BULLETIN DE LA S. M. F.

D. BIRKOFF

Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 305-323

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__305_0>

QUELQUES THÉORÈMES SUR LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES DYNAMIQUES,

Par M.-G. D. Birkhoff.

Parmi les mouvements d'un système dynamique, il peut en exister certains ayant la propriété remarquable de représenter le mouvement tout entier avec tel degré d'approximation qu'on désire, pendant *tout* intervalle de temps égal à T, où T varie seulement avec le degré de l'approximation. Dans le présent Mémoire, ces mouvements sont appelés mouvements *récurrents;* ils forment une extension naturelle des mouvements périodiques.

Du point de vue que j'adopte, un mouvement *stable* est un mouvement qui, à partir d'un certain moment et ultérieurement, n'approche jamais indéfiniment près de certaines positions singulières; je démontre qu'il existe nécessairement un ou plusieurs mouvements récurrents dans le voisinage infinitésimal d'un mouvement stable.

Les mouvements récurrents se rangent en deux types, l'un d'eux étant représentable explicitement au moyen de fonctions continues et périodiques des variables qu'elles contiennent. Ce premier type est appelé type *continu* et semble comprendre tous les mouvements récurrents dont l'existence a été établie. Je montre, par la construction d'un exemple, que, au moins lorsqu'on n'assujettit pas les équations différentielles définissant le mouvement à être analytiques, il existe des mouvements récurrents qui ne sont ni périodiques, ni dans le voisinage infinitésimal d'aucun mouvement périodique, et qui sont d'une nature particulière telle que la désignation de mouvements récurrents *discontinus* leur semble appropriée.

Des recherches incomplètes me conduisent à croire que, dans le cas de $n = 3$, il existe aussi nécessairement des mouvements récurrents discontinus dans les cas analytiques, et que la structure de ces mouvements est essentiellement semblable à celle du mouvement présenté dans l'exemple.

Ce Mémoire a été lu pour la première fois à la réunion d'été de l'American Mathematical Society en 1909.

I. — Représentation géométrique.

Un système dynamique, dans une très large acception, peut être considéré comme défini par un système quelconque d'équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{1}$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions données, réelles et uniformes de $x_1, \ldots, x_n$, analytiques par rapport à ces variables, et où t est la variable indépendante. Les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées* du mouvement, et t indique le *temps*.

Nous convenons de représenter les coordonnées du mouvement comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace à n dimensions. Tout mouvement possible est défini par n équations

$$x_1 = \xi_1(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \xi_n(t), \tag{2}$$

où les fonctions analytiques $\xi_1, \ldots, \xi_n$ constituent une solution de (1). Les équations (2) sont aussi représentées par une courbe de l'espace à n dimensions, à moins que $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ne soient toutes constantes; alors (2) sont représentées par un seul point.

Il faut maintenant rappeler quelques-uns des résultats fondamentaux et bien connus, relatifs à un système différentiel du type (1).

Soit S l'ensemble des points pour lesquels au moins une des fonctions $X_1, \ldots, X_n$ cesse d'être analytique, et soit E l'ensemble des points, ne faisant pas partie de S, pour lesquels les équations

$$X_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n = 0 \tag{3}$$

sont satisfaites simultanément.

Par tout point P, extérieur à S et E, il passe une *courbe* (P) et une seule, donnée par une infinité simple de mouvements (2), savoir par ceux qu'on obtient en remplaçant t par $t + c$, c étant une constante. A deux points quelconques A et B sur une seule et même courbe, correspond un intervalle de temps, qui est le temps nécessaire aux coordonnées du mouvement pour passer de celles de A à celles de B.

Les points E représentent les mouvements à coordonnées constantes satisfaisant à (2). Lorsque t croît ou décroît, le point mobile sur une courbe (P) ne peut tendre vers un point-limite E dans un temps fini, car cela contredirait le théorème fondamental d'existence pour un système tel que (1).

Le point mobile sur une courbe (P) peut cependant tendre vers un point-limite S dans un temps fini. Mais on fera la convention que la courbe ne s'étend pas jusqu'à ce point.

Nous entendrons par le voisinage (ε) de S les points qui sont, soit à une distance inférieure à ε d'un point de S, *soit à une distance supérieure à* $\frac{1}{\varepsilon}$ *de l'origine des coordonnées.*

La courbe passant en un point P, extérieur à S ou E, est susceptible d'extension pour $\lim t = +\infty$ ou $\lim t = -\infty$, à moins que lorsque t croît ou décroît, respectivement, depuis la valeur initiale t_0, vers une limite finie τ, le point mobile sur la courbe (P) ne tende à venir et à rester dans tout voisinage (ε) de S, si petit que soit ε. Ce fait est évident, puisqu'en dehors d'un voisinage (ε) donné de S, l'extension est possible d'une manière uniforme pour un seul et même intervalle de temps.

