

BULLETIN DE LA S. M. F.

H. VILLAT

**Sur les mouvements (à la Helmholtz) d'un
liquide dans un canal symétrique**

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 266-304

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__266_0

© Bulletin de la S. M. F., 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES MOUVEMENTS (A LA HELMHOLTZ) D'UN LIQUIDE
DANS UN CANAL SYMÉTRIQUE ;

PAR M. HENRI VILLAT.

Introduction. — Dans un Mémoire publié aux *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* ⁽¹⁾, M. U. Cisotti a étudié le mouvement permanent d'un solide dans un canal rectiligne indéfini, au cas où le solide (et le mouvement) sont doués de symétrie par rapport à l'axe du canal, et où le fluide, incompressible et irrotationnel, est animé d'un mouvement discontinu à la Helmholtz, avec sillage à l'arrière du corps. Ce problème est alors identique à celui du mouvement permanent discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle fixe (symétrique).

Je me propose d'abord dans ce qui suit de compléter sur un point les élégants résultats de M. Cisotti, en établissant une formule générale propre à déterminer la solution du problème posé, dans le cas où la forme du solide mobile (ou de l'obstacle fixe) est donnée à l'avance. La fonction arbitraire que j'introduis à cet effet dans les calculs jouit de propriétés caractéristiques qui peuvent s'énoncer immédiatement, et qui appartiennent également à toutes les fonctions correspondant à des solides dont le contour a même allure. De la sorte, on sait exactement où il faut chercher la solution du problème pour un obstacle donné ; et, si la solution rigoureuse dépend de l'intégration d'une équation fonctionnelle inabordable en l'état actuel de nos connaissances ⁽²⁾, il devient du moins possible d'en approcher pratiquement aussi près que l'on veut.

J'ai indiqué le détail d'un exemple particulier, pour un obstacle

⁽¹⁾ U. CISOTTI, *Sul moto di un solido in un canale* (R. C. del Circolo di Palermo, 2^e semestre, 1909).

⁽²⁾ Cf. T. LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza* (R. C. Palermo, 1907). — H. VILLAT, *Sur la résistance des fluides* (Annales de l'Ecole normale sup., 1911). — *Sur le mouvement d'un solide donné* (Journal de Mathématiques, 1911).

ayant l'apparence d'une carène de navire, cas pratiquement le plus intéressant. On sait, comme M. M. Brillouin l'a montré dans plusieurs récentes publications ⁽¹⁾, que de multiples précautions sont à prendre pour que la solution analytique obtenue ne soit pas illusoire et réponde bien au problème d'Hydrodynamique posé, en restant dans le domaine de l'Hydrodynamique rationnelle tout au moins. Ces précautions nécessaires légitiment les calculs qui accompagnent l'exposé de l'exemple traité.

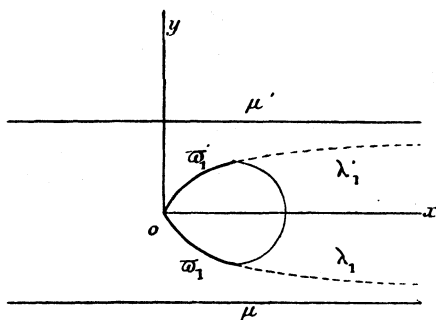
En terminant, j'indique une méthode très simple pour traiter le mouvement d'un fluide dans un canal de forme quelconque (mais symétrique) renfermant un obstacle également symétrique.

Les formules générales s'obtiennent presque immédiatement, pour déterminer le mouvement dans le cas où l'obstacle et les parois du canal ont une forme donnée. Elles se rattachent très intimement à celles que j'ai démontrées dans un travail antérieur (*Sur la résistance des fluides*) à propos du fluide indéfini.

Quelques-uns des résultats qui vont suivre ont fait l'objet d'une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 6 février 1911 (*Comptes rendus*, t. CLII, p. 303).

Rappel de quelques résultats. — Je commence par rappeler en quelques lignes les formules obtenues par M. Cisotti. Soient μ

Fig. 1.

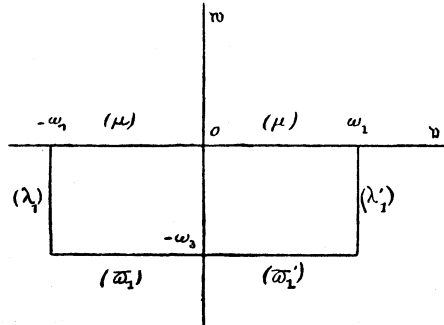


et μ' les parois du canal; ϖ_1 et ϖ_1' les portions du contour de

⁽¹⁾ M. BRILLOUIN, *Les surfaces de glissement d'Helmholtz* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 1911; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, décembre 1910, juillet 1911).

l'obstacle, en contact avec le liquide en mouvement ; λ_1 et λ'_1 les lignes de glissement séparant le liquide en mouvement du liquide formant sillage à l'arrière. M. Cisotti fait correspondre au champ occupé par le liquide en mouvement, dans le plan $z = x + iy$, l'aire d'un rectangle (voir la fig. 2) ⁽¹⁾ d'un certain plan $u = v + iw$,

Fig. 2.



les frontières se correspondant comme l'indique le dessin ; d'ailleurs, à deux points du plan u symétriques par rapport à l'axe imaginaire, correspondent deux points du plan z , symétriques par rapport à l'axe du canal.

Les abscisses des bords verticaux du rectangle sont $\pm \omega_1$, et l'ordonnée du bord horizontal inférieur est $-\omega_3$; ω_1 et ω_3 désignant les deux demi-périodes (la première réelle, la seconde imaginaire pure) des fonctions elliptiques, au moyen desquelles on a effectué la représentation conforme ⁽²⁾. ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont > 0 .

Tous les éléments géométriques et cinématiques du mouvement

⁽¹⁾ Je rectifie ici une légère inadvertance de M. Cisotti, qui introduit le rectangle symétrique du nôtre par rapport à l'axe ou , ce qui rend impossible la représentation conforme. Il est facile de voir qu'il faut en conséquence changer le signe de la fonction $t_0(u)$ (*loc. cit.* § 12) et changer en $-\omega_3$ la limite inférieure de certaines intégrales définies figurant au paragraphe 13.

⁽²⁾ M. Cisotti désigne ces mêmes demi-périodes par ω et $i\omega'$; nous avons introduit la notation du texte dans le but de pouvoir plus facilement renvoyer aux tableaux de formules, si commodes, du *Traité des Fonctions elliptiques*, de MM. Tannery et Molk (Gauthier-Villars, 4 vol.).

peuvent être exprimés au moyen de la variable u , et d'une certaine fonction $t(u)$ de cette variable, assujettie aux conditions suivantes : elle doit être régulière et continue dans le rectangle considéré, contour compris, sauf peut-être pour $u = \omega_3$ qui correspond à la proue de l'obstacle ; réelle sur les bords verticaux, purement imaginaire sur l'axe réel. Si l'on pose

$$t(u) = \mathfrak{I} + i\tau,$$

$\mathfrak{I}$ et τ étant réels, le changement du signe de u change simplement le signe de $\mathfrak{I}$. Un point quelconque du plan du mouvement est fourni par la formule

$$(1) \quad z = x + iy = \int_{-\omega_3}^u e^{it} \frac{p'u}{e_1 - pu} du,$$

où l'intégration est supposée faite le long d'un chemin quelconque intérieur au rectangle ou empruntant ses bords. La vitesse de la molécule fluide placée en ce point est égale à $e^{\tau+i\mathfrak{I}}$ au sens vectoriel, c'est-à-dire que la valeur absolue de la vitesse est e^τ , et que $\mathfrak{I}$ est l'angle que fait cette vitesse avec l'axe Ox . En prenant l'intégrale précédente le long des bords du rectangle, en partant du point $-\omega_3$, on obtiendrait successivement les points des parois du solide immergé et les points des lignes de glissement. La résistance de l'obstacle et le coefficient de contraction (rapport des distances à une paroi du canal des deux points extrêmes, dont l'un est à l'infini, de la ligne de glissement voisine) sont alors déterminés au moyen d'une seule intégration, par des formules qu'on trouvera dans le Mémoire de M. Cisotti. La résistance s'interprète élégamment d'une manière géométrique : avec les unités choisies, elle est égale au rapport du carré de la demi-largeur asymptotique du sillage, à la demi-largeur du canal.

Toute la question revient donc, en définitive, à déterminer la fonction $t(u)$ qui correspond à un obstacle donné. M. Cisotti a déterminé cette fonction pour le cas d'un obstacle formé de deux lames rectilignes également inclinées sur l'axe du canal, et il a montré que le degré d'arbitraire de cette fonction pour tous les autres cas est celui d'une série de Laurent, dont un coefficient sur deux est arbitraire. Mais on ne sait rien jusqu'ici sur la façon dont

cette série de Laurent pourrait être reliée à la forme de l'obstacle.

Je vais établir une nouvelle formule qui nous donnera la fonction $t(u)$ d'une manière qui mette en évidence la forme de l'obstacle correspondant.

Cas d'un obstacle polygonal. — Nous utiliserons à cet effet la fonction particulière que nous allons former, et que nous désignerons par $t_1(u)$, relative à un obstacle polygonal. Nous ne nous occuperons pas dans ce calcul de l'impossibilité physique qui se présenterait en chaque sommet du polygone où celui-ci tournerait vers le fluide un angle saillant; cette difficulté sera levée plus tard *a posteriori*, dans le cas limite où nous voulons parvenir.

La fonction t_1 étant définie dans un rectangle, il est tout indiqué de chercher si l'on ne pourrait pas la représenter par une série trigonométrique, que nous écrirons sous la forme

$$t_1(u) = \sum_n ia_n \cos \frac{n\pi}{2\omega_1} u + \sum_n ib_n \sin \frac{n\pi}{2\omega_1} u,$$

les coefficients a_n et b_n étant réels, puisque t doit être imaginaire pure pour u réel.

