P. LÉVY

Remarques sur le théorème de M. Picard

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 25-39
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__25_1>

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE M. PICARD;

PAR M. PAUL LÉVY.

INTRODUCTION.

Le théorème de M. Picard, d'après lequel une fonction entière qui ne prend aucune des valeurs zéro et un se réduit nécessairement à une constante, a été complété en 1904 par M. Landau, qui a établi le théorème suivant :

Si une fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est régulière et différente de zéro et de un pour toutes les valeurs de x de module inférieur à R, *on a*

$$R \leqq \frac{\varphi(a_0)}{|a_1|}, \tag{1}$$

$\varphi(a_0)$ désignant une fonction convenablement déterminée de a_0.

Peu de temps après, M. Schottky, complétant dans une nouvelle voie le théorème de M. Picard, a obtenu le théorème suivant :

Si une fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est régulière et différente de zéro et de un pour toutes les valeurs de x de module inférieur à R, *on a*

$$|\log f(x)| \leqq \Phi(a_0, \theta) \qquad \left(\theta = \frac{|x|}{R} < 1\right), \tag{2}$$

$\Phi(a_0, \theta)$ étant une fonction convenablement déterminée de a_0 et de θ, et la détermination considérée de $\log f(x)$ *étant telle que son module soit aussi petit que possible pour $x = 0$.*

Dans la formule (1) nous pouvons supposer que $\varphi(a_0)$ désigne, pour chaque valeur de a_0, la plus petite quantité pour laquelle le théorème énoncé soit exact. Nous ferons une hypothèse analogue pour $\Phi(a_0, \theta)$.

Les expressions exactes de ces fonctions $\varphi(a_0)$ et $\Phi(a_0, \theta)$ ont été obtenues par M. Carathéodory; elles se déduisent simplement de la fonction modulaire elliptique. M. Landau en a conclu que la fonction $\Phi(a_0, \theta)$, pour θ voisin de un, reste inférieure à une fonction rationnelle de θ. Ce résultat avait été obtenu d'une manière élémentaire par M. Schottky, qui en avait déduit une démonstration nouvelle du second théorème fondamental de M. Picard.

Il peut être utile de connaître plus exactement l'ordre de grandeur de $\Phi(a_0, \theta)$ quand θ est voisin de un. Dans le paragraphe 1, j'établirai que $(1 - \theta)\Phi(a_0, \theta)$ reste compris, quand θ tend vers un, entre deux limites finies, fonctions de a_0 seulement.

Le résultat obtenu par M. Carathéodory justifie d'une manière remarquable l'intervention de la fonction modulaire dans le théorème de M. Picard. Mais cela ne diminue pas l'intérêt que peuvent présenter les démonstrations élémentaires de ce théorème, car on peut chercher à établir, en partant de ces démonstrations, une théorie nouvelle de la fonction modulaire elliptique.

La question se présente sous deux aspects entièrement différents suivant que l'on suppose connu, ou non, le théorème de M. Schwarz d'après lequel on peut obtenir la représentation conforme sur un cercle de toute région simplement connexe limitée par un contour de forme quelconque.

Supposons d'abord ce théorème connu, ainsi que celui que M. Poincaré en a déduit, d'après lequel toutes les fonctions uniformes sur une surface de Riemann donnée peuvent s'exprimer en fonction uniforme d'une même variable t.

Considérons en particulier la surface de Riemann S définie par M. Lindelöf [1], présentant une infinité de feuillets qui se permutent autour des points 0, 1 et ∞, et qui est simplement connexe. Le théorème de M. Poincaré nous apprend que nous pouvons obtenir la représentation conforme de cette surface, soit sur un plan tout entier, soit sur l'intérieur d'un cercle; si la théorie de la fonction modulaire n'est pas connue, nous ne savons pas *a priori* lequel des deux cas est réalisé. Mais si l'on se trouvait dans le premier cas, la fonction réalisant cette représentation conforme serait une fonction entière ne prenant aucune des valeurs zéro et un. Il suffit donc d'avoir établi par un procédé quelconque le théorème de M. Picard pour en déduire que la surface S peut être représentée sur un cercle.

Rappelons maintenant le principe qui a servi de point de départ

---

(1) *Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes* (Congrès des Mathématiques à Stockholm, 1909; Teubner, 1910).