Enfin, *si t est pris comme paramètre de la courbe*, on peut dire que la variation continue d'un point P (extérieur à S) produit une variation continue de la courbe (P). Avec plus de précision, nous avons l'énoncé suivant :

Théorème auxiliaire. — *Si* P *n'est pas un point de* S, *et si le mouvement, qui pour $t = t_0$ est représenté par* P, *est susceptible d'extension pour $\tau \leqq t \leqq \sigma$, il est possible de choisir une quantité δ positive assez petite, pour que tout mouvement qui, pour $t = t_0$, est représenté par un point* P′ *de distance à* P *inférieure à δ, soit aussi susceptible d'extension pour $\tau \leqq t \leqq \sigma$, et soit en outre tel que, durant cet intervalle, la distance entre les points correspondants de la courbe* (P) *et de la courbe* (P′) *n'excède pas une quantité positive arbitraire ε.*

Ceci est l'application aux équations (1) d'un théorème bien connu concernant la variation d'une solution d'équations différentielles ordinaires, lorsqu'on fait varier les conditions initiales.

II. — Stabilité et instabilité.

Nous pouvons maintenant déduire certains théorèmes généraux simples, concernant le mouvement d'un système dynamique tel que (1).

A cette fin, nous classerons les mouvements possibles d'après la définition suivante : un mouvement est dit *positivement* (ou *négativement*) *stable*, s'il existe un nombre ε tel que pour $t > t_0$ (ou $t < t_0$), les points représentatifs du mouvement restent extérieurs à quelque voisinage (ε) de S. Sinon, le mouvement est appelé *positivement* (ou *négativement*) *instable*. Cette définition impose au mouvement le minimum de restrictions nécessaires à assurer la stabilité, dans son sens mathématique strict.

L'extension d'un mouvement stable est possible pour toute valeur de $t > t_0$ (ou $t < t_0$), puisque l'extension d'un mouvement cesse seulement d'être possible lorsque, t approchant d'une certaine valeur finie τ, le point représentatif vient et reste à l'intérieur de tout voisinage (ε) assigné de S.

Les types les plus simples de mouvement stable sont fournis par le cas du repos, représenté par un seul point E, et par celui du mouvement périodique, représenté par une courbe fermée.

Tous les points desquels les points de la courbe représentative d'un mouvement s'approchent indéfiniment pour $\lim t = +\infty$ (ou $\lim t = -\infty$), seront appelés les *points-limites oméga* (ou *alpha*) du mouvement; ils forment, bien entendu, un ensemble fermé. Les points de la courbe elle-même ne sont pas nécessairement dans l'une ou l'autre des classes de points-limites.

Dans un Mémoire important, M. Hadamard ([1]) a appelé l'ensemble des points-limites, le *domaine* du mouvement. En particulier, il a prouvé que l'ensemble des points-limites d'un mouvement stable représente un ensemble de mouvements stables, contenant au moins un mouvement ([2]).

([1]) *Sur les trajectoires en Dynamique* (*Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. III, 1897, p. 331-387).

([2]) *Loc. cit.*, p. 382.

Ce fait constitue la majeure partie du théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Les points-limites oméga d'un mouvement positivement stable représentent un ensemble de mouvements, positivement et négativement stables, desquels le mouvement donné s'approche uniformément quand le temps croît, c'est-à-dire que la distance entre le point représentant le mouvement et l'ensemble des points-limites tend vers* o *pour* $\lim t = +\infty$.

Démonstration. — Soit L un point-limite oméga d'un mouvement positivement stable donné. Alors, puisque le mouvement donné est stable, L est extérieur à un certain voisinage fixe de S, et la courbe (L) peut être étendue dans les deux sens à partir de L, pour un intervalle de temps uniformément grand pour tous les points L. Mais, en vertu du théorème auxiliaire, toute courbe qui passe en des points Q suffisamment voisins de L, reste à une distance inférieure à ε de la courbe (L) pendant le même temps. Puisque la courbe donnée représentative du mouvement passe en de tels points Q après tout instant fixé il est clair que l'arc de la courbe (L), correspondant à cet intervalle de temps uniforme, se compose de points-limites oméga.

En répétant ce raisonnement, on voit que tous les points de la courbe (L) sont des points-limites oméga.

De plus, puisqu'aucun des points-limites ne peut être à l'intérieur du voisinage fixe de S, cette courbe (L) peut être étendue pour toute valeur du temps, et est positivement et négativement stable.

Pour compléter la démonstration du théorème I, il n'y a plus qu'à montrer que, lorsque t croît, le point mobile sur la courbe représentant le mouvement donné, tend uniformément vers les points-limites (L). Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; alors il existe une quantité positive d et une suite d'instants $t_1, t_2, \ldots,$ ($\lim t_n = +\infty$), pour lesquels la distance entre le point représentatif du mouvement donné et tout point-limite oméga est au moins égale à d. La suite correspondante de points aura au moins un point limite L′, qui sera distant d'au moins d de tout point L. Malgré cela, L′ doit être lui-même un point L, puisqu'il possède la propriété fondamentale de ces points. Ceci est impossible, par conséquent, le théorème est nécessairement vrai.