Pour $u = \pm \omega_1 + i\omega$, t_1 doit être réel; on reconnaît de suite que cela entraîne $a_{2K} = b_{2K+1} = 0$. Enfin, le changement de signe de u ne doit altérer que le signe de la partie réelle de t_1 ; on en conclut facilement $b_{2K} = 0$, et il reste

$$(2) \quad t_1(u) = \sum_K ia_{2K+1} \cos \frac{(2K+1)\pi}{2\omega_1} u.$$

Il faut maintenant déterminer, si possible, les coefficients a_{2K+1} . A cet effet envisageons la partie réelle de t_1 sur le bord supérieur du rectangle, c'est-à-dire pour $u = -\omega_3 + v$. En posant

$$q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}} \quad (< 1),$$

un calcul élémentaire montre que la partie réelle de t_1 est

devenue

$$(3) \quad + \sum a_{2K+1} \frac{q^{\frac{2K+1}{2}} - q^{-\frac{2K+1}{2}}}{2} \sin \frac{(2K+1)\pi}{2\omega_1} v.$$

Or appelons $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$, les angles que font avec l'axe Ox les côtés successifs de la ligne polygonale qui constitue dans le cas actuel la paroi ϖ'_1 (les angles analogues relatifs à ϖ_1 sont les mêmes au signe près). Soient de plus $O, r_1, r_2, \dots, r_{N-1}, \omega_1$, les valeurs de v correspondant aux sommets successifs de ce même polygone. On en conclut alors que la partie réelle (3) de t_1 doit être égale à

$$\begin{aligned} & -\theta_N \quad \text{pour} \quad -\omega_1 < v < -r_{N-1}, \\ & \dots\dots\dots, \\ & -\theta_2 \quad \text{»} \quad -r_2 < v < -r_1, \\ & -\theta_1 \quad \text{»} \quad -r_1 < v < 0, \\ & +\theta_1 \quad \text{»} \quad 0 < v < r_1, \\ & \dots\dots\dots, \\ & +\theta_N \quad \text{»} \quad r_{N-1} < v < \omega_1. \end{aligned}$$

Mais, pour que la série trigonométrique (3) prenne justement ces mêmes valeurs dans les intervalles qu'on vient de dire, il suffit de calculer les coefficients par les formules d'Euler-Fourier, appliquées à l'intervalle $-\omega_1 + \omega_1$ de valeurs de v . On retrouve ainsi des valeurs nulles pour les coefficients a_{2K} , et il vient ainsi pour a_{2K+1}

$$\begin{aligned} a_{2K+1} = & + \frac{8}{(2K+1)\pi \left(q^{\frac{2K+1}{2}} - q^{-\frac{2K+1}{2}} \right)} \\ & \times \left\{ \theta_1 \left[1 - \cos \frac{(2K+1)\pi r_1}{2\omega_1} \right] \right. \\ & + \theta_2 \left[\cos \frac{(2K+1)\pi r_1}{2\omega_1} - \cos \frac{(2K+1)\pi r_2}{2\omega_1} \right] + \dots \\ & + \theta_p \left[\cos \frac{(2K+1)\pi r_{p-1}}{2\omega_1} - \cos \frac{(2K+1)\pi r_p}{2\omega_1} \right] + \dots \\ & \left. + \theta_N \cos \frac{(2K+1)\pi r_{N-1}}{2\omega_1} \right\}. \end{aligned}$$

Revenant à la formule (2) nous voyons que l'expression de t_1 est

la suivante

$$\begin{aligned}
 (4) \quad t_1(u) = & -\frac{8i}{\pi} \left\{ \theta_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)(1-q^{2k+1})} \right. \\
 & \times \left[\cos \frac{(2k+1)\pi u}{2\omega_1} - \cos \frac{(2k+1)\pi r_1}{2\omega_1} \cos \frac{(2k+1)\pi u}{2\omega_1} \right] + \dots \\
 & + \theta_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)(1-q^{2k+1})} \\
 & \times \left[\cos \frac{(2k+1)\pi r_{p-1}}{2\omega_1} \cos \frac{(2k+1)\pi u}{2\omega_1} \right. \\
 & \quad \left. - \cos \frac{(2k+1)\pi r_p}{2\omega_1} \cos \frac{(2k+1)\pi u}{2\omega_1} \right] + \dots \\
 & \left. + \theta_N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)(1-q^{2k+1})} \cos \frac{(2k+1)\pi r_{N-1}}{2\omega_1} \cos \frac{(2k+1)\pi u}{2\omega_1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Or, en utilisant toujours les fonctions elliptiques construites avec les demi-périodes ω_1 et ω_3 , et en tenant compte de la définition de celles-ci, définition entraînée par les formules ⁽¹⁾

$$(5) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{2a^2 - 1}{3}, \\ e_2 = \frac{2 - a^2}{3}, \\ e_3 = -\frac{1 + a^2}{3}; \end{cases}$$

on sait qu'on peut écrire ⁽²⁾

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2k+1}{2}}}{1-q^{2k+1}} \sin \frac{(2k+1)\pi u}{2\omega_1} = \frac{a\omega_1}{2\pi} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}$$

et par suite

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)(1-q^{2k+1})} \cos \frac{(2k+1)\pi u}{2\omega_1} = -\frac{a}{4} \int_{\omega_1}^u \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du,$$

⁽¹⁾ Cf. CISOTTI, *loc. cit.*, form. (27).

⁽²⁾ Cf. HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 431; et CISOTTI, paragraphe 12.

en observant que les deux membres s'annulent pour $u = \omega_1$. De là on conclut sans difficulté

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \sum \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \cos \frac{(2K+1)\pi r_p}{2\omega_1} \cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} \\
 &= \sum \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \\
 & \quad \times \left[\cos \frac{(2K+1)\pi(u+r_p)}{2\omega_1} + \cos \frac{(2K+1)\pi(u-r_p)}{2\omega_1} \right] \\
 &= -\frac{a}{8} \int_{\omega_1}^{u+r_p} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du - \frac{a}{8} \int_{\omega_1}^{u-r_p} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du.
 \end{aligned}$$

Comme nous le verrons plus loin, les quadratures subsistant dans ces dernières formules peuvent s'effectuer; mais la simplification résultant de là, très importante pour un paragraphe ultérieur, ne fournit pour le calcul que je veux faire aucun avantage.

Quoi qu'il en soit, on peut maintenant mettre le coefficient de θ_p dans l'expression de t_1 sous la forme

$$+ \frac{ai}{\pi} [\Phi(u+r_{p-1}) + \Phi(u-r_{p-1}) - \Phi(u+r_p) - \Phi(u-r_p)],$$

où $\Phi(u)$ désigne la fonction

$$(9) \quad \Phi(u) = \int_{\omega_1}^u \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du.$$

Le coefficient de θ_1 est de même

$$+ \frac{ai}{\pi} [2\Phi(u) - \Phi(u+r_1) - \Phi(u-r_1)].$$

Quant au coefficient de θ_N , il est

$$+ \frac{ai}{\pi} [\Phi(u+r_{N-1}) + \Phi(u-r_{N-1})],$$

que je puis encore écrire

$$+ \frac{ai}{\pi} [\Phi(u+r_{N-1}) + \Phi(u-r_{N-1}) - \Phi(u+\omega_1) - \Phi(u-\omega_1)].$$

Je dis qu'on a en effet

$$(10) \quad \Phi(u+\omega_1) + \Phi(u-\omega_1) = 0.$$

c'est-à-dire de

$$(r_p - r_{p-1}) \frac{\sigma(u + r_p)}{\sigma_3(u + r_p)} - (r_p - r_{p-1}) \frac{\sigma(u - r_p)}{\sigma_3(u - r_p)},$$

on en conclut que l'expression (11) de t_1 constitue, pour N grand, une évaluation approchée de l'intégrale suivante (qui sera, par suite, la limite de la fonction t_1 dans les conditions énoncées),

$$(12) \quad t(u) = -\frac{ai}{\pi} \int_0^{\omega_1} \left[\frac{\sigma(u+r)}{\sigma_3(u+r)} - \frac{\sigma(u-r)}{\sigma_3(u-r)} \right] \varphi(r) dr.$$

Cette formule est susceptible de recevoir différentes formes; elle peut s'écrire

$$t(u) = -\frac{ai}{\pi} \int_0^{\omega_1} [\xi_{03}(u+r) - \xi_{03}(u-r)] \varphi(r) dr,$$

puis, en utilisant la relation (Cf. TANNERY et MOLK, LXV, 3)

$$\xi_{03}(u+r) - \xi_{03}(u-r) = \frac{2 \xi_{03} r \xi_{13} u \xi_{23} u}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \xi_{03}^2 r \xi_{03}^2 u},$$

il vient

$$(13) \quad t(u) = -\frac{2ai}{\pi} \xi_{13} u \xi_{23} u \int_0^{\omega_1} \frac{\xi_{03} r \varphi(r)}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \xi_{03}^2 r \xi_{03}^2 u} dr$$

ou

$$(13') \quad t(u) = -\frac{2ai}{\pi} \frac{\sigma_1 u \sigma_2 u}{(\sigma_3 u)^2} \int_0^{\omega_1} \frac{\frac{\sigma r}{\sigma_3 r} \varphi(r)}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \left(\frac{\sigma r}{\sigma_3 r} \right)^2 \left(\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \right)^2} dr.$$

Il faudrait maintenant faire voir que le procédé employé, par passage à la limite, est légitime et que la fonction $t(u)$ représentée par la formule précédente résout bien le problème posé, pour un obstacle répondant à une fonction $\varphi(r)$ supposée donnée. Les démonstrations nécessaires se conduisant exactement de la même façon que celles que j'ai indiquées dans un autre Mémoire ⁽¹⁾, sans qu'il se présente ici de difficultés nouvelles, je me contenterai d'énoncer les résultats, renvoyant, pour la marche des calculs, au Mémoire cité.

⁽¹⁾ H. VILLAT, *Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1^{er} semestre 1912).

Si la fonction $\varphi(r)$ est continue lorsque r varie de 0 à ω_1 , la formule (13) définit une fonction de $\mathfrak{u}$ uniforme et régulière dans tout le rectangle du plan $\mathfrak{u}$ indiqué dans la figure 2. Bien que la formule (13) en question ne soit pas directement applicable lorsque le point $\mathfrak{u}$ est situé sur le bord inférieur de ce rectangle, on peut démontrer que la fonction $t(\mathfrak{u})$ est partout continue, sauf en général pour $\mathfrak{u} = -\omega_3$, et que sa partie réelle tend vers $\varphi(r)$ ou $-\varphi(r)$ lorsque le point $\mathfrak{u}$ situé dans le rectangle tend vers le point $r - \omega_3$ ou $-r - \omega_3$ du bord. Cette partie réelle tend vers zéro quand on s'approche de l'axe réel, et la partie imaginaire tend vers zéro quand on s'approche des bords verticaux. La formule (13) fournit donc une fonction $t(\mathfrak{u})$ satisfaisant à toutes les conditions requises.