à M. Lindelöf. Soit $\mathfrak{R}$ une région à contour simple sur une surface de Riemann, et soit une représentation conforme de cette région sur le cercle $|t| < 1$ faisant correspondre un point donné a_0 au centre du cercle; au cercle $|t| = \theta\,(< 1)$ correspond alors une courbe bien définie γ. *Si maintenant nous considérons une fonction $f(t)$, dont les valeurs pour $|t| < 1$ soient représentées par des points de la région $\mathfrak{R}$, sa valeur pour $t = 0$ étant représentée par le point a_0, ses valeurs pour $|t| < \theta$ seront représentées par des points intérieurs à la courbe γ.*

Il suffit d'appliquer cet énoncé à la surface de Riemann considérée plus haut pour obtenir le théorème de M. Schottky. Donc, quel que soit le procédé par lequel on ait établi le théorème de M. Picard, le théorème de M. Schottky peut s'en déduire. Il faut remarquer d'ailleurs qu'on pourra sans doute toujours l'établir, sans avoir recours aux considérations qui précèdent, en précisant convenablement la démonstration considérée; c'est bien le cas pour la méthode de M. Borel.

Ayant établi la possibilité de représenter la surface S sur un cercle, nous pouvons définir la fonction modulaire par cette représentation. Il est facile d'en déduire la propriété qui sert ordinairement de définition à cette fonction. Traçons en effet, sur un des feuillets de la surface S, le segment de l'axe réel compris entre les points zéro et un; il divise la surface S en deux parties symétriques l'une de l'autre. La courbe qui lui correspond doit donc diviser le cercle $|t| < 1$ en deux parties, pouvant être représentées l'une sur l'autre avec conservation des angles, mais changement de leur sens, chaque point de cette courbe se correspondant à lui-même; il est bien facile de voir que cette courbe ne peut être qu'un arc de cercle orthogonal au cercle $|t| = 1$. Le même raisonnement s'appliquant pour les autres portions de l'axe réel tracées sur le même feuillet de la surface S, nous voyons que la représentation conforme considérée fait correspondre un demi-plan à un triangle curviligne formé par trois arcs de cercle tangents entre eux. On retrouve bien la définition ordinaire de la fonction modulaire.

Il serait bien plus intéressant d'obtenir des résultats analogues à ceux qui précèdent sans utiliser le théorème de M. Schwarz. Je n'ai pu y parvenir, mais j'ai obtenu quelques résultats qui pourront peut-être aider à atteindre ce but, et que j'exposerai dans le paragraphe 2.

Le paragraphe 3 est consacré à une généralisation du théorème de M. Landau, que j'ai déjà publiée dans les *Comptes rendus* du 9 octobre 1911. Cette généralisation montre que, si une fonction est régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et vérifie en outre *deux conditions d'égalité convenablement choisies*, on peut, *en général*, déterminer une limite supérieure de R.

Je démontre d'abord qu'on peut prendre pour ces deux conditions

$$f(\xi) = a, \qquad f(\xi') = b \qquad (b \neq a).$$

On peut alors déterminer une limite supérieure de R. Ce résultat était d'ailleurs certainement connu de MM. Schottky et Lindelöf, car il résulte immédiatement de leurs travaux; mais je ne crois pas qu'il ait été énoncé explicitement sous cette forme. En partant de ce cas particulier, je démontre qu'on peut remplacer les conditions ci-dessus par d'autres beaucoup plus générales.

1. Appelons $t = \nu(z)$ la fonction qui définit la représentation conforme du cercle $|t| < 1$ sur la surface S, de manière que, pour $t = 0$, z ait une valeur donnée a_0. Cette fonction n'est définie qu'à un facteur constant près, de module égal à un et d'argument quelconque; il nous sera inutile d'en préciser la définition. Nous appellerons $z = \lambda(t)$ la fonction inverse.