A cause de la symétrie impliquée, nous ne considérons pas, dans le théorème qui vient d'être démontré, les mouvements négativement stables, pas plus que nous ne le ferons dans les théorèmes suivants.

Il sera commode d'appeler les mouvements représentés par une courbe composée de points-limites oméga (ou alpha), *mouvements limites* oméga (ou alpha).

Théorème II. — *Étant donné un mouvement positivement instable :*

1° *Ou bien, il est seulement susceptible d'extension pour* $t < \tau$, *ses points représentatifs tendant à venir et rester dans tout voisinage* (ε) *de* S, *pour* $\lim t = \tau$;

2° *Ou bien, il est susceptible d'une extension indéfinie quand t croît, et il est tel que, pour tout nombre positif* ε, *on peut trouver un intervalle de temps* T, *assez grand pour que, au moins une fois dans tout intervalle* T *pour* $t \geqq t_0$, *le mouvement soit représenté par un point intérieur au voisinage* (ε) *de* S;

3° *Ou bien, il est susceptible d'une extension indéfinie quand t croît, et possède au moins un mouvement limite oméga, positivement et négativement stable.*

Démonstration. — La démonstration se fait aisément.

En premier lieu, si l'extension n'est possible que pour $t < \tau$, nous avons évidemment le cas (1°). S'il n'en est pas ainsi, supposons que la condition du cas (2°) ne soit pas satisfaite, et cherchons à démontrer que nous avons alors le cas (3°).

Dans ces conditions, il existera une quantité positive ε et une suite d'intervalles de temps indéfiniment croissants (t_1, t_1'), (t_2, t_2'), . . . , durant lesquels tous les points représentant le mouvement instable donné sont en dehors du voisinage (ε) de S.

Soient alors P_1, P_2, . . . , les points correspondant aux milieux des intervalles de temps de la suite. Cette suite de points a au moins un point-limite P, qui est au moins à la distance ε de tout point de S. Par un raisonnement semblable à celui qui a été fait dans la démonstration de la première partie du théorème I, on voit que la courbe (P) peut être étendue pour toute valeur de t, et reste en dehors du voisinage (ε) de S. Brièvement indiquée, la raison en est que les courbes (P_k) ($k = 1, 2, \ldots$) sont situées en dehors du voisinage (ε) de S pour des intervalles de temps positifs et négatifs indéfiniment croissants avec k, tandis que certains des points P_k tendent vers P. Par suite, en vertu du théorème auxiliaire, la courbe (P) a les propriétés indiquées. Ainsi le mouvement M satisfait à la condition (3°), puisque le mouvement (P) est un mouvement limite de M, positivement et négativement stable.

III. — Mouvement récurrent.

On vient de voir que tout mouvement M, positivement ou négativement stable, possède un ensemble *fermé* de mouvements limites M′, positivement et négativement stables. Il s'ensuit immédiatement que l'ensemble des mouvements limites alpha et oméga de tout mouvement de M′, ou bien coïncide avec M′, ou bien est un sous-ensemble de M′ (¹).

Définition. — Tout ensemble fermé M′ de mouvements positivement et négativement stables, tel que tout mouvement de M′ admet M′ pour son ensemble de mouvements limites alpha, ainsi que pour son ensemble de mouvements limites oméga, sera appelé un ensemble *minimal;* et tout mouvement de M′ sera appelé un mouvement *récurrent*.

Par définition, un mouvement récurrent M est stable. De plus, tout point de la courbe représentative est à la fois un point-limite alpha et un point-limite oméga, car autrement l'ensemble des mouvements limites de M ne contiendrait pas M, contrairement à la définition. Ce fait signifie que le mouvement approche arbitrairement près d'une quelconque de ses positions infiniment souvent pour $\lim t = -\infty$ et $\lim t = +\infty$; c'est-à-dire que le mouvement est stable *au sens de Poisson*.

Toutefois, cette propriété ne caractérise pas seulement les mou-

(¹) *Cf.* Hadamard, *loc. cit.*, p. 383.

vements récurrents. Par exemple, on peut construire, pour $n = 3$, un système dynamique tel qu'il existe un mouvement positivement et négativement stable M, dont les points-limites alpha et oméga constituent tout l'intérieur et la surface d'un tore. Un tel mouvement est stable au sens de Poisson, mais il ne peut être récurrent au sens défini ci-dessus; en effet, tout mouvement dont la courbe est située sur la surface du tore appartient à M′, mais ses mouvements limites forment seulement une partie de M′.

Les exemples les plus simples de mouvement récurrent sont les cas du repos et du mouvement périodique; dans ces deux cas, M′ coïncide avec M et se compose d'un seul mouvement.