Si, maintenant, on observe que la façon dont varie $\varphi(r)$ lorsque r varie de 0 à ω_1 , est intimement reliée à la forme de la paroi $\mathfrak{w}'_1$, on en conclut que cette formule (13) permet de résoudre, pour un obstacle de forme donnée à l'avance, le problème d'Hydrodynamique posé; il suffira en effet de savoir le sens de la variation de la tangente à la paroi $\mathfrak{w}'_1$ de l'obstacle, et les limites de cette variation, pour en déduire immédiatement les propriétés correspondantes de la fonction $\varphi(r)$; ces propriétés caractériseront d'ailleurs les fonctions $\varphi(r)$ fournissant des obstacles dont la paroi ait la même allure. Parmi les fonctions $\varphi(r)$ ainsi définies, il sera toujours possible d'en choisir une de telle manière que l'obstacle résultant diffère aussi peu que l'on voudra d'un obstacle donné (par exemple graphiquement).

Notons en passant que la formule (13) fait connaître l'intégrale générale du mouvement d'un solide symétrique dans un canal rectiligne, sous une forme où la fonction arbitraire $\varphi(r)$ dont la question dépend est nettement en évidence.

On sait, du reste, que certaines conditions doivent être remplies par cette arbitraire $\varphi(r)$, pour que la solution obtenue ne soit pas illusoire (*Cf.* BRILLOUIN, *loc. cit.*). Pour qu'il ne se présente aucune impossibilité, il est nécessaire et suffisant :

1° Que nulle part dans le fluide la vitesse ne devienne plus grande que 1, valeur limite qu'elle atteint le long des lignes de glissement λ_1 et λ'_1 (condition imposée par la considération des pressions);

2° Que les lignes qui limitent, dans le plan z , le domaine occupé par le fluide en mouvement d'Helmholtz, ne se coupent pas elles-mêmes, ni les unes les autres (condition nécessaire et suffisante pour que les représentations conformes effectuées soient bien telles que la méthode les a supposées initialement, c'est-à-dire qu'elle fasse correspondre les domaines des plans z et u d'une façon biunivoque. Le sens physique de cette nécessité est d'ailleurs évident).

Ces remarques étant faites, nous allons nous attacher à l'étude détaillée d'un cas particulier qui fournira le premier exemple connu relatif à un obstacle courbe.

Auparavant, il nous faut développer quelques calculs qui nous seront indispensables, relatifs à la fonction $\Phi(u)$ introduite dans le précédent paragraphe, ce qui nous ramènera un instant sur le problème de Réthy-Bobyleff dans le canal; on voit, en effet, que si le polygone considéré se réduit à un ensemble de deux lames rectilignes faisant Ox respectivement les angles $\pm \theta_1$, la fonction t_0 correspondante sera fournie par la formule (11) dans laquelle on fera

$$\theta_2 = \dots = \theta_p = \dots = \theta_N = 0, \quad r_1 = \omega_1,$$

et, en vertu de (10), il restera dans ces conditions

$$(14) \quad t_0(u) = + \frac{2ai}{\pi} \theta_1 \Phi(u),$$

et la fonction t_0 est alors bien celle qui résout le problème susdit.

Calcul de $\Phi(u)$. — On peut faire disparaître le signe d'intégration qui figure dans cette fonction $\Phi(u)$, de différentes manières; en voici une bien simple.

On sait qu'on a (Cf. TANNERY et MOLK, t. I, p. 189)

$$p'u = -2 \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \frac{\sigma_3 u}{\sigma u};$$

par conséquent, en remplaçant $\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$ par sa définition $\sqrt{pu - e_\alpha}$, il vient

$$\Phi(u) = \int_{\omega_1}^u \frac{-p'u \, du}{2 \sqrt{pu - e_1} \sqrt{pu - e_2} (pu - e_3)},$$

c'est-à-dire, en posant $X = pu$,

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2} \int_{e_1}^X \frac{dX}{\sqrt{X-e_1} \sqrt{X-e_2} (X-e_3)}.$$

En posant encore

$$\frac{X-e_1}{X-e_2} = Y^2,$$

ceci se transforme très aisément en l'expression

$$\Phi(u) = \int_0^Y \frac{dY}{(e_2-e_3) Y^2 - (e_1-e_3)},$$

c'est-à-dire

$$(15) \quad \Phi(u) = \frac{1}{2\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}} \log \frac{1 - Y \frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}}{1 + Y \frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}}.$$

Revenant à la variable u , et observant qu'on a

$$\begin{aligned} e_1 - e_3 &= a^2, \\ e_2 - e_3 &= 1 \end{aligned}$$

et, par suite ($\sqrt{e_2-e_3}$ est négatif avec les notations adoptées;
Cf. TANNERY et MOLK, t. I, p. 202),

$$(16) \quad \begin{cases} \sqrt{e_1-e_3} = a, \\ \sqrt{e_2-e_3} = -1; \end{cases}$$

il vient enfin pour $\Phi(u)$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2a} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} - \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}}{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} + \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}}$$

ou encore

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2a} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} - \xi_{12} u}{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} + \xi_{12} u}.$$

Par suite, la fonction $t_0(u)$ qui convient au problème de

Bobyleff est

$$(17) \quad t_0(u) = -\frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} - \xi_{12}u}{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} + \xi_{12}u} = -\frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3}{-\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3}.$$

La détermination qu'il faut prendre pour le logarithme est, comme cela résulte des calculs faits ci-dessus, celle dont la partie imaginaire s'annule pour $u = 0$; on voit bien qu'alors $t_0(u)$ est imaginaire pure, si le point u décrit le côté du rectangle situé sur l'axe réel, et il n'est pas malaisé de vérifier, *a posteriori*, les propriétés de cette fonction $t_0(u)$; nous laisserons cette vérification de côté, pour nous attacher à l'établissement de ce fait, que la solution fournie par $t_0(u)$ est effectivement acceptable, du point de vue hydrodynamique. Il est clair du reste que ce fait est bien probable; sa démonstration nous permettra d'obtenir certains résultats qui nous seront plus loin très utiles.

Voyons d'abord ce qui concerne le champ du plan z , occupé par le liquide en mouvement; ce champ sera d'un seul tenant, comme cela va résulter du sens de la variation de l'angle $\mathfrak{S}$ (du courant avec l'axe des x), le long de la ligne libre λ'_1 , par exemple.

Il nous faut, à cet effet, calculer la partie réelle de $t_0(u)$ pour

$$u = \omega_1 - h \quad \left(0 < \frac{h}{i} < \frac{\omega_3}{i}\right).$$

Or on a (TANNERY et MOLK, LX, 4)

$$\xi_{12}(\omega_1 - h) = -\sqrt{e_1 - e_3} \xi_{03}(-h) = \sqrt{e_1 - e_3} \xi_{03}(h),$$

et, par suite, il vient

$$(18) \quad t_0(\omega_1 - h) = \frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03}(h)}{1 - \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03}(h)}.$$

Faisons varier h de 0 à ω_3 , c'est-à-dire $\xi_{03}(h)$ de 0 à l'infini, [$\xi_{03}(h)$ reste alors imaginaire pure avec un coefficient de i positif; Cf. TANNERY et MOLK, t. II, p. 176 et 188]. Donc, en se rappelant que $\sqrt{e_2 - e_3}$ est négatif, $t_0(\omega_1 - h)$ est de la forme

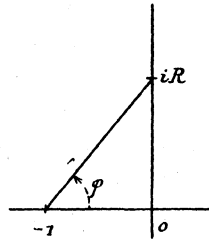
$$t_0(\omega_1 - h) = \frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 - iR}{1 + iR},$$

où la quantité R réelle varie en croissant de 0 à $+\infty$. Mais on se rend facilement compte que, si l'on fait décrire au point iR l'axe imaginaire à partir de l'origine, on a, à chaque instant (voir la figure 3),

$$\log \frac{1-iR}{1+iR} = -2i\varphi,$$

φ désignant l'angle indiqué, nul si le point iR est en 0. Par suite,

Fig. 3.

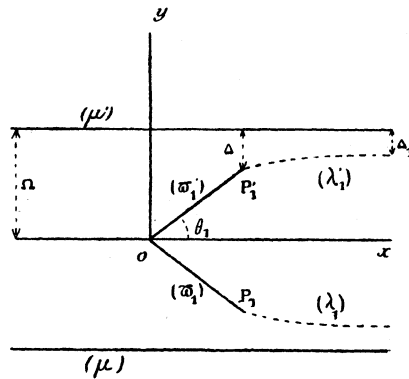


$t_0(\omega_1 - h)$, qui est réel et égal à l'angle $\mathfrak{S}$, que nous voulons évaluer, est

$$(19) \quad \mathfrak{S} = t_0(\omega_1 - h) = \frac{2\theta_1}{\pi} \varphi,$$

et il varie de 0 à θ_1 , en croissant constamment, dans les conditions

Fig. 4.



indiquées. Or, dans ces mêmes conditions, le point z décrit la ligne de glissement λ'_1 , en partant de l'infini pour venir rejoindre la

paroi π'_1 . L'allure de cette ligne est donc bien telle que le champ du plan z occupé par le liquide soit d'un seul tenant. (La ligne λ'_1 ne recoupe évidemment pas la paroi μ' , dont elle reste à une distance asymptotique connue, égale à π avec les unités choisies.)

La seconde difficulté à étudier concerne les vitesses dans le fluide, vitesses qui ne doivent nulle part dépasser la limite 1, ce qui revient à dire que le coefficient de i dans $t_0(u)$ ne doit nulle part être positif; son maximum doit être zéro. Comme ce coefficient τ est harmonique et régulier dans le rectangle de la figure 2, son maximum ne peut être atteint que sur les bords; or τ est nul sur les bords verticaux du rectangle; il suffit donc de prouver qu'il ne peut devenir positif sur les bords horizontaux, c'est-à-dire pour

$$u = v \quad \text{ou} \quad u = -\omega_3 + v \quad (0 < v < \omega_1).$$

Pour $u = v$ ($0 < v < \omega_1$), $\xi_{12}v$ varie de 1 à 0 en décroissant, et

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - \xi_{12}v}{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + \xi_{12}v} \\ \text{varie de } & \frac{-\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + 1}{-\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - 1} (> 1) \text{ à } 1 \text{ en décroissant; donc} \\ & \log \frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - \xi_{12}v}{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + \xi_{12}v} \end{aligned}$$

est réel et positif, et $t_0(v)$ reste imaginaire pure avec un coefficient de i négatif.

