

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DENJOY

Sur quelques propriétés des séries à termes positifs

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 223-228

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__223_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__223_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SÉRIES A TERMES POSITIFS;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

De toute série convergente à termes positifs, on peut déduire, suivant des règles fixes, des séries de même nature mais convergeant plus lentement que les premières. D'une façon précise, u_n étant le terme général de la première série, il est possible de définir une série convergente $v_n = u_n \omega_n$, ω_n étant une fonction donnée des u , croissant indéfiniment avec n . Habituellement, r_n étant le reste de la série arrêtée au terme u_n , c'est-à-dire r_n étant la somme de la série $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$, ω_n est une fonction donnée de r_n et des restes voisins. Je veux, dans cette Note, déterminer d'un certain point de vue le champ où peut varier cette fonction ω_n assurant la convergence de v_n , et, à cette fin, indiquer des types de fonctions ω_n très voisins des précédents, mais entraînant la divergence de v_n ; en un mot, et pour parler le langage de P. du Bois-Reymond, trouver parmi les fonctions ω la séparation correspondant à la limite entre la convergence et la divergence des séries v_n .

1. J'utiliserai pour établir ces résultats, l'artifice employé par Cauchy pour découvrir par le calcul d'une intégrale indéfinie la convergence ou la divergence d'une série.

PREMIER THÉORÈME. — $\varphi(x)$ étant une fonction positive, définie pour x positif et inférieur ou égal à a , décroissante

(*infiniment grande quand x est infiniment petit*); selon que l'intégrale $\int_0^x \varphi(x) dx$ a ou non un sens, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ est convergente, ou la série $u_n \varphi(r_n)$ est divergente.

Considérons une fonction $r(x)$ égale à r_x quand x est entier et variant linéairement entre deux valeurs entières consécutives de x . On vérifie immédiatement l'égalité

$$r(x) = u_n(n - x) + r_n \quad \text{pour} \quad n - 1 \leq x \leq n.$$

La fonction $r(x)$ est une fonction décroissante et tendant vers zéro quand x croît indéfiniment. $\varphi[r(x)]$ est donc une fonction de x croissante et infiniment grande simultanément avec x . Elle peut d'ailleurs n'exister qu'à partir d'une certaine valeur de x , suffisamment grande pour rendre $r(x)$ inférieur à a . Nous supposons évidemment, dans l'énoncé du théorème, $n - 1$ supérieur à cette valeur, ce qui est parfaitement loisible, la convergence ou la divergence d'une série ne dépendant pas des modifications apportées à un nombre fini de ses termes. x variant dans le champ que nous venons d'indiquer, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} r_{n-1} &> r(x) > r_n \quad \text{pour} \quad n - 1 < x < n, \\ \varphi(r_{n-1}) &< \varphi[r(x)] < \varphi(r_n). \\ \varphi(r_{n-1}) &< \int_{n-1}^n \varphi[r(x)] dx < \varphi(r_n). \end{aligned}$$

En multipliant par u_n les trois termes des deux dernières inégalités, et en remarquant que $u_n dx = -dr(x)$ dans l'intervalle $n - 1$ à n , on trouve :

$$u_n \varphi(r_{n-1}) < \int_{r_n}^{r_{n-1}} \varphi(u) du < u_n \varphi(r_n).$$

Donc

$$\sum_{n_0}^m u_n \varphi(r_{n-1}) < \int_{r_m}^{r_{n_0}} \varphi(u) du < \sum_{n_0}^m u_n \varphi(r_n).$$

Il suffit maintenant de faire croître m indéfiniment pour rendre évident le résultat énoncé.

Si l'intégrale $\int_0^{r_{n_0}} \varphi(u) du$ a un sens, la série

$$u_1 \varphi(s) + u_2 \varphi(r_1) + u_3 \varphi(r_2) + \dots$$

est convergente, en désignant par $s=r_0$ la somme de la série u .

La somme de la nouvelle série est même inférieure à $\int_0^s \varphi(u) du$.

Le reste de la série relatif au $n^{\text{ième}}$ terme est inférieur à $\int_0^{r_n} \varphi(u) du$.