Dans tous les autres cas, M′ contient une infinité de mouvements dont le nombre cardinal est celui du continu. En effet, en un point P de la courbe représentative d'un mouvement récurrent qui n'est pas de ces types simples, construisons un petit élément plan normal à la direction de la tangente en ce point, et considérons l'ensemble fermé de points formé par l'infinité des intersections de toutes les courbes de M′ avec cet élément. Tout point de cet ensemble, comme par exemple P, est un point-limite des points de l'ensemble, puisque c'est un point-limite alpha et oméga de l'ensemble infini correspondant au mouvement (P). Par suite, l'ensemble de points est *parfait* et a la puissance du continu. Mais chaque mouvement (P) correspond seulement à un ensemble dénombrable de tels points. Puisque le nombre cardinal des mouvements de M′ ne peut excéder celui du continu, il lui est nécessairement égal.

La propriété caractéristique des mouvements récurrents est donnée par le théorème suivant :

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement positivement et négativement stable* M *soit un mouvement récurrent est que pour tout nombre positif* ε, *si petit qu'il soit, il existe un intervalle de temps* T, *assez grand pour que l'arc de la courbe représentative correspondant à tout intervalle égal à* T *ait des points distants de moins de* ε *de n'importe quel point de la courbe tout entière.*

Démonstration. — La condition est nécessaire. En effet, si elle n'est pas satisfaite par quelque mouvement récurrent M, il sera possible de choisir une succession de points P_1, P_2, . . . , sur la courbe représentant le mouvement, et une succession d'intervalles (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), . . . , correspondant à des périodes de temps indéfiniment croissantes telles que, durant l'intervalle (t_k, t'_k), les points de la courbe ne viennent pas à une distance moindre que ε (ε étant une quantité positive) du point P_k de la courbe.

Soit Q_k le point de l'arc correspondant au milieu de l'intervalle (t_k, t'_k). L'ensemble Q_k a un point-limite Q, obtenu en prenant la limite d'un ensemble partiel Q_{k_1}, Q_{k_2}, ..., convenablement choisi dans l'ensemble donné, et l'ensemble partiel P_{k_1}, P_{k_2}, . . . a au moins un point-limite P. Par suite, en fixant seulement notre attention sur une suite de la série k_1, k_2, ..., pour laquelle P_k tend vers P, nous pouvons écrire simultanément : $\lim Q_k = Q$ et $\lim P_k = P$. Les points Q et P seront naturellement des points-limites L de M, et tout point de la courbe (Q) ne sera pas distant du point P de moins de ε. Ceci résulte du fait que la courbe (Q_k) ne vient pas à une distance de P_k inférieure à ε pendant des intervalles de temps positifs et négatifs indéfiniment croissants avec k, et que, par conséquent, la courbe limite complète (Q) ne vient jamais à une distance de P inférieure à ε, en vertu du théorème auxiliaire.

L'ensemble des mouvements limites du mouvement (Q) de M' est donc seulement un sous-ensemble de M', puisqu'il ne peut contenir le mouvement (P). Mais ceci contredit le fait que M est un mouvement récurrent. Par suite, la condition est nécessaire.

On voit aussi aisément que la condition imposée à M est suffisante.

Car supposons cette condition remplie. D'abord, il est clair que l'ensemble des mouvements limites alpha, ou celui des mouvements limites oméga, consistera, d'après le théorème I, en un ensemble fermé de mouvements positivement et négativement stables M'; de plus, en vertu de la condition qui est supposée satisfaite, chacun de ces deux ensembles doit contenir M, et, par conséquent, les deux ensembles coïncident.

Si M n'est pas un mouvement récurrent, il existera dans l'ensemble des mouvements limites M', un mouvement M_1, avec un ensemble de mouvements limites oméga (ou alpha), qui est un sous-ensemble de M'. Soit P un point-limite oméga de M et non de M_1, de telle façon que P se trouve à une distance excédant quelque constante positive q, de tout point de M_1. A certains instants, t_1, $t_2, \ldots,$ tels que $\lim t_n = +\infty$, les points correspondants du mouvement M viendront à une distance inférieure à une quantité petite quelconque δ d'un point Q de M_1, et, par suite, continueront à être à une distance inférieure à tout nombre ε des points de M_1, durant tout intervalle de temps donné, si grand qu'il soit, en vertu du théorème auxiliaire.

En choisissant $\varepsilon < \frac{q}{2}$, nous voyons, par conséquent, qu'on peut trouver des intervalles de temps indéfiniment croissants, durant lesquels les points de la courbe (M) ne viennent pas à une distance inférieure à $\frac{q}{2}$ de l'un de ses points-limites oméga, savoir de P. Par conséquent, la condition n'est pas satisfaite, à moins que le mouvement ne soit récurrent. C'est-à-dire que la condition est *suffisante*.

IV. — Mouvements stables et mouvements récurrents.

Il y a une relation étroite entre les mouvements stables et les mouvements récurrents d'un système dynamique.

Théorème IV. — *L'ensemble des mouvements limites oméga* M', *de tout mouvement positivement stable* M, *contient au moins un mouvement récurrent.*

Démonstration. — Désignons par S_d les régions fermées en lesquelles l'espace à n dimensions est divisé par des systèmes de plans équidistants, parallèles aux plans de coordonnées, comprenant ces plans, et situés à la distance d les uns des autres. Considérons les régions S_1 ayant chacune pour volume l'unité. La courbe représentant le mouvement M a des points dans un nombre fini de ces régions, puisque M reste dans une portion finie de l'espace.