Pour $u = -\omega_3 + v$ ($0 < v < \omega_1$), on a (Cf. TANNERY et MOLK, LX, 4)

$$\xi_{12}(-\omega_3 + v) = -\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} \xi_{21}v,$$

et, par suite, $t_0(u)$ devient

$$t_0(-\omega_3 + v) = -\frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 + \xi_{21}v}{1 - \xi_{21}v},$$

ce qu'on met aisément sous la forme

$$(20) \quad t_0(-\omega_3 + v) = \theta_1 - i \frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1}.$$

Le coefficient de i est ici

$$- \frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1},$$

et il est visiblement toujours négatif, $\xi_{21} v$ variant entre 1 et l'infini (> 0).

Notre assertion est donc complètement légitimée ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Il est intéressant de constater que, pour les calculs pratiques, la présence des fonctions elliptiques ne complique en rien les opérations, et qu'en utilisant les formules générales, pour ce problème de Bobyleff actuel, on retombera sur les calculs mêmes auxquels M. Cisotti a été conduit par la méthode indiquée à la fin de son Mémoire (§ 45).

On sait que la résistance de l'obstacle et le coefficient de contraction seront déterminés, dès qu'on connaîtra les longueurs Ω , Δ_1 et Δ (ou OP'_1) de la figure. Or par convention (choix de l'unité de longueur) on a $\Delta_1 = \pi$. Puis le régime étant permanent, il faut que le débit soit le même en aval et en amont, d'où $\Omega V_\infty = \pi$, en appelant V_∞ la vitesse en amont à l'infini, donnée par $V_\infty = e^\tau$ (pour $u = 0$), c'est-à-dire ici

$$V_\infty = e \quad - \frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1}} - 1}{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1}} + 1} = \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^{-\frac{\theta_1}{\pi}} = \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^{\frac{\theta_1}{\pi}}.$$

Il ne reste donc à calculer que OP'_1 , lequel est donné [formule (1)] par

$$OP'_1 = \int_{\varpi'_1} d\varpi'_1 = \int_{\varpi'_1} |dz| = \int_0^{+\omega_1} e^{-\tau} \frac{p'(-\omega_3 + v)}{e_1 - p(-\omega_3 + v)} dv.$$

On a calculé, il y a un instant, la valeur de τ sur le bord inférieur du rectangle [formule (20)], d'où il résulte

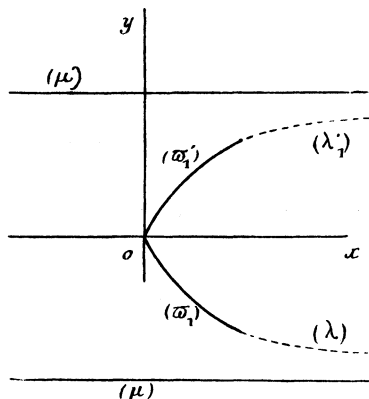
$$OP'_1 = \int_0^{\omega_1} \left(\frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} \right)^{\frac{\theta_1}{\pi}} \frac{p'(-\omega_3 + v)}{e_1 - p(-\omega_3 + v)} dv.$$

On va tout exprimer dans cette formule, au moyen des fonctions ξ . On a d'abord (TANNERY et MOLK, LXIII, 5)

$$\frac{p'u}{e_1 - pu} = 2 \xi_{30} u \xi_{21} u,$$

Étude d'un obstacle particulier. — Proposons-nous d'appliquer les généralités qui ont été exposées ci-dessus, au cas particulier d'un obstacle ayant la forme indiquée figure 5.

Fig. 5.



La fonction $\varphi(r)$ intervenant dans la formule générale (13)

puis (TANNERY et MOLK, t. LX, p. 4)

$$\begin{aligned} \frac{p'(-\omega_3 + v)}{e_1 - p(-\omega_3 + v)} &= 2\xi_{30}(-\omega_3 + v)\xi_{21}(-\omega_3 + v) \\ &= 2(-\sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}\xi_{03}v) \left(-\frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}\xi_{12}v \right). \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant (16),

$$OP'_1 = 2 \int_0^{\omega_1} \left(\frac{\xi_{21}v + 1}{\xi_{21}v - 1} \right)^{\frac{\theta_1}{\pi}} \xi_{03}v \xi_{12}v \, dv.$$

Posons, s étant la variable que nous voulons garder,

$$\frac{\xi_{21}v + 1}{\xi_{21}v - 1} = s$$

et (TANNERY et MOLK, LXI, 3)

$$ds = -\frac{2}{(\xi_{21}v - 1)^2} \xi'_{21}v \, dv = \frac{2(e_2 - e_1)\xi_{01}v\xi_{31}v}{(\xi_{21}v - 1)^2} dv.$$

Il vient

$$OP'_1 = 4 \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1} \int_{\infty}^1 s^{\frac{\theta_1}{\pi}} \frac{ds}{(s - 1)^2} \frac{\xi_{03}v\xi_{12}v}{\xi_{01}v\xi_{31}v}.$$

Puis on a (TANNERY et MOLK, LIX, 2, 5)

$$\frac{\xi_{03}v\xi_{12}v}{\xi_{01}v\xi_{31}v} = \frac{1}{\xi_{21}} (\xi_{13})^2$$

devra, dans ces conditions, être positive, décroissante lorsque r varie de 0 à ω_1 ; les limites de $\varphi(r)$ devront être comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Posons

$$(21) \quad \varphi(r) = P \xi_{23} r,$$

P étant une constante positive. On a (TANNERY et MOLK, LXI, 3)

$$\varphi'(r) = -P(e_2 - e_3) \xi_{03} r \xi_{13} r,$$

et les fonctions $\xi_{03} r$ et $\xi_{13} r$ sont positives entre 0 et ω_1 ; par conséquent, $\varphi(r)$ définie par la formule (21) est positive décroissante; ses valeurs limites étant dans cet intervalle

$$P \quad \text{et} \quad P \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

il suffira de prendre la constante P , inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

et

$$e_1 + \frac{e_2 - e_1}{1 - \xi_{21}^2} = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{1 - \xi_{13}^2},$$

donc

$$\xi_{13}^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_2 - e_1 + (e_1 - e_3)(1 - \xi_{21}^2)}.$$

Par suite le quotient $\frac{\xi_{03} v \xi_{12} v}{\xi_{21} v \xi_{31} v}$ s'exprime rationnellement au moyen de $\xi_{21} v$, c'est-à-dire de s , et l'on trouve ainsi, après réductions faciles,

$$OP'_1 = 4 \int_1^\infty \frac{\frac{\theta_1}{s^\pi} ds}{(s+1) [a^2(s+1)^2 - (s-1)^2]}.$$

Cette intégrale est exactement de la forme de celle à laquelle on parvient dans le Mémoire cité (U. CISOTTI, § 15). Comme à cet endroit, on constate qu'elle s'exprime simplement au moyen de la fonction

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\omega t^{x-1}}{\omega t - 1} dt,$$

où ω désigne une constante.

Tous les éléments géométriques du mouvement sont alors connus relativement au problème en question; le coefficient de contraction est maintenant

$$\frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi}{\Omega - OP'_1 \sin \theta_1},$$

et la résistance de l'obstacle est $\frac{(\Omega - \pi)^2}{\Omega}$, d'après le théorème de M. Cisotti.

Observons, en passant, qu'en n'astreignant P qu'à être inférieur à π , les obstacles qui correspondraient à la même fonction posséderaient l'une des formes ci-dessous, selon la valeur de P par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

Il nous faut maintenant calculer la fonction $t(u)$, donnée ici par

$$(22) \quad t(u) = -\frac{2ai}{\pi} \xi_{13} u \xi_{23} u \int_0^{\omega_1} \frac{P \xi_{23} r \xi_{03} r}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \xi_{03}^2 u \xi_{03}^2 r} dr.$$

Cette intégration s'effectue d'une manière élégante; on a (TANNERY et MOLL, LXI, 3)

$$\begin{aligned} & -(e_1 - e_3) \xi_{03} r \xi_{23} r = \xi'_{13} \\ \text{et (Id., LIX, 6)} \quad & \xi_{03}^2 r = \frac{1 - \xi_{13}^2 r}{e_1 - e_3}. \end{aligned}$$

Donc, il vient

$$t(u) = \frac{2Pai}{\pi(e_1 - e_3)} \xi_{13} u \xi_{23} u \int_0^{\omega_1} \frac{\xi'_{13} r dr}{1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u (1 - \xi_{13}^2 r)}.$$

La vraie variable est alors évidemment

$$\xi_{13} r = Z,$$

qui varie entre 1 et 0; donc, en tenant compte de (16),

$$t(u) = -\frac{2Pi}{a\pi} \frac{\xi_{13} u \xi_{23} u}{\xi_{03}^2} \int_0^1 \frac{dZ}{Z^2 + \frac{1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u}{(e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u}},$$

Mais on a, toujours en tenant compte de (16),

$$\frac{1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u}{(e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u} = \frac{pu - e_2}{e_2 - e_3} = \xi_{20}^2 u.$$

De sorte que l'intégrale qui figure dans $t(u)$ peut s'écrire

$$\int_0^1 \frac{dZ}{Z^2 + \xi_{20}^2 u} = \frac{-1}{2i\xi_{20} u} \log \left(\frac{1 + i\xi_{20} u}{i\xi_{20} u - 1} \right) = \frac{i}{2\xi_{20} u} \log \left(\frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} \right).$$

Donc il vient

$$t(u) = \frac{P}{a\pi} \frac{\xi_{13} u \xi_{23} u}{\xi_{03}^2 u \xi_{20} u} \log \left(\frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} \right).$$

Maintenant, on démontre facilement l'égalité

$$\frac{\xi_{13} u \xi_{23} u}{\xi_{03}^2 v \xi_{20} u} = \xi_{10} u,$$

d'où

$$(23) \quad t(u) = \frac{P}{\alpha \pi} \xi_{10} u \log \left(\frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} \right).$$

Ceci peut se mettre sous une forme plus élégante, en retenant qu'on a

$$e_2 - e_3 = 1,$$

et, par suite (TANNERY et MOLK, XIII, 4, et LX, 1),

$$\sqrt{e_3 - e_2} = i \sqrt{e_2 - e_3} = -i = \xi_{20} \omega_3.$$

D'où, enfin, pour $t(u)$ l'expression

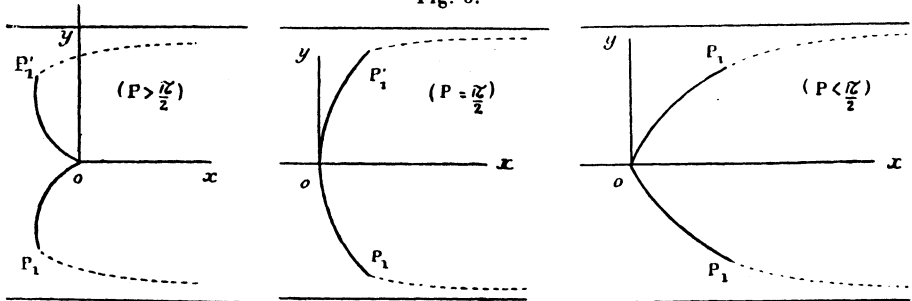
$$(24) \quad t(u) = \frac{P}{\alpha \pi} \xi_{10} u \log \frac{\xi_{20} u + \xi_{20} \omega_3}{\xi_{20} u - \xi_{20} \omega_3}.$$

La détermination qui convient pour le logarithme est celle dont la partie imaginaire est nulle pour $u = 0$.