Les points du plan des t auxquels correspondent des valeurs réelles de z forment des arcs de cercle orthogonaux au cercle $|t| = 1$, divisant la surface de ce cercle en triangles curvilignes T dont les sommets sont sur la circonférence. Un point A, sommet d'un de ces triangles, est aussi sommet d'une infinité de triangles analogues dont les autres sommets forment une suite

$$\ldots, \quad A_{-1}, \quad A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_n, \quad A_{n+1}, \quad \ldots.$$

Par une inversion par rapport au point A, on obtient une suite de points équidistants,

$$\ldots, \quad B_{-1}, \quad B_0, \quad B_1, \quad \ldots, \quad B_n, \quad B_{n+1}, \quad \ldots;$$

cela résulte aisément des propriétés connues de la fonction modulaire.

Nous pouvons supposer que les deux points A_n et A_{n+1} mis en évidence sont situés de part et d'autre du diamètre issu de A. Il est évident que les distances $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... (comptées en ligne droite ou sur le cercle) vont en croissant jusqu'à $A_n A_{n+1}$ et décroissent ensuite, et qu'on a

$$(3) \qquad AA_{n+1} > AA_{n-1}, \qquad AA_n > AA_{n-1}.$$

Soit d'autre part T_0 celui des triangles T qui contient le point $t = 0$. Ses côtés ne pouvant pas couper l'arc AA_{n+1}, ou bien il coïncide avec $AA_n A_{n+1}$, ou bien ses trois sommets sont sur celui des arcs $A_n A_{n+1}$ du cercle $|t| = 1$ qui ne contient pas le point A. Donc cet arc est au moins égal au plus petit des arcs interceptés sur le cercle $|t| = 1$ par le triangle T_0. Donc $B_n B_{n+1}$ a un minimum indépendant du point A; $B_1 B_n$ et AB_1 sont alors au moins de l'ordre de grandeur de n, et l'on a

$$(4) \qquad n\, AA_1 < C,$$

C étant une quantité indépendante du choix des points A et A_1. Elle ne peut être très grande que si le triangle T_0 a un de ses côtés très petit, et cela n'arrive que si a_0 est très grand ou très voisin de zéro ou de un.

Ces résultats préliminaires étant établis, l'expression de la fonction $\Phi(a_0, \theta)$, donnée par M. Carathéodory, est

$$\Phi(a_0, \theta) = \max_{|t| = \theta} |\log \lambda(t)|,$$

la détermination considérée de $\log \lambda(t)$ étant telle que son module soit aussi petit que possible pour $t = 0$. Je me propose d'établir que cette fonction reste comprise, quand θ tend vers un, entre deux limites de la forme $\frac{K}{1-\theta}$, K désignant des fonctions convenablement déterminées de a_0.

L'existence d'une limite inférieure de cette forme se vérifie facilement. Désignons par t_0 la valeur de t correspondant à un sommet d'un triangle T dans le voisinage duquel $\lambda(t)$ tende vers l'une des valeurs 0 ou ∞; on sait que, dans le voisinage de ce point, $\log \lambda(t)$ a pour valeur asymptotique, à un facteur constant près, $\frac{1}{t - t_0}$. Son module est donc supérieur à une limite de la forme $\frac{K}{1-\theta}$, qui est aussi *a fortiori* une limite inférieure de $\Phi(a_0, \theta)$.

Pour établir l'existence d'une limite supérieure de la même forme, il suffit d'établir que la partie réelle et la partie imaginaire de $\log \lambda(t)$, sur le cercle $|t| = \theta$, ont toutes deux leurs modules inférieurs à une limite de cette forme.

Pour la partie réelle, cela résulte d'une formule obtenue par M. Landau [1]. En désignant par $g(t)$ une fonction régulière, différente de zéro et de un pour $|t| < 1$, cette formule s'écrit

$$\log|g(t)| < \chi[g(0)] \frac{1}{1-|t|} \qquad (|t| < 1).$$

En l'appliquant aux fonctions $\lambda(t)$ et $\frac{1}{\lambda(t)}$ on obtient le résultat énoncé.

Quant à la partie imaginaire de $\log \lambda(t)$, son module est au plus égal à $\pi(N+1)$, en désignant par N le nombre de fois que $\lambda(t)$ prend une valeur réelle quand on va du point t à l'origine en suivant une ligne droite, c'est-à-dire le nombre de fois qu'on coupe un côté d'un triangle T en suivant le chemin indiqué. Soit d'autre part AA_0A_1 celui des triangles T qui contient le point t à son intérieur; appelons σ et Σ la plus petite et la plus grande des distances des points A, A_0 et A_1 deux à deux, comptées sur le cercle $|t| = 1$; nous pouvons supposer sans faire aucune restriction que Σ est l'arc AA_1. $1 - |t| = 1 - \theta$ étant de l'ordre de grandeur de Σ ou plus petit, nous sommes ramenés à démontrer que

$$(5) \qquad N\Sigma < K,$$

K désignant une quantité indépendante du triangle AA_0A_1, et fonction de a_0 seulement.