Soit M_1 un mouvement de M' dont la courbe correspondante entre dans le moindre nombre possible des régions S_1. Considérons à part ces régions S_1, et divisons chacune d'elles en 2^n régions $S_{\frac{1}{2}}$, de volume $\frac{1}{2^n}$. Tous les mouvements limites oméga de M_1

ont leurs courbes qui restent entièrement dans ces régions partielles; parmi ces mouvements, il en existe un, M_2, dans M'_1 (et, par suite, dans M'), dont la courbe entre dans le moindre nombre possible des régions $S_{\frac{1}{2}}$. En continuant de cette façon, nous pouvons choisir des mouvements M_1, M_2, M_3, . . . , dans M', en considérant les régions successives S_1, $S_{\frac{1}{2}}$, $S_{\frac{1}{4}}$, ...

Soit P_1, P_2, . . . n'importe quel système de points situés respectivement sur les courbes représentant M_1, M_2, . . . , et soit P un point-limite de cette suite de points. Alors P est naturellement un point-limite de M, puisque l'ensemble de ces points-limites est fermé; et la courbe passant en P a la propriété d'être située dans chacun des systèmes de moindre nombre de régions S_1, $S_{\frac{1}{2}}$, . . . , puisque tous les points de la courbe (P_k) sont dans les systèmes de moindre nombre de régions S_1, $S_{\frac{1}{2}}$, . . . , $S_{\frac{1}{2^k}}$.

Réciproquement, il est clair qu'un point quelconque appartenant à tous les systèmes de régions choisies est un point-limite du mouvement (P). Autrement, la courbe (P) reste entièrement dans chaque système de régions S_1, $S_{\frac{1}{2}}$, . . . , mais ne vient pas arbitrairement près de quelque point Q contenu à la fois dans toutes. Par suite, on voit que, si k est pris suffisamment grand, la courbe (P) n'entrera pas dans la région particulière $S_{\frac{1}{2^k}}$ qui contient Q. mais, d'après la définition des régions choisies $S_{\frac{1}{2^k}}$, la courbe représentant le mouvement (P) doit entrer dans chaque région $S_{\frac{1}{2^k}}$, puisque la courbe reste entièrement dans ces régions et que le mouvement fait partie de M'. Ainsi, il se produirait une contradiction, si la propriété réciproque n'était pas vraie.

Nous pouvons maintenant démontrer immédiatement que le mouvement (P) est récurrent.

En premier lieu, les ensembles de mouvements limites alpha et oméga du mouvement (P) doivent coïncider. Car, autrement, il existe un mouvement limite alpha ou oméga, dont les points-limites sont un sous-ensemble des points-limites du mouvement (P). Par conséquent, la courbe correspondante reste entièrement dans les régions choisies $S_{\frac{1}{2^k}}$, mais n'entre pas dans toutes ces régions, bien que le mouvement appartienne à M′; ceci est impossible. Secondement, par un raisonnement analogue, nous concluons immédiatement que les mouvements limites du mouvement (P) forment un ensemble minimal. Par suite, le mouvement (P) est récurrent.

THÉORÈME V. — *Tout mouvement positivement stable* M *a la propriété que, pour tout nombre positif* ε, *on peut choisir un nombre positif* T *assez grand pour que, sur tout arc de la courbe* M *correspondant à un intervalle égal à* T, *après l'instant initial* $t = t_0$, *tous les points ne restent pas à une distance au moins égale à* ε *des courbes de tous les mouvements limites récurrents de* M.

Démonstration. — Si le théorème n'était pas vrai, nous pourrions choisir une suite d'intervalles de temps indéfiniment croissants (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), ..., durant lesquels aucun point de la courbe représentant M ne serait à une distance inférieure à une certaine valeur ε des points de tout mouvement limite récurrent de M. Soit P un point-limite des points P_1, P_2, ..., correspondant aux milieux des intervalles (t_1, t'_1), (t_2, t'_2), ...

Tout à fait comme plus haut, nous en déduisons immédiatement l'existence d'une courbe passant par P, positivement et négativement stable, telle qu'aucun de ses points ne soit à une distance inférieure à ε des points représentatifs de tout mouvement limite récurrent de M, bien que les points de la courbe (P) soient tous des points-limites oméga du mouvement M; ceci est absurde, puisqu'au moins un mouvement limite du mouvement (P) est récurrent, d'après le théorème IV.

Ce théorème conduit à conjecturer qu'on peut représenter un mouvement stable donné, aussi exactement qu'on le désire, au moyen d'un ensemble de mouvements récurrents, et de mouvements qui leur soient asymptotiques.

