites.

Tout d'abord, nous supposerons que les constantes a, b, b_0, b_1, ..., b_s qui figurent dans les équations d'une même forme réduite ne sont pas toutes nulles simultanément, car, s'il en était ainsi, on serait dans le cas de la forme réduite (127); un certain nombre de ces constantes pourront être nulles.

Les entiers m, α, β ne pourront pas être nuls. Sauf avis contraire, p et q pourront prendre des valeurs entières positives quelconques ou être nuls. Passons maintenant en revue les divers systèmes réduits.

Système (109). — λ ne devra pas être égal à une fraction de la forme $(m-p) : q$, car nous aurions $m = p + q\lambda$, c'est-à-dire entre les racines λ_1, λ_2, λ_3, la relation $\lambda_2 = p\lambda_1 + q\lambda_3$, relation que nous avons supposée ne pas exister dans le cas I, 1°. En particulier, λ n'est ni un entier, ni l'inverse d'un entier.

Système (115). — Nous avons dit qu'on doit avoir $p < m$ et que a et b ne sont pas nuls simultanément.

Système (117). — Rien ne s'opposerait, dans ce cas II, 1°, à ce qu'on prenne, dans certains cas, $\lambda = \beta : \alpha$, α et β étant des entiers, mais nous tomberions alors dans un cas que le système (118) permet de considérer en faisant $s = 0$. Nous supposerons donc que λ n'est pas un nombre rationnel. De plus, nous supposerons $q \neq 0$, car, pour $q = 0$ on retombe dans un cas que le système (109) permet de considérer.

Système (118). — Nous avons $p < \beta$ et $q - s\alpha \geqq 0$. Nous supposerons, de plus, qu'aucun des entiers α et β n'est égal à 1, afin de ne pas retomber dans un cas que le système (115) permet de considérer.

Système (119). — Nous supposons que λ n'est ni un entier, ni l'inverse d'un entier, afin de ne pas être dans l'un des cas que les équations (123) ou (125) permettent de considérer, mais λ peut être rationnel.

15. *Recherche des solutions algébroïdes.* — Parmi les questions pour l'étude desquelles il y a avantage à employer les formes réduites trouvées, je signalerai la recherche, pour le système primitif (108) des solutions holomorphes ou algébroïdes pour lesquelles x, y et z s'annulent simultanément.

Étant donné le système (108), je dirai qu'on a une *solution algébroïde passant par l'origine* lorsqu'on a des fonctions x, y, z qui peuvent s'exprimer au moyen de séries entières par rapport à un paramètre θ, les fonctions ainsi obtenues vérifiant les équations (108) et s'annulant pour $\theta = 0$.

Je dirai qu'on a une *solution holomorphe et nulle pour* $x = 0$, si l'on a des fractions y et z de la variable x, holomorphes et nulles pour $x = 0$ et vérifiant le système.

Nous pouvons considérer de même des solutions holomorphes et nulles pour $y = 0$ ou pour $z = 0$.

Une solution passant par l'origine sera dite tangente à Ox, si, lorsque x tend vers 0, $y : x$ et $z : x$ tendent vers 0.

Étant donné le système primitif (108), pour le ramener à l'un des systèmes réduits considérés, nous avons employé un système intermédiaire

$$(128)\quad \frac{dx}{\lambda_1 x+[x,y,z]_2}=\frac{dy}{\lambda_2 y+a_1 x+[x,y,z]_2}=\frac{dz}{\lambda_3 z+a_2 y+[x,y,z]_2},$$

où l'on a $a_1 = 0$, si l'on a $\lambda_2 \neq \lambda_1$, et $a_2 = 0$, si l'on a $\lambda_3 \neq \lambda_2$.

D'après la nature des changements de variables employés pour passer d'un système à l'autre, il est évident que toute *solution algébroïde passant par l'origine* de l'un des systèmes fournira une solution de même espèce pour les deux autres systèmes.

De plus, *toute solution holomorphe et nulle pour* $x = 0$ d'un système réduit fournit une *solution holomorphe et nulle* du système intermédiaire et réciproquement. En effet, si nous désignons par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les variables de l'un des systèmes et par x, y, z celles de l'autre, nous avons

$$(129)\quad \bar{x}=x+[x,y,z]_2,\qquad \bar{y}=y+[x,y,z]_2,\qquad \bar{z}=z+[x,y,z]_2.$$

Si y et z sont remplacés par les fonctions de x correspondant à une *solution holomorphe et nulle* pour $x = 0$, nous pourrons de la première équation (129) tirer x en fonction holomorphe de $\bar{x}$, et en portant cette expression de x dans les deux dernières équations (129), $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont exprimés en fonction holomorphe de x.