En allant du point t vers l'origine en suivant une ligne droite, on quitte d'abord le triangle AA_0A_1 pour entrer dans un triangle AA_1A_2; nous supposerons que A_1 désigne celui des points A et A_1 qui est entre A_0 et A_2; l'arc A_0A_2 étant très petit (sauf pour un

[1] Formule (54) de son Mémoire *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 1906).

nombre fini de triangles AA_0A_1), le point A_1 ainsi désigné est bien déterminé. L'arc A_1A_2 est supérieur à l'arc A_0A_1, et par suite à σ. La quantité analogue à Σ relative au triangle AA_1A_2 est donc supérieure à $\Sigma+\sigma$. On verrait de même que les quantités analogues relatives aux autres triangles T qu'on traverse en allant du point t à l'origine, sont supérieures respectivement à $\Sigma+2\sigma$, $\Sigma+3\sigma$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on atteigne le triangle T_0. Pour le triangle qui précède T_0 elle sera donc supérieure à

$$\Sigma+(N-1)\sigma > N\sigma$$

et comme elle est inférieure à π, on a

$$N\sigma < \pi. \tag{6}$$

Soit maintenant AA_nA_{n+1} le dernier des triangles considérés qui ait A pour sommet; A_n et A_{n+1} sont alors situés de part et d'autre du diamètre passant par A, de sorte que la formule (4) s'applique. En augmentant un peu la valeur de la constante C, on peut évidemment remplacer AA_1 par Σ, et il vient

$$n\Sigma < C. \tag{7}$$

Désignons par σ' et N' les quantités analogues à σ et N relatives au triangle AA_nA_{n+1}. On a évidemment

$$N = n + N',$$

et, d'après les formules (3), n étant au moins égal à 2 [1],

$$\sigma' > \Sigma.$$

La formule (6), appliquée au triangle AA_nA_{n+1}, donne alors

$$N'\Sigma < \pi. \tag{8}$$

En tenant compte de la formule (7), il vient

$$N\Sigma < \pi + C,$$

---

[1] Cette conclusion suppose que le plus petit côté du triangle AA_nA_{n+1} ne soit pas A_nA_{n+1}. Cela ne peut être faux que si AA_nA_{n+1} coïncide avec T_0, et dans ce cas $N'=0$, de sorte que la formule (8) est toujours exacte.

inégalité de la formule (5), qui, par suite, établit le théorème énoncé.

2. Considérons l'ensemble des fonctions $f(x)$ qui sont régulières et différentes de zéro et de un pour $|x| < R$, et qui prennent la valeur a_0 pour $x = 0$. Représentons leurs valeurs sur la surface de Riemann $\mathcal{S}$ dont il a déjà été question, en partant pour $x = 0$ du point $z = a_0$ marqué sur un feuillet bien déterminé de cette surface. Les points représentant les valeurs de toutes ces fonctions pour $|x| \leqq \theta R$ $(\theta < 1)$, forment une certaine région $\mathcal{R}$ sur la surface $\mathcal{S}$.

D'après le théorème de M. Schottky, tous les points de cette région $\mathcal{R}$ sont intérieurs à un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon convenablement déterminé; ils sont de même extérieurs à deux cercles de rayons suffisamment petits ayant respectivement pour centres les points $z = 0$ et $z = 1$. Il n'en résulte pas que la région $\mathcal{R}$ soit finie; il faut encore prouver qu'elle est située tout entière sur un nombre fini de feuillets de la surface $\mathcal{S}$. Il suffit pour cela de montrer qu'on peut aller du point a_0 à un point quelconque P de $\mathcal{R}$ en décrivant un chemin de longueur finie intérieur à $\mathcal{R}$. Or, $f(x)$ étant celle des fonctions considérées dont la valeur, pour $x = \xi$, $(|\xi| \leqq \theta R)$, est représentée par le point P, le chemin représentant les valeurs de $f(x)$, quand x va de 0 à ξ en suivant une ligne droite, est de longueur finie; cela résulte du théorème de M. Landau, qui nous donne une limite supérieure de $|f'(x)|$ pour les valeurs de x considérées, puisque $f(x)$ ne peut être ni très grand, ni très voisin de zéro ou de un. La région $\mathcal{R}$ est donc sur la surface $\mathcal{S}$ une région finie. Remarquons qu'il n'est nullement évident, du moins au point de vue élémentaire où nous nous plaçons ici, que le contour γ limitant cette région soit simple.