V. — CLASSIFICATION DES MOUVEMENTS RÉCURRENTS.

Quels sont les types de mouvements récurrents? Dans le cas de $n = 1$, l'unique mouvement de cette sorte est donné par $x_1 = c$; dans le cas de $n = 2$, on a seulement, outre le cas $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, le cas du mouvement périodique

$$x_i = P_i(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}) \qquad (i = 1, 2), \qquad t = \int Q(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau})\, d\tau$$

(où k_1 est un nombre réel positif, et τ un paramètre), car les courbes représentatives d'un mouvement stable dans le plan sont, ou fermées, ou asymptotiques à une courbe fermée ([1]).

Dans le cas d'un plus grand nombre n de dimensions, on a n espèces analogues de mouvements, savoir :

$$x_i = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_i = P_i(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad t = \int Q(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau})\, d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_i = P_i(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}k_{n-1}\tau}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$t = \int Q(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}k_{n-1}\tau})\, d\tau;$$

où les quantités $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ sont réelles, positives et incommensurables; mais on n'a aucune raison de croire que cette classification épuise tous les cas possibles.

Ce type de mouvement récurrent peut être appelé mouvement récurrent continu et a la propriété que ses points-limites remplissent un continu d'un certain nombre de dimensions. Tous les mouvements récurrents ne possédant pas cette propriété peuvent être appelés *discontinus*.

Dans les problèmes de Dynamique complètement intégrables, c'est seulement le premier type qui se rencontre. Dans les cas non intégrables, je n'ai pu découvrir un exemple dans lequel on ait montré l'existence d'un mouvement du deuxième type.

Il est intéressant de considérer, sous ce rapport, le cas de $n = 3$ dans lequel les trajectoires de la Dynamique sont les géodésiques d'une surface à courbure totale négative, sans singularités. M. Hadamard ([2]) a traité ce cas. Il divise les géodésiques en trois catégories :

1° Celles qui sont fermées ou asymptotiques à des géodésiques fermées;

([1]) *Cf.* Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (3e partie) (*Journal de Mathématiques*, 4e série, 1885, p. 228).

([2]) *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IV, 1898, p. 27-73).

2° Celles qui s'éloignent sur les nappes infinies de la surface;

3° Les géodésiques restantes, qui restent dans les régions finies de la surface et qui sont en nombre infini.

Le mouvement correspondant à une géodésique de cette troisième catégorie est stable, et, par conséquent, parmi les géodésiques représentatives des mouvements limites, il existe au moins une géodésique correspondant à un mouvement récurrent. Cette géodésique ne peut être de la seconde catégorie, ni de la première et asymptotique à une géodésique fermée, puisqu'aucune de ces possibilités ne peut correspondre à un mouvement récurrent. Par suite, ou bien toute géodésique de la troisième catégorie tend à s'approcher infiniment souvent, indéfiniment près en position et direction d'*une* certaine géodésique fermée, pour s'éloigner chaque fois de nouveau lorsque le temps continue à croître, ou bien il existe un mouvement récurrent donné par une géodésique de la troisième catégorie.

S'il existe un mouvement récurrent de cette troisième catégorie, les recherches de M. Hadamard tendent à montrer qu'il doit être du type discontinu.

Dans les paragraphes suivants, je donnerai un exemple duquel il résulte que, *au moins lorsqu'on écarte l'hypothèse que* $X_1, \ldots, X_n$ *sont analytiques* (¹), *il existe des mouvements récurrents discontinus*, pour un système d'équations (1), dans le cas de $n = 3$. Ceci ne permet pas de donner une conclusion pour les problèmes de Dynamique actuellement étudiés.

VI. — Sur les ensembles parfaits qui ne sont denses nulle part.

Comme préliminaire à la construction d'un mouvement récurrent discontinu, il nous est nécessaire d'établir un certain type de transformation d'un ensemble parfait, nulle part dense, en lui-même.

Prenons un tel ensemble de points P sur un cercle de rayon 1, sur lequel chaque point est déterminé par une variable angulaire θ. *Nous allons montrer qu'il existe une transformation continue*

(¹) Les définitions employées antérieurement doivent être convenablement modifiées.

de cet ensemble en lui-même, qui conserve l'ordre sur le cercle, et qui est analogue à une rotation d'un angle incommensurable avec 2π.

Inscrivons, en ordre de grandeur non croissante, les intervalles P_1P_2, P_3P_4, ... du cercle, à l'intérieur desquels il n'y a pas de point de l'ensemble P, mais dont les points extrêmes P_1, P_2, ... appartiennent à l'ensemble. Puis, choisissons un nombre irrationnel t, et écrivons les nombres

$$\frac{0}{1};\quad \frac{1}{1}t;\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}t,\quad -\frac{1}{2}t;\quad \ldots,$$

tels que dans le $n^{\text{ième}}$ groupe de nombres entrent seulement les nombres de la forme $\pm\frac{p}{q}\pm\frac{r}{s}t$ (p, q, r, s étant des entiers positifs ou nuls dont la somme est n) qui ne diffèrent pas par des nombres entiers de ceux des groupes déjà écrits. Nous représenterons cette série de nombres par les points mesurés par l'arc ψ d'un cercle (ψ) ayant une circonférence de longueur 1, sur lequel ces nombres donnent une série de points distincts.