Cette fonction $t(u)$ est-elle acceptable? C'est ce qu'il nous faut maintenant prouver.

Considérons ici d'abord la difficulté relative aux vitesses qui, nulle part, ne doivent dépasser l'unité : ce qui revient à dire que le coefficient de i dans t ne doit, nulle part, être positif. On voit

Fig. 6.



de suite que tout revient à faire voir que ce fait ne se produit pas sur les bords du rectangle de la figure 2, et plus précisément sur

les bords horizontaux, puisque t est réelle sur les bords verticaux.

Considérons le bord supérieur.

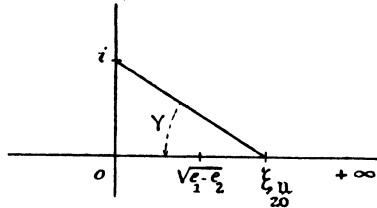
Je dis d'abord que la vitesse ne dépasse pas 1 sur les parois μ et μ' ; il suffit, à cet effet, de considérer $t(u)$ sur la paroi μ' , c'est-à-dire pour

$$0 < u < \omega_1.$$

On sait qu'alors $\xi_{10} u$ est positif et varie entre $+\infty$ et 0. La fonction $\xi_{20} u$ varie de $+\infty$ à $\sqrt{e_1 - e_2}$, en restant réelle et positive; on voit alors, sans peine, qu'en désignant par γ l'angle indiqué sur la figure 7 (nul lorsque le point $\xi_{20} u$ est à l'infini), on a

$$(25) \quad \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} = -2i\gamma.$$

Fig. 7.



De sorte qu'on a pour $t(u)$, dans ces conditions,

$$(26) \quad t(u) = \frac{P}{a\pi} \xi_{10} u (-2i\gamma).$$

Cette quantité est imaginaire pure, avec un coefficient de i toujours négatif.

Considérons maintenant le bord inférieur du rectangle.

Il suffit évidemment, à cause de la symétrie, d'envisager la vitesse sur la paroi ϖ'_1 de l'obstacle, c'est-à-dire de poser

$$u = -\omega_3 + v$$

avec

$$0 < v < \omega_1.$$

Utilisons ici les formules (Cf. TANNERY et MOLK, LX, 3-4, XIII, p. 4),

$$\begin{aligned} \xi_{10}(-\omega_3 + v) &= -\xi_{10}(v + \omega_3) = -\sqrt{e_3 - e_1} \xi_{23} v = i\sqrt{e_1 - e_3} \xi_{23} v = i\alpha \xi_{23} v, \\ \xi_{20}(-\omega_3 + v) &= -\xi_{20}(v + \omega_3) = -\sqrt{e_3 - e_2} \xi_{13} v. \end{aligned}$$

On peut en conclure sur le bord inférieur

$$(27) \quad t(-\omega_3 - v) = \frac{Pi}{\pi} \xi_{23} v \log \frac{-\sqrt{e_3 - e_2} \xi_{13} v + \sqrt{e_3 - e_2}}{-\sqrt{e_3 - e_2} \xi_{13} v - \sqrt{e_3 - e_2}} \\ = \frac{Pi}{\pi} \xi_{23} v \log \frac{\xi_{13} v - 1}{\xi_{13} v + 1}.$$

Pour $0 < v < \omega_1$, $\xi_{13} v$ varie en décroissant de 1 à 0, donc la quantité sous le signe log est toujours négative. Il est facile de voir que la partie imaginaire de ce logarithme est alors $-i\pi$. En effet, supposons que le point u tende vers le sommet $-\omega_3 + \omega_1$ du rectangle en suivant les bords $O\omega_1$; ω_1 , $-\omega_3 + \omega_1$; on constate alors de suite que l'expression

$$\log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i}$$

a toujours pour valeur $-2i\gamma$, γ étant toujours l'angle de la figure 7, mais le point $\xi_{20} u$ variant cette fois de $+\infty$ à 0. La valeur, à laquelle on parvient au sommet $-\omega_3 + \omega_1$, est donc $-2i\frac{\pi}{2} = -i\pi$. La partie imaginaire du logarithme est, par suite, constamment égale à $-i\pi$ tout le long du bord inférieur, entre les points $-\omega_3$ et $-\omega_3 + \omega_1$; nous vérifions bien ainsi que la partie réelle de $t(-\omega_3 + v)$ est

$$\frac{iP}{\pi} \xi_{23} v (-i\pi) = P \xi_{23} v,$$

résultat auquel nous devons nous attendre.

La partie imaginaire de $t(-\omega_3 + v)$ est, dans les mêmes conditions,

$$(28) \quad \frac{iP}{\pi} \xi_{23} v \log \frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v}$$

et le coefficient de i est visiblement négatif ou nul, puisque $\xi_{23} v$ est positif, et que

$$\frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v}$$

est au plus égal à 1 pour $0 < v < \omega_1$.

Les vitesses satisfont donc partout à la condition imposée.

Il est indispensable, ensuite, de faire voir que le domaine du plan z , correspondant au rectangle du plan u par l'intermédiaire de notre fonction $t(u)$, est un domaine d'un seul tenant. C'est ce que nous allons prouver en nous assurant de la forme de la ligne de glissement λ'_1 . Pour cela, nous nous placerons sur le bord vertical du rectangle, qui correspond à cette ligne, et nous ferons

$$u = \omega_1 - h,$$

h variant entre 0 et ω_3 , en restant imaginaire pure. On a

$$\begin{aligned}\xi_{10}(\omega_1 - h) &= -\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}\xi_{01}(-h) = \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}\xi_{01}h, \\ \xi_{20}(\omega_1 - h) &= \sqrt{e_1 - e_2}\xi_{31}(-h) = \sqrt{e_1 - e_2}\xi_{31}h,\end{aligned}$$

d'où une valeur de t qu'on peut mettre sous la forme

$$(29) \quad t(\omega_1 - h) = \frac{P}{\pi} \sqrt{e_1 - e_2} \xi_{01} h \log \left| \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i} \right|.$$

Or, pour h entre 0 et ω_3 , $\xi_{01}h$ est imaginaire pure, comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{e_3 - e_1}}$, c'est-à-dire entre 0 et $\frac{1}{-i\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ (Cf. TANNERY et MOLK, XII, 4).

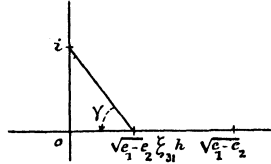
Dans les mêmes conditions, $\xi_{31}h$ est réelle et positive (*Id.*, t. II, p. 176) et décroît de 1 à 0. Alors $\log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i}$ est imaginaire pure, et l'on se convainc facilement (en se reportant à la détermination du logarithme qui convient pour u réel) que sa valeur est $-2i\gamma$, γ désignant l'angle de la figure (positif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$). De sorte qu'il vient

$$(30) \quad t(\omega_1 - h) = \frac{2P}{\pi} \sqrt{e_1 - e_2} (-i\xi_{01}h)\gamma,$$

et que cette expression est réelle et positive. Elle représente, lorsque h varie de 0 à ω_3 , l'angle de la tangente à la ligne λ'_1 , avec l'axe des x , lorsqu'on décrit cette ligne λ'_1 depuis l'infini jusqu'au point P'_1 de raccordement avec la paroi ϖ'_1 . Cet angle reste donc positif, en partant de zéro pour $h = 0$ (ce qui correspond bien à la direction asymptotique, horizontale, de la ligne λ'_1).

Voyons comment varie cet angle. Le produit $-i\xi_0, h$ est une fonction réelle positive croissante, lorsque h varie de 0 à ω_3 ; la figure 8 prouve que γ est aussi croissante positive, dans les mêmes

Fig. 8.



conditions. Donc le produit qui constitue $t(\omega_1 - h)$ est positif croissant. Il en résulte immédiatement que le domaine du plan z , occupé par le liquide en mouvement, est limité par des frontières qui ne peuvent se recouper mutuellement, et dont l'apparence est celle de la figure.

La solution étudiée ci-dessus est donc acceptable, et le problème est résolu, par conséquent, pour des obstacles ayant la forme indiquée sur les figures 5 et 6.

Je vais montrer que, pour tous ces obstacles, la ligne de glissement λ_1 (et par suite aussi λ_2) se détache de l'obstacle en P'_1 (ou P_1) avec un rayon de courbure nul, ce qui peut s'exprimer pratiquement en disant que *tous ces obstacles sont à bords tranchants*; ce ne sont pas de véritables *proues*, au sens que M. Brillouin attache à ce mot.

Sur une ligne de glissement, λ'_1 , par exemple, la vitesse étant égale à 1, la formule (1) donne pour l'élément d'arc

$$|ds| = |dz| = \left| \frac{p'u du}{e_1 - pu} \right|.$$

L'angle ϑ de la tangente à la ligne libre, avec l'axe Ox , est d'ailleurs la valeur de $t(u)$ au point correspondant ($u = \omega_1 - h$). Donc le rayon de courbure de cette ligne est, au signe près,

$$\frac{dz}{dt}.$$

Or, pour $u = \omega_1 - \omega_3$, c'est-à-dire $h = \omega_3$, $\frac{dz}{du}$ (ou $\frac{dz}{dh}$) est évi-

demment nul. Voyons à quoi se réduit $\frac{dt}{du}$ en ce point (ou, ce qui revient au même, $\frac{dt}{dh}$).