Nous allons maintenant établir que *la région $\mathcal{R}$ contient son contour* γ. Autrement dit, il faut montrer que, P étant un point de γ, parmi les fonctions $f(x)$ considérées, il en existe une dont la valeur, pour $x = \theta R$ par exemple, soit représentée par le point P. Or P peut être considéré comme limite d'une suite de points

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n, \quad \ldots$$

intérieurs à R. Il existe sûrement, parmi les fonctions considérées, une fonction $f_n(x)$ dont la valeur, pour $x = \theta R$, soit représentée par le point P_n. Or l'ensemble des fonctions $f(x)$ considérées est compact, d'après un théorème de MM. Landau et Carathéodory [1]. Donc, parmi les fonctions $f_n(x)$, on peut choisir une infinité de fonctions tendant vers une limite $f(x)$. D'après le théorème cité, elles tendent vers $f(x)$ d'une manière uniforme dans toute région intérieure au cercle $|x| = R$; il en résulte que $f(x)$ vérifie toutes les conditions indiquées.

Je dis maintenant que *cette fonction* $f(x)$ *admet le cercle* $|x| = R$ *comme coupure*. Pour le montrer, je supposerai qu'elle soit régulière sur un certain arc de ce cercle, et je montrerai que cette hypothèse conduit à une contradiction.

En faisant cette hypothèse, il existe un contour C, composé d'un arc du cercle $|x| = R$ et d'un arc de courbe extérieur à ce cercle, à l'intérieur duquel la fonction $f(x)$ soit régulière et différente de zéro et de un. Considérons la représentation conforme de la région intérieure à C sur l'intérieur du cercle $|x| = R$; on peut le faire sans utiliser le théorème de M. Schwarz, car on peut prendre pour C un contour formé de deux arcs de cercle, et alors cette représentation s'obtient à l'aide d'une fonction élémentaire. A tout point x' intérieur à C correspondra ainsi un point x' intérieur au cercle considéré; on peut établir cette correspondance de manière que x et x' soient nuls en même temps. On sait que dans ces conditions on aura toujours

$$|x| < |x'|$$

pour les points x' intérieurs à C. Posons

$$f(x') = g(x).$$

La fonction $g(x)$ est régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et prend la valeur a_0 pour $x = 0$. Elle prend une valeur représentée par le point P pour $x' = \theta R$, c'est-à-dire pour $|x| < \theta R$. Les valeurs qu'elle prend pour $|x| = \theta R$ sont donc représentées par des points entourant complètement le point P, dont certains sont par suite extérieurs à la région $\mathfrak{R}$. Cela étant

[1] *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1911).

impossible, d'après la définition même de la région $\mathcal{R}$, le résultat énoncé est établi.

On sait que cette fonction $f(x)$ ne peut être qu'une fonction de la forme $\lambda(ax)$, a étant une constante de module $\frac{1}{R}$. On peut donc dire que les raisonnements précédents conduisent à une définition nouvelle de la fonction $\lambda(t)$, et, en partant de cette définition et par des raisonnements élémentaires, nous avons établi que cette fonction admet le cercle $|t| = 1$ comme coupure. C'est ce qui m'a fait penser qu'on pourrait de cette manière retrouver les autres propriétés de cette fonction.

Il suffirait d'établir que la fonction $f(x)$ considérée donne la représentation conforme de la surface S sur le cercle $|x| < R$. Je n'ai pu l'établir par des raisonnements élémentaires, ainsi que je l'ai déjà dit, et j'ai seulement pu ramener ce problème à la démonstration du théorème suivant : il existe une fonction régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, prenant la valeur a_0 pour $x = 0$, et dont les valeurs, pour tous les points du cercle $|x| = \theta R$, sont représentées sur la surface S par des points de la courbe γ.