Pour effectuer une correspondance entre ces nombres sur le cercle (ψ) et les intervalles du cercle (θ), nous procéderons comme il suit : nous choisissons le nombre 0 pour correspondre à P_1P_2; le nombre t qui vient ensuite correspondra à P_3P_4; le nombre $\frac{1}{2}$ correspondra au premier des intervalles suivants P_iP_{i+1}, qui est tel que les intervalles P_1P_2, P_3P_4, P_iP_{i+1} soient dans le même ordre sur le cercle (θ) que les points 0, t, $\frac{1}{2}$ sur le cercle (ψ); de même, le nombre $\frac{1}{2}t$ correspondra au premier intervalle P_jP_{j+1}, non déjà choisi, qui est tel que les intervalles P_1P_2, P_3P_4, P_iP_{i+1}, P_jP_{j+1} soient dans le même ordre que 0, t, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}t$, et ainsi de suite.

Ainsi une correspondance ordonnée entre les nombres et *tous* les intervalles est établie. En effet, si tous les intervalles n'étaient pas choisis, il y aurait un premier intervalle non choisi $P_\alpha P_{\alpha+1}$; mais cet intervalle est certainement le plus grand de ceux qui sont situés entre deux certains intervalles choisis après que les précédents l'ont été, et, par conséquent, il sera choisi lorsqu'il apparaîtra un nombre ψ entre les nombres correspondant à ces deux intervalles.

Le point o, sur le cercle (ψ), joint à un point quelconque qui n'est pas de la forme $\pm \frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} t$, établit une séparation des points de cette forme en deux ensembles ordonnés, ceux d'une classe précédant ceux de l'autre. Sur le cercle (θ), nous avons d'une façon correspondante une séparation en deux ensembles d'intervalles $P_i P_{i+1}$, reliés de la même manière, et, par suite, définissant un point-limite unique de l'ensemble parfait. Ainsi une correspondance ordonnée et biunivoque est établie entre, d'une part, *tous* les points du cercle (ψ) et, d'autre part, les couples de points $P_i P_{i+1}$, joints aux points P restants.

La transformation $\psi' = \psi + t$ transforme l'ensemble des points

$$\pm \frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} t$$

du cercle (ψ) en lui-même, et transforme ainsi l'ensemble parfait du cercle (θ) en lui-même, de manière que tout couple $P_i P_{i+1}$, se transforme en un certain couple déterminé $P_j P_{j+1}$, et que tout autre point de l'ensemble parfait primitif vient en un point transformé qui n'est pas P_1, P_2, ...

Cette transformation conserve l'ordre circulaire sur le cercle (θ), puisqu'elle le conserve sur le cercle (ψ). Ainsi, si nous regardons P_i comme allant en P_j, et P_{i+1} comme allant en P_{j+1}, nous avons défini une transformation continue biunivoque de l'ensemble parfait en lui-même, qui conserve l'ordre des points P et qui est du type indiqué au début.

En outre, si nous convenons qu'un point du cercle (θ) situé entre P_i et P_{i+1} est transformé dans le point semblablement placé entre P_j et P_{j+1}, nous avons défini une transformation continue biunivoque $\theta' = f(\theta)$ de *tous* les points du cercle (θ), conservant l'ordre, et transformant les points P d'un ensemble parfait, nulle part dense, en eux-mêmes.

Cette transformation a de plus la propriété que les puissances de la transformation et de son inverse amènent tout point de l'ensemble dans le voisinage infinitésimal de n'importe quel autre point de l'ensemble. Ce dernier fait devient évident, si l'on se rappelle que, sur le cercle (ψ), un point ψ_0 vient dans un ensemble de points $\psi_0 + mt$ partout dense, au moyen de la transformation $\psi' = \psi + t$ répétée m fois.

VII. — Exemple d'un mouvement récurrent discontinu.

Nous pouvons maintenant chercher à obtenir un système dynamique qui admette un mouvement récurrent discontinu. Prenons une ligne droite l fixe, dans l'espace à trois dimensions dans lequel les courbes représentatives du mouvement doivent être définies, et soit φ l'angle qu'un plan variable contenant l fait avec un plan fixe quelconque contenant l. Soient o et o' les traces sur ce plan variable d'un cercle dont le centre est un point de l, et qui est situé dans un plan perpendiculaire à l.

Construisons, dans ce plan variable, le système des cercles coaxiaux admettant l comme axe radical et dont o et o' sont les cercles de rayon nul, et construisons aussi le système des cercles orthogonaux qui passent par o et o'.

Un point P du plan variable, non situé sur l, est déterminé par la distance r de o au point où le cercle du premier système passant en P rencontre oo' prolongée, et par l'angle θ, sous lequel le cercle du deuxième système passant par le point rencontre la ligne droite oo'.

Si ces coordonnées r, θ, φ sont prises comme coordonnées cylindriques dans un second espace (r, θ, φ), tous les points du premier, sauf ceux de l, correspondront d'une manière biunivoque et continue aux points de la région indéfinie située entre les plans parallèles $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$.