Si au contraire l'intégrale $\int_0^a \varphi(u) du$ n'a pas de sens, c'est que l'intégrale $\int_\varepsilon^a \varphi(u) du$, croissant quand ε décroît, surpasse toute limite. Donc, la série

$$u_1 \varphi(r_1) + u_2 \varphi(r_2) + \dots$$

est divergente et, plus précisément, la somme de ses n premiers termes surpasse $\int_{r_n}^{r_1} \varphi(u) du$.

2. Donnons quelques applications du théorème précédent.

Comme fonctions $\varphi(x)$ dont une primitive est finie pour $x=0$, nous citerons les suivantes et toutes celles qu'elles surpassent en deçà d'une certaine valeur positive de x

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{x^{1-\alpha}}, \quad \frac{1}{x \left(L \frac{1}{x} \right)^{1+\alpha}}, \quad \dots, \quad \frac{1}{x L \frac{1}{x} \dots L_{p-1} \frac{1}{x} \left(L_p \frac{1}{x} \right)^{1+\alpha}},$$

α étant un nombre positif fixe, et $L_p \frac{1}{x}$ désignant le logarithme népérien de $L_{p-1} \frac{1}{x}$. (Il faut remarquer que $L_p \frac{1}{x}$ n'est défini que si x est inférieur à $\frac{1}{e_p}$ qui joue alors le rôle du nombre a de l'énoncé.

Je pose : $e_p = e^{e_{p-1}}$, et $e_1 = e$, base des logarithmes népériens.)

Les séries

$$\frac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}}}, \quad \frac{u_n}{r_{n-1}^{1-\alpha}}, \quad \frac{u_n}{r_{n-1} \left(L \frac{1}{r_{n-1}} \right)^{1+\alpha}}, \quad \dots, \\ \frac{u_n}{r_{n-1} L \frac{1}{r_{n-1}} \dots L_{p-1} \frac{1}{r_{n-1}} \left(L_p \frac{1}{r_{n-1}} \right)^{1+\alpha}}, \quad \dots$$

sont convergentes, tandis que les séries

$$\frac{u_n}{r_n}, \quad \frac{u_n}{r_n L \frac{1}{r_n}}, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{r_n L \frac{1}{r_n} \dots L_p \frac{1}{r_n}}$$

sont divergentes, quelle que soit la série convergente u_n à termes positifs.

La première série désignée dans cette liste diffère peu d'une autre donnée par M. Hadamard.

Si la série $\frac{u_n}{\sqrt{r_n}}$ est convergente, il en est *a fortiori* de même de la série

$$\frac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}.$$

La série $(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})$ à termes positifs et dont le terme général est un infiniment petit d'un ordre moindre que celui de u_n est convergente. C'est la série de M. Hadamard.

3. Peut-on, dans l'énoncé du théorème général, remplacer pour le cas de la convergence la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ par la série à termes supérieurs $u_n \varphi(r_n)$?

Si l'on considère des séries u_n lentement convergentes, $\frac{r_{n-1}}{r_n}$ tend vers 1. Si alors la décroissance de φ est suffisamment régulière, il est vraisemblable que la série $u_n \varphi(r_n)$ sera convergente. Ceci se vérifie, par exemple si $u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^{1-\beta}}$, α et β étant positifs.

Mais, l'intégrale de φ étant convergente au voisinage de 0, il n'est pas possible, sans mettre en défaut l'énoncé, de remplacer dans tous les cas la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ par la série $u_n \varphi(r_n)$. La première, nous l'avons montré, est toujours convergente. La seconde peut être divergente comme le montre l'exemple suivant :

Soit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Prenons $u_{n+1} = u_n^2$, à partir d'une certaine valeur de n , pour laquelle u_n est inférieur à $\frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} r_n &= u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \\ &= u_{n+1} + u_{n+1}^2 + u_{n+1}^{2^2} + \dots + u_{n+1}^{2^p} + \dots < \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} < 2u_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, $u_n \varphi(r_n)$ est ici supérieur à $\frac{u_n}{2\sqrt{u_{n+1}}} = \frac{1}{2}$. La série $u_n \varphi(r_n)$ diverge.