3. Dans l'énoncé du théorème de M. Schottky, l'inégalité (2) peut être remplacée par l'inégalité

$$|f(x) - a_0| \leqq \Psi(a_0, \theta) \qquad \left(\theta = \frac{|x|}{R} < 1\right). \tag{9}$$

La fonction $\Psi(a_0, \theta)$, pour une valeur déterminée de θ, reste finie quand a_0 n'est ni très grand, ni très voisin de zéro et de un. MM. Landau et Bernays ont même montré qu'elle reste finie quand a_0 est voisin de zéro ou de un. A cause du rôle analogue des deux nombres zéro et un, il suffit d'établir ce résultat en supposant a_0 voisin de un. Or, en considérant la détermination de $\sqrt{f(x)}$ qui est voisine de -1 pour $x = 0$, et en lui appliquant l'inégalité (9), on obtient une limite supérieure de $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{a_0}|$ et par suite de $|f(x) - a_0|$ qui reste finie quand a_0 tend vers un.

La différence $f(x) - a_0$ s'annulant pour $x = 0$ et ayant pour $|x| < \frac{R}{2}$ son module au plus égal à $\Psi\left(a_0, \frac{1}{2}\right)$, on a

$$|f(x) - a_0| \leqq \frac{2|x|}{R}\Psi\left(a_0, \frac{1}{2}\right) = \frac{|x|}{R}\psi(a_0), \qquad \left(|x| < \frac{R}{2}\right).$$

Si donc a_0 n'est pas très grand, et si $f(x)$ prend pour $x = \xi$ une valeur donnée b, $|\xi|$ n'étant pas très grand et $|b - a_0|$ n'étant pas très petit, on peut déterminer une limite supérieure de R.

En faisant un changement d'origine dans le plan des x, on obtient le théorème suivant :

Si une fonction $f(x)$ est régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et si l'on a

$$f(\xi) = a, \qquad f(\xi') = b \qquad (b \neq a),$$

on peut déterminer une limite supérieure de R *en fonction de ξ, ξ', a et b.*

Si l'on a de plus

$$(10) \qquad |a| < \omega, \qquad |b - a| > \varepsilon,$$

$$(11) \qquad |\xi| \leqq \omega', \qquad |\xi'| \leqq \omega',$$

on peut déterminer une limite supérieure de R *en fonction de ε, ω et ω'.*

Je vais maintenant, comme je l'ai annoncé, établir un théorème plus général dont voici l'énoncé :

Soient a et b deux constantes et U_f et V_f deux fonctionnelles vérifiant la condition suivante : lorsque la fonction $f(x)$ tend uniformément vers une constante quelconque α dans une région finie $\mathfrak{R}$ du plan, l'une au moins des inégalités

$$(12) \qquad U_f - a \neq 0, \qquad V_f - b \neq 0$$

est vérifiée à partir d'un certain instant ; il en est de même lorsque $\frac{1}{f(x)}$ tend uniformément vers zéro dans la région $\mathfrak{R}$.

Dans ces conditions, si $f(x)$ est une fonction régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et si l'on a de *plus*

$$(13) \qquad U_f = a, \qquad V_f = b,$$

on peut déterminer une limite supérieure de R.

Par hypothèse, il existe un nombre ω tel que l'inégalité

$$|f(x)| > \omega,$$

supposée vérifiée dans toute la région $\mathcal{R}$, entraîne l'une au moins des inégalités (12). De même, pour chaque valeur finie de α, on peut déterminer un nombre ε tel que l'inégalité

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

supposée vérifiée dans toute la région $\mathcal{R}$, entraîne l'une au moins des inégalités (12).

Je dis d'abord qu'on peut supposer ce nombre ε indépendant de la valeur considérée de α. La démonstration de ce fait est analogue à celle de la continuité uniforme des fonctions continues. Remarquons d'abord que pour $|\alpha| > \omega + 1$ on peut prendre $\varepsilon = 1$. Si donc le résultat énoncé était faux, on pourrait trouver une suite de valeurs de α, tendant vers une limite finie α', telles que les valeurs de ε correspondantes tendent nécessairement vers zéro; or il ne peut en être ainsi ; car, en appelant ε' la valeur de ε correspondant à α', la valeur $\frac{\varepsilon'}{2}$ convient certainement pour tous les nombres α tels que

$$|\alpha - \alpha'| \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Nous pouvons donc supposer ε indépendant de α.