Nous allons d'abord définir la courbe représentative d'un mouvament récurrent discontinu, et à cet effet nous ferons usage de l'espace (r, θ, φ).

Choisissons une transformation $\theta' = f(\theta)$ du type indiqué dans le précédent paragraphe. Cette transformation peut être regardée comme transformant tout point P du cercle $r = 1$, $\varphi = 0$, sur le cylindre $r = 1$, en un point P', distinct de P sur le cercle. Si maintenant nous développons la portion de la surface du cylindre qui se trouve entre $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, sur une bande indéfinie dans un plan (θ, φ), nous pouvons construire un ensemble de courbes PRQ_r en joignant chaque point P sur la ligne $\varphi = 0$ au point Q de la ligne $\varphi = 2\pi$ situé vis-à-vis du point P', la ligne PRQ étant composée de deux arcs égaux PR, RQ; de deux cercles égaux, orthogonaux respectivement à $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, et tangents en R. Les courbes PRQ remplissent la bande, et par suite la surface du cylindre; en tout point il passe une de ces courbes, et la direction de la tangente à ces courbes varie continuement.

Dans l'espace primitif, les courbes PRQ représentent un ensemble de courbes recouvrant une fois la surface du tore $r = 1$ et ayant partout une tangente qui varie continuement, puisque toutes les courbes PRQ ont une seule et même direction de tangente pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$.

Considérons une courbe PRQ, dans laquelle P correspond à un point de l'ensemble parfait nulle part dense que $\theta' = f(\theta)$ laisse invariant. Le point Q est par construction opposé à P′, transformé de P, et par suite P′R′Q′ représente un arc sur le tore qui est la continuation de l'arc représenté par PRQ. Par une suite de semblables raisonnements, nous concluons que la courbe complète correspondante Σ sur le tore est représentée par la totalité des arcs $P^{(n)}R^{(n)}Q^{(n)}$, où $P^{(n)}$ se déduit de P par la répétition de la transformation $\theta' = f(\theta)$ et de son inverse.

Mais nous avons vu que cette transformation ou son inverse amène P dans le voisinage infinitésimal de tout point de l'ensemble parfait invariant. Par suite si la courbe Σ est décrite avec une vitesse qui fait croître φ avec une vitesse constante v, l'ensemble des points-limites alpha et oméga du mouvement obtenu se compose de toutes les courbes représentées par un arc PRQ, où P est un point de l'ensemble parfait, et, en particulier, il comprendra tous les points de Σ elle-même.

Puisque cet ensemble de points-limites est le même quelle que soit la courbe Σ que nous choisissons, l'ensemble de mouvements est minimal, et Σ *correspond à un mouvement récurrent discontinu*.

Il reste à définir un ensemble continu de mouvements qui comprenne l'ensemble Σ.

Pour obtenir tous ces mouvements, nous retournons à l'espace (r, θ, φ) et nous déplaçons un plan $\varphi = c$ de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$, avec une vitesse uniforme v. Le mouvement d'un point de ce plan sera parfaitement déterminé, si l'on convient :

1° Que la ligne radiale $\theta = c$ de ce point dans le plan mobile ne cesse pas de rencontrer une seule et même courbe PRQ sur le cylindre $r = 1$;

2° Que sa vitesse radiale $\frac{dr}{dt}$ est donnée par $r[\alpha^2 + (1 - r)^2]$, où α est le plus petit des angles que fait la ligne radiale avec toutes les lignes radiales du même plan $\varphi = c$, qui rencontrent l'image PRQ d'une courbe Σ.

Ainsi, nous déterminons $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{dr}{dt}$ comme des fonctions continues de la position du point, qui ont la même valeur en deux points opposés dans les plans $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$. La vitesse radiale est nulle pour $r = 0$ et aussi pour les points du cylindre $r = 1$ qui se trouvent sur l'image d'une courbe Σ, puisqu'alors $\alpha = 0$.

Les courbes correspondantes dans l'espace primitif ont une direction de tangente qui varie d'une manière continue partout excepté sur l. Par suite, elles représentent les mouvements donnés par un système d'équations (1) pour $n = 3$, dans lesquelles x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées rectangulaires d'un point, et les fonctions X_1, X_2, X_3 sont continues, mais non analytiques. Les points singuliers S sont les points de l, auxquels X_1, X_2, X_3 sont discontinues, et il n'y a pas de points E.

Tous les énoncés donnés dans ce Mémoire s'appliquent à un tel système, pourvu que les conditions initiales déterminent le mouvement d'une manière unique, comme c'est ici le cas.

Les courbes Σ, évidemment, donnent précisément les mouvements récurrents discontinus préalablement construits. Pareillement, la courbe $r = 0$ correspond à un mouvement récurrent périodique.

En outre, il ne peut y avoir d'autres mouvements récurrents, puisque le r de tout point, qui n'est pas sur $r = 0$ ou sur une courbe Σ, croît constamment. En particulier, il n'y a pas de mouvements périodiques dans le voisinage infinitésimal d'un mouvement Σ.