Ces mêmes formules (129) montrent qu'à une solution passant par l'origine, tangente à Ox et vérifiant le système intermédiaire (128) correspond une solution de même espèce du système réduit et réciproquement.

De ces remarques il résulte que, pour étudier les solutions holomorphes ou algébroïdes du système primitif (108) ou du système (128), il nous suffira d'étudier les solutions holomorphes ou algébroïdes du système réduit correspondant. Cette étude ne présente aucune difficulté, elle demande cependant une attention assez minutieuse, pour ne laisser échapper aucun des cas qui peuvent se présenter, suivant les valeurs attribuées aux constantes, qui figurent dans les équations et aux constantes arbitraires qui s'introduisent par l'intégration. Pour donner un exemple des circonstances qui peuvent se présenter, considérons le système (118)

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dz}{(p\alpha + q\beta)z + \sum_{r=0}^{s} b_r x^{p+r\beta} y^{q-r\alpha}}.$$

Nous avons

$$x = A e^{\alpha t}, \qquad y = B e^{\beta t}, \qquad z = e^{(p\alpha+q\beta)t}\left(C + t\sum_{r=0}^{s} b_r A^{p+r\beta} B^{q-r\alpha}\right).$$

Supposons d'abord qu'on prenne $A \neq 0$; nous pouvons faire $A = 1$ et prendre comme paramètre $\theta = e^t$. Nous n'aurons de solution algébroïde passant par l'origine que si l'on a

$$\sum_{r=0}^{s} b_r B^{q-r\alpha} = 0; \tag{130}$$

nous aurons alors

$$x = \theta^{\alpha}, \qquad y = B\theta^{\beta}, \qquad z = C\theta^{p\alpha+q\beta}.$$

A chaque racine B de l'équation (130), y compris la racine $B = 0$ qui existe si l'on a $q - s\alpha \neq 0$, correspond une famille de solutions algébroïdes dépendant d'un paramètre arbitraire C. Nous n'avons de solution holomorphe et nulle pour $x = 0$ que si l'on a $B = 0$, $C = 0$.

Supposons qu'on prenne $A = 0$. Nous avons les deux cas suivants :

1° p n'est pas nul, ou bien p étant nul b_0 est aussi nul. Nous avons

$$x = 0, \qquad y = B e^{\beta t}, \qquad z = C e^{(p\alpha+q\beta)t}.$$

En faisant $B = 0$ nous avons la solution $x = 0, y = 0$ holomorphe et nulle pour $z = 0$.

Si B n'est pas nul, nous pouvons faire $B = 1$ et nous aurons une famille de solutions algébroïdes dépendant d'un paramètre C. On n'obtient dans cette famille une solution holomorphe qu'en faisant $C = 0$ qui fournit $x = 0$, $z = 0$ solution holomorphe et nulle pour $y = 0$;

2° p est nul et b_0 n'est pas nul. Nous avons

$$x = 0, \qquad y = B e^{\beta t}, \qquad z = e^{(p\alpha+q\beta)t}(C + b_0 t B^q).$$

En faisant $B = 0$ nous avons, comme dans 1°, la solution $x = 0$, $y = 0$ qui est holomorphe et nulle pour $z = 0$. Dans tous les autres cas, nous n'obtenons jamais de solution algébroïde passant par l'origine.

16. *Détermination de la forme réduite correspondant à un système donné.* — Étant donné un système (108), la résolution de l'équation caractéristique permet de reconnaître si les conditions 1°, 2° et 3° sont vérifiées. S'il en est ainsi, la forme réduite correspondant au système (108) sera la forme normale (127). Si la condition 1° est vérifiée, sans que les conditions 2° et 3° le soient, la connaissance des diverses manières dont une des racines peut s'exprimer au moyen d'une combinaison des deux autres permet de reconnaître quelle est la forme réduite exceptionnelle qui correspond au système donné, mais cette connaissance ne permet pas de décider si les constantes a et b qui figurent dans la forme réduite considérée ne sont pas toutes nulles et si, par conséquent, on n'a pas affaire en réalité à la forme réduite normale (127).