On montrerait sans peine que, $\varphi(x)$ étant une fonction positive

décroissante, si $\int_0^a \varphi(x) dx$ converge, ou même simplement si $x\varphi(x)$ tend vers zéro, avec x , la série définie par la formule de récurrence $u_n \varphi(u_{n+1}) = 1$ converge et cela assez rapidement pour que $\frac{r_n}{u_{n+1}}$ tende vers 1, ainsi que $\frac{\varphi(r_n)}{\varphi(u_{n-1})}$. La série $u_n \varphi(r_n)$ diverge donc, puisque son terme général tend vers 1. Quelle que soit la fonction φ dont l'intégrale converge, il est donc possible de mettre en défaut le théorème sur la convergence de la série $u_n \varphi(r_p)$, si l'on y prend $p = n$ au lieu de $p \leq n-1$.

Si l'intégrale de φ diverge au voisinage de l'origine, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ peut être convergente bien que $u_n \varphi(r_n)$ soit toujours divergente comme nous l'avons montré.

Cependant, la série $\frac{u_n}{r_{n-1}}$ diverge toujours, elle aussi, bien que la démonstration donnée plus haut établisse la divergence de $\frac{u_n}{r_n}$. On a en effet

$$\frac{u_n}{r_{n-1}} + \frac{u_{n+1}}{r_n} + \dots + \frac{u_{n+p}}{r_{n+p-1}} > \frac{1}{r_{n-1}} (u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}) = \frac{r_{n-1} - r_{n+p}}{r_{n-1}};$$

p croissant indéfiniment, la dernière expression tend vers 1 et non pas vers une limite infiniment petite pour n infini, comme l'exigerait, d'après le théorème de Cauchy, la convergence de la série $\frac{u_n}{r_{n-1}}$, si cette convergence se produisait.

Plus généralement, si $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ et si ψ croît indéfiniment, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ diverge, et non pas seulement la série $u_n \varphi(r_n)$.

On a en effet

$$u_n \varphi(r_{n-1}) + u_{n+1} \varphi(r_n) + \dots + u_{n+p} \varphi(r_{n+p-1}) \\ > \varphi(r_{n-1}) [u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}] = \varphi(r_{n-1}) (r_{n-1} - r_{n+p}).$$

Si donc $\varphi(r_{n-1}) = \frac{\psi(r_{n-1})}{r_{n-1}}$, $\psi(u)$ ne tendant pas vers zéro avec u , la série est divergente.

Mais supposons $\varphi(x) = \frac{1}{x\psi(x)}$, ψ croissant indéfiniment quand x tend vers zéro par valeurs positives [exemple $\psi(x) = L \frac{1}{x}$]. Alors, si u_n est une série très convergente, r_{n-1} est sensiblement

égal à u_n , $u_n \varphi(r_{n-1})$ est comparable à $\frac{1}{\psi(u_n)}$. Si $\psi(u_n) = n^2$, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ est convergente, bien que $u_n \varphi(r_n)$ soit divergent.

Donc il n'est pas possible de modifier, dans l'énoncé du théorème, l'indice des r sans restreindre la généralité des séries convergentes u_n , ni celle des fonctions φ classées en deux catégories suivant la convergence ou la divergence de leurs intégrales au voisinage de l'origine.

§. On montre exactement de même le théorème suivant :

SECOND THÉORÈME. — *Si la série à termes positifs u_n diverge, si $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, selon que l'intégrale $\int_n^\infty \Phi(x) dx$ a ou non un sens, Φ étant une fonction décroissante de x , la série $u_n \Phi(s_n)$ converge, ou la série $u_n \Phi(s_{n-1})$ diverge.*

Donc, les séries

$$\frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}}, \quad \frac{u_n}{s_n(Ls_n)^{1+\alpha}}, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{s_n Ls_n \dots L_{p-1} s_n (L_p s_n)^{1+\alpha}}, \quad \dots \quad (\alpha > 0)$$

convergent. Les séries

$$\frac{u_n}{s_{n-1}}, \quad \frac{u_n}{s_{n-1} Ls_{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{s_{n-1} Ls_{n+1} \dots L_p s_{n-1}}, \quad \dots$$

divergent.