La démonstration du théorème énoncé est alors immédiate. Il existe certainement dans $\mathcal{R}$ un nombre ξ tel que

$$|f(\xi)| = |a| < \omega,$$

car autrement les égalités (13) ne pourraient pas être vérifiées. Il existe, pour la même raison, un nombre ξ' tel que

$$|f(\xi') - a| = |b - a| > \varepsilon.$$

En appelant ω' la plus grande distance à l'origine d'un point de la région $\mathcal{R}$, on a

$$|\xi| < \omega', \quad |\xi'| < \omega'.$$

Les quatre inégalités précédentes sont identiques aux inégalités (10) et (11). On peut donc déterminer une limite supérieure de R, ce qu'il fallait établir.

Il est facile de se rendre compte que les restrictions imposées aux fonctionnelles U_f sont très peu restrictives. Les fonctionnelles que l'on considère en général sont continues, c'est-à-dire tendent vers une limite quand la fonction dont elles dépendent tend uniformément dans la région $\mathcal{R}$ vers une fonction limite $\varphi(x)$, sauf peut-être pour certaines déterminations particulières de $\varphi(x)$. Il en sera donc ainsi, en général, de U_f, si l'on prend pour $\varphi(x)$ une constante α différente de certaines valeurs exceptionnelles (α'). Pour les autres valeurs de α, la limite de U_f sera une fonction continue de α, qui peut être égale à a pour certaines valeurs (α''). La seconde condition (13) conduit de même à considérer des valeurs (β') et (β'') de α. Ces valeurs exceptionnelles de α formeront le plus souvent des suites finies ou dénombrables, de sorte qu'en général aucun nombre (fini ou infini) ne figurera à la fois dans l'une des suites (α') ou (α'') et dans l'une des suites (β') ou (β''). Les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème précédent sont donc vérifiées en général.

Considérons par exemple une condition de la forme

$$f(\xi) = a, \tag{14}$$

le point ξ étant intérieur à la région $\mathcal{R}$. Il n'y a aucune valeur exceptionnelle (α'), et la suite (α'') se réduit au nombre a. Si donc on prend deux conditions de cette forme, avec deux valeurs différentes du second membre, le théorème considéré s'applique et l'on retrouve le théorème qui nous a servi de point de départ.

Soit maintenant une condition de la forme

$$f^{(n)}(\xi') = b. \tag{15}$$

La suite (α') se réduit à la valeur $\alpha = \infty$. On voit donc déjà que deux conditions de cette forme ne conviendraient pas, car cette valeur serait singulière pour les deux. Les nombres (α'') comprennent tous les nombres si $b = 0$, et n'en comprennent aucun si $b \neq 0$. Dans ce dernier cas, on peut donc prendre une condition de la forme (14) et une de la forme (15), et le théorème considéré s'applique. Si $\xi' = \xi$, on retrouve ainsi le théorème de M. Landau généralisé par M. Schottky.

Le théorème qui vient d'être établi permet de former un exemple de *fonction de fonctionnelles*, c'est-à-dire de quantité dépendant d'une fonctionnelle comme une fonctionnelle dépend d'une fonction. En effet, les nombres positifs R se divisent en deux catégories suivant qu'il est ou non possible de déterminer une fonction $f(x)$ régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et vérifiant en outre les conditions (13). Ces deux catégories de nombres ont une limite commune bien déterminée ρ. Supposons pour fixer les idées que la première des conditions (13) ait la forme

$$f(0) = a \qquad (a \neq 0,\ a \neq 1);$$

ρ ne sera alors infini que dans le cas où a est une valeur exceptionnelle relative à la seconde condition considérée, et ne sera nul que dans le cas également particulier où cette condition sera incompatible avec la première. Cette quantité ρ est une fonction de la fonctionnelle $V_f - b$, et qui varie d'une manière continue avec les éléments qui servent à définir cette fonctionnelle.