Pour distinguer si oui ou non la forme réduite correspondant au système (108) est la forme normale, il sera presque toujours utile, pour la commodité des calculs, de ramener le système (108) à la forme intermédiaire (128), mais il ne sera pas nécessaire ensuite de chercher le changement de variable permettant de passer à la forme réduite, ni même de faire les calculs de ce changement de variables avec un nombre fini de termes figurant dans les séries employées.

Assez souvent, en comparant les résultats obtenus pour la forme réduite dans l'étude des solutions holomorphes pour $x = 0$, ou $y = 0$, ou $z = 0$, avec les résultats obtenus par la recherche directe sur le système intermédiaire (128) des solutions holomorphes on pourra décider si cette forme réduite convient, ou si l'on retombe dans la forme réduite normale. Par exemple, si les trois racines de l'équation caractéristique sont proportionnelles aux nombres 1, m et λ, m étant un entier et λ un nombre irrationnel, nous ne pouvons être que dans le cas de la forme réduite (109) ou dans celui de la forme réduite normale. La forme réduite (109) n'admet pas de solution holomorphe et nulle pour $x = 0$. Donc, si l'on trouve pour le système (128) une solution holomorphe et nulle pour $x = 0$, on a $a = 0$ et l'on retombe dans le cas de la forme réduite normale.

Dans le même ordre d'idées, si l'étude des solutions holomorphes ne suffit pas, on peut avoir recours à l'étude des solutions algébroïdes.

Si ces procédés ne suffisent pas, ou présentent des complications, on pourra avoir recours aux développements de x, y, z en séries procédant suivant les puissances de constantes arbitraires. Nous avons appris à former ces développements (remarque du n° 7). Si l'on a affaire à la forme réduite normale (127) on voit que ces développements ne contiennent que des puissances des quantités Ae^t, $Be^{\lambda t}$, $Ce^{\mu t}$, tandis que, si l'on a affaire à une forme réduite exceptionnelle, les coefficients des séries considérées contiennent, en dehors des exponentielles, des puissances entières de t. On vérifie en effet sans peine que, pour toutes les formes réduites, les expressions de x, y ou z contiennent des puissances de t en dehors des exponentielles. Si nous désignons par $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ les variables du système intermédiaire (128) nous avons les relations (129)

Si nous remplaçons x, y, z par leurs expressions, nous avons les développements dont nous parlons. Nous verrons dans un instant, d'après l'étude d'un cas particulier, qu'il est impossible que les puissances entières de t disparaissent dans ces développements. Donc, si, en cherchant directement sur le système (128) ces développements, on ne trouve pas de terme en t, la forme réduite normale conviendra. Précisons la méthode par un exemple.

Supposons que les racines de l'équation caractéristique soient proportionnelles à $1, m, p+qm$, m, p, q étant des entiers positifs. La forme réduite correspondante sera

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{(p+qm)z + bx^p y^q} = dt.$$

Nous avons

$$x = Ae^t, \qquad y = e^{mt}(B + aA^m t),$$
$$z = e^{(p+qm)t}\left[C + \frac{b(B + aA^m t)^{q+1} - bB^{q+1}}{(q+1)aA^{m-p}}\right].$$

Nous nous sommes arrangés de telle manière que, toutes réductions faites, les expressions de x, y, z soient des polynomes par rapport aux constantes.

Si a n'est pas nul et si l'on a $m \geqq p+q$, l'expression de y contient le terme $a A^m t e^{mt}$ qui est, parmi les termes de y et de z où figurent t, le terme de degré minimum par rapport à A et B. Ce terme ne se réduira donc avec aucun autre dans le développement de $\overline{y}$, puisqu'il sera seul de son espèce. Si a est nul, ou si l'on a $m \geqq p+q$, nous remarquerons que l'expression de z contient le terme $\dfrac{b A^p B^q t e^{(pq+m)t}}{q+1}$, ce terme ne disparaît pas dans le développement de $\overline{z}$, puisque tous les autres termes de y et de z qui contiennent t sont, par rapport à A et B, de degré supérieur à ce terme. Si nous cherchons, pour le système (128), les développements de $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ suivant les puissances des A, B, C, nous pourrons, après avoir trouvé les termes de degré égal au plus grand des deux nombres m et $p+q$, décider si la forme réduite normale convient, ou s'il faut se servir de la forme réduite exceptionnelle (115). Nous pouvons, pour abréger les calculs, supposer $C=0$ dans les développements que nous cherchons. Nous pourrions même, si nous voulions seulement voir si a est nul ou non, supposer $B=0$, $C=0$.