Pour $u = \omega_1 - h$, $t(u)$ est donné par la formule (29) ci-dessus, d'où l'on tire

$$\frac{dt}{dh} = \frac{P\sqrt{e_1-e_2}}{\pi} \left[\xi'_{01} h \log \frac{\sqrt{e_1-e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1-e_2} \xi_{31} h + i} + \frac{2i\sqrt{e_1-e_2} \xi_{01} h \xi'_{31} h}{(e_1-e_2)(\xi_{31} h)^2 + 1} \right].$$

Or (TANNERY et MOLK, LXI, 2-3)

$$\xi'_{01} h = e_{21} h \xi_{31} h$$

et

$$\xi'_{31} h = (e_1 - e_3) \xi_{01} h \xi_{21} h;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dh} = \frac{P\sqrt{e_1-e_2}}{\pi} \left[\xi_{21} h \xi_{31} h \log \frac{\sqrt{e_1-e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1-e_2} \xi_{31} h + i} \right. \\ \left. + 2i\sqrt{e_1-e_2}(e_1-e_3) \frac{(\xi_{01} h)^2 \xi_{21} h}{(e_1-e_2)(\xi_{31} h)^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

Pour $h = \omega_3$, il vient

$$\left. \frac{dt}{dh} \right|_{(h=\omega_3)} = \frac{2iP}{\pi} (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(\xi_{01}\omega_3)^2 \xi_{21}\omega_3,$$

ce qu'on mettra facilement sous la forme suivante (*Id.*, LX, 1),

$$\left. \frac{dt}{dh} \right|_{(h=\omega_3)} = \frac{2iP}{\pi} (e_1 - e_2) \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

ou encore, en utilisant (16) et en se souvenant que $\sqrt{e_2 - e_3}$ est négatif,

$$(31) \quad \left. \frac{dt}{dh} \right|_{(h=\omega_3)} = - \frac{2iP(a^2 - 1)}{\pi a}.$$

Cette expression n'étant pas nulle, la proposition est démontrée, $\frac{dz}{dt}$ est nul, et les obstacles sont à bords tranchants.

Détermination d'un obstacle formant proue. — Observons tout d'abord que, si l'on pose $u = \omega_1 - h$ dans la fonction $t_0(u)$ qui correspond à la double lame rectiligne, on obtient [voir infra,

formule (18)],

$$t_0(\omega_1 - h) = \frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} h}{1 - \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} h}.$$

Si l'on effectue sur cette fonction exactement le même calcul que nous venons de faire dans le paragraphe précédent, on trouve sans difficulté

$$\frac{dt_0(\omega_1 - h)}{dh} = \frac{2i\theta_1}{\pi} \sqrt{e_2 - e_3} \frac{\xi'_{03} h}{1 - (e_2 - e_3)(\xi_{03} h)^2},$$

et comme on a

$$\xi'_{03} h = \xi_{13} h \xi_{23} h$$

et

$$1 - (e_2 - e_3)(\xi_{03} h)^2 = (e_2 - e_3)(\xi_{23} h)^2,$$

il vient, après réductions,

$$\frac{dt_0(\omega_1 - h)}{dh} = \frac{2i\theta_1}{\pi \sqrt{e_2 - e_3}} \xi_{12} h.$$

Par conséquent, pour $h = \omega_3$, on a

$$(32) \quad \frac{dt_0}{dh} \Big|_{(h=\omega_3)} = \frac{2i\theta_1}{\pi \sqrt{e_2 - e_3}} \xi_{12} \omega_3 = -\frac{2i\theta_1}{\pi} \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{e_2 - e_3} = -\frac{2i\theta_1}{\pi} a.$$

Comme cette dernière quantité n'est pas nulle, l'obstacle formé des deux lames rectilignes est lui aussi à bords tranchants.

Mais nous concluons de là un procédé immédiat pour déterminer la solution du problème d'Hydrodynamique proposé, avec des obstacles ayant la forme indiquée par les figures 6, *ces obstacles étant cette fois de véritables proues*.

Envisageons, en effet, la fonction de v , somme des deux fonctions particulières considérées dans les paragraphes précédents, à savoir

$$(33) \quad T(u) = t_0(u) + t(u) = \frac{-i\theta_1}{\pi} \log \frac{-\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3}{\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3} + \frac{P}{a\pi} \xi_{10}u \log \frac{\xi_{20}u + \xi_{20}\omega_3}{\xi_{20}u - \xi_{20}\omega_3}.$$

Dans cette fonction $T(u)$ faisons $u = \omega_1 - h$, calculons $\frac{dT}{dh}$ et exprimons que cette dérivée est nulle pour $h = \omega_3$. Il résulte immédiatement des calculs antérieurs que nous obtiendrons ainsi

la condition

$$\frac{2i\theta_1}{\pi}a + \frac{2iT}{\pi} \frac{a^2-1}{a} = 0$$

à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de façons, en prenant pour θ_1 et P des valeurs constantes données par

$$(34) \quad \begin{cases} \theta_1 = -\rho(a^2-1), \\ P = \rho a^2, \end{cases}$$

où ρ est une constante quelconque, que nous choisirons positive, on se rendra compte pourquoi dans un instant.

θ_1 et P étant ainsi déterminés, la fonction $T(u)$ est évidemment celle qui résulte de notre formule générale (13), quand on suppose que la partie réelle de $T(u)$ doive se réduire, pour

$$u = -\omega_3 + v \quad (0 < u < \omega_1),$$

à

$$(35) \quad \theta_1 + P\xi_{23}v = \rho[a^2\xi_{23}v - (a^2-1)].$$

Or comment varie cette expression, quand v varie de 0 à ω_1 ?

Comme $\xi_{23}v$ diminue alors de 1 à $\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, elle diminue elle-même de ρ à

$$\rho[a\sqrt{a^2-1} - (a^2-1)] = \rho\sqrt{a^2-1}(a - \sqrt{a^2-1}),$$

quantité positive, puisque $a > 1$.

Il suffira donc de choisir la constante ρ inférieure à π , pour être assuré d'obtenir, au moyen de la fonction $T(u)$ ci-dessus, des obstacles ayant la forme indiquée figure 6. Si $\rho < \frac{\pi}{2}$, on aura des obstacles *en proue de navire*, avec, cette fois, des lignes de glissement *se détachant tangentiellement des bords de l'obstacle, avec un rayon de courbure non nul*.

Mais un point essentiel reste encore en suspens : la solution représentée ainsi par $T(u)$, à savoir

$$(36) \quad T(u) = \frac{\rho}{\pi} \left[a\xi_{10}u \log \frac{\xi_{20}u + \xi_{20}\omega_3}{\xi_{20}u - \xi_{20}\omega_3} + i(a^2-1) \log \frac{\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3}{-\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3} \right]$$

est-elle valable, et ne conduit-elle pas à des impossibilités? La solution est effectivement acceptable, comme on va le démontrer;

mais les raisonnements à faire sont plus délicats que ceux employés précédemment.

Comme dans les cas envisagés ci-dessus, tout revient : 1° à rechercher si la partie imaginaire de $T(u)$ peut devenir positive pour u réel avec $0 < u < \omega_1$, ou pour $u = -\omega_3 + v$, avec $0 < v < \omega_1$; 2° à étudier la nature de la variation de $T(v)$ pour $v = \omega_1 - h$, h étant imaginaire pure et variant de 0 à ω_3 .

1° *Cas de u réel.* — Pour u réel, le premier terme de $T(u)$ est imaginaire pure, et ses valeurs limites, aux extrémités de l'intervalle $0\omega_1$ considéré, sont

$$-\frac{2\rho ai}{\pi} \quad \text{et} \quad 0$$

(je n'insiste pas sur l'indétermination qui se présente pour $u=0$, et qui est facile à lever). Dans les mêmes conditions, le second terme de T varie de

$$\frac{i\rho(a^2-1)}{\pi} \log \frac{a+1}{a-1} \quad \text{à} \quad 0,$$

le coefficient de i allant d'ailleurs constamment en diminuant. Les valeurs de $T(u)$ aux extrémités de l'intervalle sont donc

$$-\frac{\rho i}{\pi} \left[2a - (a^2-1) \log \frac{a+1}{a-1} \right] \quad \text{et} \quad 0.$$

La première de ces expressions se mettra facilement sous la forme

$$-\frac{4\rho ib}{\pi} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{b^2}{3.5} + \dots + \frac{b^{2k-2}}{(2k-1)(2k+1)} + \dots \right]$$

[où l'on a posé $b = \frac{1}{a} (< 1)$], et, sous cette forme, il est clair que le coefficient de i est négatif. Du point de vue physique, cela signifie que la vitesse à l'infini, en amont dans le canal, est plus petite que 1, et cela donne la valeur de cette vitesse.

Pour aller plus loin, nous devons nous assurer du sens de la variation du coefficient de i dans $T(u)$. On trouve sans peine

$$\frac{dT}{du} = \frac{\rho a}{\pi} \left[\xi'_{10} \log \frac{\xi_{20}u - i}{\xi_{20}u + i} + \frac{2i\xi_{10}u\xi'_{20}u}{(\xi_{20}u)^2 + 1} \right] + \frac{2\rho i(a^2-1)}{\pi} \frac{\xi_{12}\omega_3\xi'_{12}u}{(\xi_{12}\omega_3)^2 - (\xi_{12}u)^2},$$

c'est-à-dire (TANNERY et MOLK, *loc. cit.*)

$$\frac{dT}{du} = \frac{\rho a}{\pi} \left[-\xi_{20} u \xi_{30} u \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} - \frac{2i(\xi_{10} u)^2 \xi_{30} u}{(\xi_{20} u)^2 + 1} \right] - \frac{2\rho i(a^2 - 1)(e_1 - e_2)\xi_{12}\omega_3\xi_{02}u\xi_{32}u}{\pi[(\xi_{12}\omega_3)^2 - (\xi_{12}u)^2]}.$$

Dans le premier crochet, nous mettrons en facteur $2i\xi_{20}u\xi_{30}u$, et nous observerons qu'à cause de la relation

$$e_2 \rightarrow e_3 = 1,$$

on peut écrire

$$\frac{(\xi_{10}u)^2}{\xi_{20}u[1 + (\xi_{20}u)^2]} = \frac{(\xi_{10}u)^2\xi_{02}u}{e_2 - e_3 + (\xi_{20}u)^2} = \frac{(\xi_{10}u)^2\xi_{02}u}{(\xi_{30}u)^2} = \xi_{02}u(\xi_{13}u)^2,$$

d'où, pour le crochet en question, l'expression suivante

$$2i\xi_{20}u\xi_{30}u \left[-\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20}u - i}{\xi_{20}u + i} - \xi_{02}u(\xi_{13}u)^2 \right].$$

Maintenant, on a $\xi_{12}\omega_3 = -\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} (= \alpha)$, et par suite

$$\frac{\xi_{02}u\xi_{32}u}{(\xi_{12}\omega_3)^2 - (\xi_{12}u)^2} = \frac{\xi_{02}u\xi_{32}u}{e_1 - e_3 - \frac{pu - e_1}{pu - e_2}} = \frac{\xi_{02}u\xi_{32}u(\xi_{20}u)^2}{(e_1 - e_2)(\xi_{30}u)^2} = \frac{1}{e_1 - e_2} \xi_{03}u.$$

Il vient donc, pour $\frac{dT}{du}$,

$$\frac{dT}{du} = \frac{2\rho ia}{\pi} \left\{ \xi_{20}u\xi_{30}u \left[-\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20}u - i}{\xi_{20}u + i} - \xi_{02}u(\xi_{13}u)^2 \right] - (a^2 - 1)\xi_{03}u \right\}.$$

Mettons partout en facteur le même produit $2i\xi_{20}u\xi_{30}u$ que ci-dessus, et observons que la relation

$$e_1 - e_2 = a^2 - 1$$

permet d'écrire

$$\xi_{02}u(\xi_{13}u)^2 + (a^2 - 1)\frac{\xi_{03}u}{\xi_{20}u\xi_{30}u} = \xi_{02}u(\xi_{13}u)^2 + (e_1 - e_2)\xi_{02}u(\xi_{03}u)^2 = \xi_{02}u(\xi_{23}u)^2.$$

On en conclura finalement

$$\frac{dT}{du} = \frac{2\rho ia}{\pi} \xi_{20}u\xi_{30}u \left[-\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20}u - i}{\xi_{20}u + i} - \xi_{02}u(\xi_{23}u)^2 \right],$$

et, par suite, dans l'intervalle considéré, $\frac{1}{i} \frac{dT}{du}$ aura le même signe que la quantité réelle

$$S = -\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} - \xi_{02} u (\xi_{23} u)^2,$$

laquelle est visiblement nulle pour $u = 0$.

Or, on a maintenant

$$\frac{dS}{du} = -\frac{\xi'_{20} u}{(\xi_{20} u)^2 + 1} - \xi'_{02} u (\xi_{23} u)^2 - 2 \xi_{02} u \xi_{23} u \xi'_{23} u$$

ou

$$\frac{dS}{du} = \frac{\xi_{10} u \xi_{30} u}{(\xi_{20} u)^2 + e_2 - e_3} - \xi_{12} u \xi_{32} u (\xi_{23} u)^2 + 2(e_2 - e_3) \xi_{02} u \xi_{23} u \xi_{03} u \xi_{13} u,$$

ce qui peut s'écrire, après quelques réductions,

$$\frac{dS}{du} = \frac{\xi_{10} u}{\xi_{30} u} - \xi_{12} u + 2(\xi_{03} u)^2 \xi_{13} u = 2(\xi_{03} u)^2 \xi_{13} u.$$

Donc $\frac{dS}{du}$ est positif; dans l'intervalle 0, ω_1 , et S y reste, par suite, toujours positif; alors, dans le même intervalle, on a

$$\frac{1}{i} \frac{dT}{du} > 0.$$

Le coefficient de i dans T va donc en croissant, et comme sa limite est zéro pour $u = \omega_1$, *il reste constamment négatif*, ce que nous voulions prouver. Remarquons que nous avons, en même temps, prouvé que la vitesse du liquide allait en croissant constamment le long de la paroi, depuis l'amont jusqu'à l'aval.

2° Cas où $u = -\omega_3 + v$. — Faisons maintenant $u = -\omega_3 + v$ avec $0 < v < \omega_1$. Il résulte alors des calculs des paragraphes antérieurs que le coefficient de i dans T est, dans ces conditions,

$$-\frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} + \frac{P}{\pi} \xi_{23} \log \frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v},$$

c'est-à-dire, vu les valeurs de θ_1 et de P ,

$$(37) \quad U(v) = \frac{\rho}{\pi} \left[(a^2 - 1) \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} + a^2 \xi_{23} v \log \frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v} \right].$$

Cette expression est nulle pour $v = \omega_1$. Je montrerai qu'elle ne devient pas positive, en faisant voir qu'elle est croissante dans l'intervalle considéré. On a, en effet,

$$\frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = (a^2 - 1) \frac{-2\xi'_{21}v}{(\xi_{21}v)^2 - 1} + a^2 \xi'_{23}v \log \frac{1 - \xi_{13}v}{1 + \xi_{13}v} + 2a^2 \frac{\xi_{23}v \xi'_{31}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = & -2(a^2 - 1)(e_1 - e_2) \frac{\xi_{01}v \xi_{31}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1} + 2a^2(e_1 - e_3) \frac{\xi_{23}v \xi_{01}v \xi_{21}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1} \\ & - a^2(e_2 - e_3) \xi_{03}v \xi_{13}v \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1}. \end{aligned}$$

Mais on démontre facilement les formules

$$\frac{\xi_{01}v \xi_{31}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1} = \frac{\xi_{30}v}{e_1 - e_2} = \frac{\xi_{30}v}{a^2 - 1}$$

et

$$\frac{\xi_{23}v \xi_{01}v \xi_{21}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1} = \frac{\xi_{23}v \xi_{20}v}{e_1 - e_3} = \frac{\xi_{23}v \xi_{20}v}{a^2},$$

et l'on en conclut pour $\frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv}$ une expression que j'écrirai sous la forme suivante, en mettant partout $\xi_{03}v \xi_{13}v$ en facteur,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = \xi_{03}v \xi_{13}v \left[-a^2 \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1} - 2(e_1 - e_2)(\xi_{30}v)^2 \xi_{31}v \right. \\ \left. + 2(e_1 - e_3)(\xi_{20}v)^2 \xi_{31}v \right]. \end{aligned}$$

Or

$$(e_1 - e_3)(\xi_{20}v)^2 - (e_1 - e_2)(\xi_{30}v)^2 = (e_2 - e_3)(pv - e_1) = (e_2 - e_3)(\xi_{10}v)^2,$$

d'où finalement

$$\frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = \xi_{03}v \xi_{13}v \left[-a^2 \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1} + 2(e_2 - e_3) \xi_{30}v \xi_{10}v \right].$$

Le signe de cette dérivée est donc, dans l'intervalle, celui de la fonction

$$\mathcal{R}(v) = -a^2 \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1} + 2(e_2 - e_3) \xi_{30}v \xi_{10}v.$$

Cette fonction $\mathcal{R}(v)$ est visiblement nulle pour $v = \omega_1$, et elle a

elle-même pour dérivée

$$\frac{d\mathcal{R}}{dv} = -\frac{2a^2\xi'_{31}v}{(\xi_{31}v)^2-1} + 2(e_2-e_3)(\xi_{30}v\xi'_{10}v + \xi_{10}v\xi'_{30}v),$$

ce que, en retenant la formule

$$e_1 - e_3 = a^2,$$

on met, après quelques transformations, sous la forme

$$\frac{d\mathcal{R}}{dv} = -2\xi_{20}v[a^2 + (\xi_{10}v)^2 + (\xi_{30}v)^2].$$

Cette quantité étant constamment négative dans l'intervalle 0, ω_1 , $\mathcal{R}$ décroît jusqu'à zéro et reste donc positive, ainsi que $\frac{dU}{dv}$; donc U croît jusqu'à la valeur zéro, et *il est toujours négatif*. La vitesse est donc toujours inférieure à 1 le long de la paroi $\mathfrak{W}'_1$, et, de plus, elle va en croissant (de zéro à un), quand on se déplace sur cette ligne du point O au point P'_1 .

3° *Forme de la ligne de glissement λ'_1 .* — Voyons maintenant la forme de la ligne de glissement λ'_1 . L'angle de la tangente à cette ligne, avec l'axe Ox , est fourni par la partie réelle de T pour $it = \omega_1 - h$ ($0 < \frac{h}{i} < \frac{\omega_3}{i}$). D'après les calculs antérieurs [formules (18) et (29)], cet angle est donc égal à

$$(38) \quad V(h) = \frac{\rho}{\pi} \left[-i(a^2-1) \log \frac{1 + \sqrt{e_2-e_3} \xi_{03} h}{1 - \sqrt{e_2-e_3} \xi_{03} h} + a^2 \sqrt{e_1-e_2} \xi_{01} h \log \frac{\sqrt{e_1-e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1-e_2} \xi_{31} h + i} \right].$$

Pour $h=0$, $V(h)$ est nul, et il suffirait d'être assuré que V va constamment en croissant avec $\frac{h}{i}$, pour être assuré que la solution est valable. Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\rho} \frac{dV}{dh} = & -\frac{2i(a^2-1)\sqrt{e_2-e_3}\xi'_{03}h}{1-(e_2-e_3)(\xi_{03}h)^2} + \frac{2ia^2(e_1-e_2)\xi_{01}h\xi'_{31}h}{(e_1-e_2)(\xi_{31}h)^2+1} \\ & + a^2\sqrt{e_1-e_2}\xi'_{01}h \log \frac{\sqrt{e_1-e_2}\xi_{31}h-i}{\sqrt{e_1-e_2}\xi_{31}h+i}, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, après diverses transformations dont je ne

reproduis pas le détail,

$$\frac{\pi}{\rho} \frac{dV}{dh} = 2ia^2 \sqrt{e_1 - e_2} \xi_{21} h \xi_{31} h \left[\frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i} + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} \xi_{12} h \xi_{32} h \right].$$

On sait que $\xi_{21} h$ et $\xi_{31} h$ sont réels et positifs pour

$$0 < \frac{h}{i} < \frac{\omega_3}{i}$$

(Cf. TANNERY et MOLK, t. II, p. 176). Donc $\frac{1}{i} \frac{dV}{dh}$ a le signe de la quantité

$$Q = \frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} + i} + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} \xi_{12} h \xi_{32} h.$$

Ce signe est loin d'être évident. Si l'on se reporte à la figure 8, on voit que la fonction $Q(h)$ est égale à $\frac{1}{2i} \left(-2i \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$, pour $h = \omega_3$; et pour $h = 0$, à

$$\frac{1}{2i} \left(-2i \arctan \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \right) + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

C'est, comme on le verra plus loin, le signe de cette dernière quantité qui est important. Je dis qu'elle est négative; en effet, posons

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} = \tan \delta$$

et, par suite,

$$a^2 = \frac{1}{\sin^2 \delta},$$

alors il vient

$$\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{1}{2} (\sin 2\delta - 2\delta),$$

et, sous cette forme, on voit bien que cette quantité est négative.

Ceci posé, si l'on calcule la dérivée $\frac{dQ}{dh}$, on peut parvenir à la mettre sous la forme suivante

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} \xi_{02} h [e_1 - e_3 + (e_2 - e_3)(\xi_{12} h)^2 + (e_2 - e_1)(\xi_{32} h)^2],$$

ou encore

$$\frac{dQ}{dh} = 2 \sqrt{e_1 - e_2} \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \xi_{02} h (\xi_{12} h)^2 = 2i \sqrt{e_1 - e_2} \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} (\xi_{12} h)^2 \frac{\xi_{02} h}{i}.$$

Comme $(\xi_{12} h)^2$ est positif, ainsi que $\frac{\xi_{02} h}{i}$ dans l'intervalle considéré (TANNERY et MOLK, t. II, p. 176), on en conclut

$$\frac{dQ}{i dh} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dQ}{d\left(\frac{h}{i}\right)} < 0,$$

Q va donc en décroissant quand $\frac{h}{i}$ croît de 0 à $\frac{\omega_3}{i}$, et, par suite, il reste constamment négatif, puisque son maximum, calculé il y a un instant, est négatif. $\frac{dV}{i dh}$ est donc aussi négatif, $\frac{dV}{d\left(\frac{h}{i}\right)}$ est positif,

et V va en croissant, ce que nous voulions prouver.

La solution est donc valable et correspond bien à la forme de proue qu'on voulait obtenir.

Les résultats numériques seraient maintenant intéressants, relatifs à ces mêmes exemples. Je compte pouvoir indiquer quelques-uns de ces résultats dans une prochaine publication.

Pour terminer le présent Mémoire, j'indiquerai une méthode fort simple propre à déterminer le mouvement d'un liquide dans un canal de forme quelconque, mais symétrique par rapport à un axe, et renfermant un obstacle également symétrique par rapport au même axe. Cette méthode reposant sur des principes connus ⁽¹⁾, je ne crois pas devoir insister sur le détail des calculs.

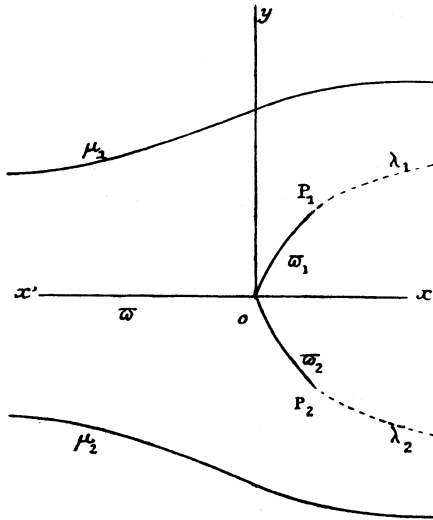
Soit donc un canal indéfini, symétrique par rapport à un axe Ox, renfermant un obstacle également symétrique P, OP₂. La direction asymptotique du canal en amont sera supposée horizontale (parallèle à Ox). Quant à la direction asymptotique en aval, pour la frontière supérieure, par exemple, elle pourra être supposée inclinée

⁽¹⁾ Cf. T. LEVI-CIVITA, *Scie e Leggi di resistenza* (Circolo mat. di Palermo, 1907).

d'un angle α arbitraire sur Ox : dans les calculs qui vont suivre, il n'y a pas lieu de la préciser immédiatement ; mais il est clair que le cas, où elle est également horizontale, est de beaucoup celui qui présente le plus réel intérêt.

Cela étant, nous allons prendre en considération *seulement la moitié supérieure du plan xOy* , occupée par le liquide en mouvement de Helmholtz ; en observant que la vitesse du liquide est horizontale tout le long de la portion utile de l'axe des x (voir la figure 9), il est permis de supprimer la portion inférieure du

Fig. 9.



liquide, en établissant le long de Ox' une paroi solide fictive ω . [C'est en somme exactement la contre-partie du procédé qu'on suit dans la méthode des images, usitée dans de nombreuses questions d'Hydrodynamique ⁽¹⁾.]

La portion du liquide que nous considérons est donc limitée par les parois solides ω , ω_1 et μ_1 et par la ligne de glissement λ_1 qui sépare le liquide en mouvement du liquide au repos derrière l'obstacle. Nous supposons la vitesse égale à 1 à l'infini en aval ;

(1) Voir, par exemple, P. APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. III, p. 379 et 491.

et, par suite, l'équation des pressions

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

indique que la vitesse sera égale à 1 tout le long de λ_1 .

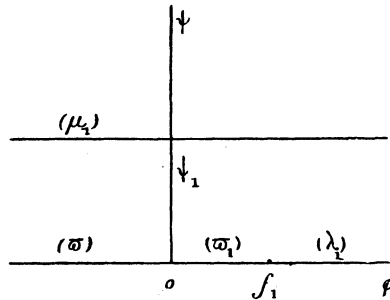
Cela étant, le mouvement étant supposé permanent irrotationnel, nous prendrons le potentiel φ et la fonction de courant ψ , nuls au point O, et ψ sera constant, égal à ψ_1 , sur λ_1 . [ψ_1 représentera d'ailleurs la distance asymptotique entre la paroi μ_1 et la ligne de glissement λ_1 (1).]

Dans ces conditions, nous poserons, u et v désignant les projections de la vitesse d'une molécule liquide,

$$(39) \quad \begin{aligned} z &= x + iy, \\ f &= \varphi + i\psi, \quad w = u - iv = e^{-i\Omega} = \frac{df}{dz}, \end{aligned}$$

et au domaine du plan z , considéré ci-dessus, correspondra dans le plan f la bande représentée figure 10. Je laisse au lecteur le soin

Fig. 10.



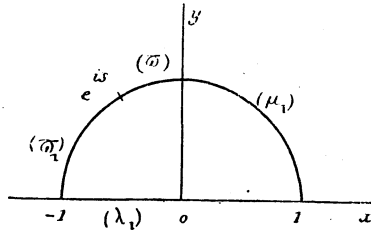
de vérifier que cette bande peut être représentée d'une façon conforme sur le demi-cercle de la figure 11 dans le plan $Z = X + iY$, au moyen de la relation

$$(40) \quad f = A - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{(1-Z)^2}{1+Z^2},$$

(1) Cf., par exemple, mon *Mémoire Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1912, p. 163).

où A est une constante réelle, et où le logarithme est celui dont la détermination est réelle pour Z réel. Les frontières devant se cor-

Fig. 11.



respondre comme l'indiquent les figures, les points $f = f_1$, $f = 0$ doivent avoir pour homologues les points $Z = -1$ et $Z = e^{is_0}$, d'où les relations

$$f_1 = A - \frac{\psi_1}{\pi} \log 2,$$

$$0 = A - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{1 - \cos s_0}{- \cos s_0},$$

desquelles on peut tirer A et ψ_1 en fonction de s_0 et de f_1 , qu'on gardera comme paramètres. (Il en fallait bien exactement deux pour caractériser la figure 10.)

Un calcul élémentaire donne en fonction de Z

$$(41) \quad df = \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{1+Z}{(1-Z)(1+Z^2)} dZ.$$

Cela étant, la fonction Ω , définie par (39), peut maintenant être considérée comme une fonction de Z , régulière dans le demi-cercle. En posant $\Omega = \mathfrak{S} + i\tau$, il vient de suite

$$u + i\nu = e^\tau e^{i\mathfrak{S}},$$

donc e^τ est la vitesse, en grandeur, d'une molécule liquide, et $\mathfrak{S}$ est l'angle de cette vitesse avec OX . Par suite, $\Omega(Z)$ satisfait dans le demi-cercle aux propriétés suivantes :

Elle est régulière dans ce domaine ;

Sa partie imaginaire est nulle sur le diamètre $-1, +1$;

Sa partie réelle est nulle pour $Z = e^{is}$, si $\frac{\pi}{2} < s < s_0$;

Sa partie réelle, pour $Z = e^{is}$, avec $0 < s < \frac{\pi}{2}$ ou pour $s_0 < s < \pi$, représente l'angle, avec OX, de la tangente aux parois fixes μ_1 et ϖ_1 .

Désignons alors par $g(s)$ et $h(s)$ les fonctions de s qui représentent ces angles, fonctions dont la variation est donnée par l'allure des courbes μ_1 et ϖ_1 . Il résulte alors immédiatement, des conclusions que j'ai démontrées dans un travail antérieur ⁽¹⁾, que la fonction $\Omega(Z)$ (d'ailleurs prolongeable analytiquement dans le demi-cercle symétrique de celui de la figure par rapport à OX) est fournie par la formule

$$(42) \quad \Omega(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(s) \frac{1-Z^2}{1-2Z \cos s + Z^2} ds + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\pi} h(s) \frac{1-Z^2}{1-2Z \cos s + Z^2} ds.$$

On prendra $g(0) = 0$, la direction asymptotique du canal en amont devant être horizontale; et si l'on veut qu'il en soit de même de la direction asymptotique en aval, il suffira que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

La formule

$$dz = e^{i\Omega} df = \frac{2\psi_1}{\pi} e^{i\Omega} \frac{1+Z}{(1-Z)(1+Z^2)} dZ,$$

déduite de (39) et (41), permet alors de construire tous les éléments du mouvement, pour une forme de canal et une forme d'obstacle, connus d'avance. Pour le détail, je renvoie aux calculs, tout à fait semblables, exposés dans le Mémoire cité plus haut.

⁽¹⁾ *Sur la résistance des fluides* (Annales de l'École normale supérieure, 1911, 2^e Partie). Voir aussi une Note de l'auteur *Sur le problème de Dirichlet relatif au cercle* (Bulletin de la Société mathématique, 1911). Voir aussi T. BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare* (Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 1911).