

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. A. DE SÉGUIER

Sur les produits directs

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 219-223

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__219_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__219_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES PRODUITS DIRECTS;

PAR M. DE SÉGUIER.

On connaît la propriété invariante des bases d'un groupe abélien d'ordre fini. Dans le Tome 139 du *Journal de Crelle* (p. 293-308), M. Remak a fait connaître une propriété invariante plus générale appartenant à tout produit direct. Le théorème ayant une forme bien classique, il ne sera peut-être pas inutile d'en donner une démonstration plus simple. Cette démonstration résulte, d'ailleurs, d'une remarque ayant, par elle-même, quelque intérêt sur les diviseurs maximum des produits directs (¹).

1. Soit A le produit direct des groupes A_1, \dots, A_n (A_i sera dit *facteur direct* de A, et *réduit* s'il n'est pas produit direct). Si $\Pi_1^n a_i = \Pi_1^n x_i$, a_i et x_i étant dans A_i , a_i coïncide avec x_i , car $a_i x_i^{-1}$ par exemple, étant dans $\Pi_2^n A_i$, est égal à 1. Si donc $\Pi_1^n a_i$ est permutable à $\Pi_1^n a'_i$, a'_i étant dans A_i , a_i l'est à a'_i .

(¹) Je me servirai, dans ce qui suit, de la même terminologie et des mêmes notations que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Paris, 1904) et dans mes *Éléments de la théorie des substitutions* (Paris, 1912). On en trouvera un index à la fin du second Ouvrage.

Si le groupe $G = \Sigma g (g = \Pi_1^n g_i, g_i \text{ étant dans } A_i^{(1)})$ divise A , le p. g. c. d. D_i de G , A_i est normal dans $\mathfrak{A}_i = \Sigma g_i$ (\mathfrak{A}_i sera dit le constitutif de G dans A_i), car le p. g. c. d. $g_i^{-1} D_i g_i$ de $g_i^{-1} \Pi_1^n D_k g_i (\leq G)$ avec A_i est $\leq D_i$. De plus $\mathfrak{A}_i | D_i \equiv G | \Pi_1^n D_k$ ⁽²⁾.

Si $n = 2$, et si $D_1 = A_1$, G , contenant évidemment \mathfrak{A}_2 , est le produit direct de A_1 par $\mathfrak{A}_2 = D_2$.

Si G divise le central A_0 de A , \mathfrak{A}_i divise celui A_{i0} de A_i , d'où $A_0 = \Pi A_{i0}$.

Ces remarques n'ont, d'ailleurs, rien de nouveau.

2. Il est clair que $\Pi \mathfrak{A}_i$ est $\geq G \geq \Pi D_i$. Soit $D_{ik\dots l}$ le p. g. c. d. de G avec $A_i A_k \dots A_l$, et $\mathfrak{A}_{ik\dots l}$ le constitutif de G dans $A_i A_k \dots A_l$. Pour $k < n$, $D_{12\dots k} = \Pi_1^k D_i (D_{1\dots n} = G)$, car $\mathfrak{A}_n | D_n$ est isomorphe d'une part à $G | \Pi_1^n D_i$ et d'autre part, en prenant $\mathfrak{A}_{1\dots k}$, \mathfrak{A}_{k+1} , ..., \mathfrak{A}_n pour constitutifs de G , à $G | D_{1\dots k} \Pi_{k+1}^n D_i$. De plus, si $G < A$, \mathfrak{A}_{ik} ne peut pas être égal à $A_i A_k$ quels que soient i et k . Cela est clair si $n = 2$. Soit $n > 2$. L'équation $A_i A_k | D_i D_k = A_l | D_l$ (i, k, l étant distincts) donne, en désignant les ordres de A_i , D_i par α_i , δ_i , $\frac{\alpha_i \alpha_k}{\delta_i \delta_k} = \frac{\alpha_l}{\delta_l}$, d'où, en permutant i, k, l et en multipliant, $\alpha_i \alpha_k \alpha_l = \delta_i \delta_k \delta_l$. Donc δ_i serait égal à α_i pour $i = 1, \dots, n$, et G à A .

Si \mathfrak{A}_1 est $< A_1$, G est $\leq \mathfrak{A}_1 \Pi_2^n A_i < A$. Supposons que $\mathfrak{A}_i = A_i$ quel que soit i , et soit $A_{12} < A_1 A_2$. Si alors \mathfrak{A}_i est le p. g. c. d. de \mathfrak{A}_{12} avec A_i , \mathfrak{A}_i est $< A_i$ (1). Donc a fortiori D_1 est $< A_1$ et $D_2 < A_2$ (D_1 est $\leq \mathfrak{A}_1$ et $D_2 \leq \mathfrak{A}_2$). Donc G est $\leq \mathfrak{A}_{12} A_3 \dots A_n < A$. Si donc G est maximum dans A , il est, ou de la forme $B \Pi_2^n A_i$, B étant maximum dans A_1 , ou de la forme $C \Pi_3^n A_i$, C étant maximum dans $A_1 A_2$ et ayant pour constitutifs A_1 et A_2 .

Si de plus A_1 et A_2 sont réduits, C est réduit. En effet, $A_1 | D_1 \equiv A_2 | D_2$ est ici simple ⁽³⁾. Donc D_1 est $\geq A_{10}$ et $D_2 \geq A_{20}$. Supposons C produit direct de C' et C'' , et soient \mathfrak{A}'_i , \mathfrak{A}''_i les cons-

(1) G est ici représenté comme la somme symbolique de ses éléments.

(2) Voir, par exemple, le n° 27 des *Éléments de la théorie des substitutions*, ou le n° 65 des *Éléments de la théorie des groupes abstraits*. La représentation de A obtenue en remplaçant chaque A_i par une de ses représentations transitives facilite beaucoup l'étude actuelle.

(3) *Loc. cit.*

titutifs respectifs de C' et C'' dans A_i . Le constitutif A_i de C est alors $\mathfrak{A}'_i \mathfrak{A}''_i$, et, les éléments de \mathfrak{A}'_i étant permutables à ceux de \mathfrak{A}''_i , le p. g. c. d. \mathfrak{D}_i de $\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}''_i$ est $\leq A_{i0} \leq D_i$. Or soit $c' = a'_1 a'_2$, un élément de C' et $c'' = a''_1 a''_2$ un élément de C'' , a'_i étant dans \mathfrak{A}'_i et a''_i dans \mathfrak{A}''_i . \mathfrak{D}_i étant $\leq D_i$, on peut former un élément $c'c''$ de C où a'_1 et a''_1 sont arbitraires dans \mathfrak{D}_i et $a'_2 a''_2 = 1$. Or si \mathfrak{D}_i est > 1 , on peut y prendre $a''_1 = a'^{-1}_1 \neq 1$, d'où $c'' = c'^{-1} \neq 1$, ce qui ne se peut. Donc $\mathfrak{D}_i = 1$. Mais alors, ou bien A_i serait produit direct, ou bien l'on aurait, par exemple, $\mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{A}''_1 = 1$ et $c = \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}''_2$, contre les hypothèses.

3. Soit $A' = \Pi'_i A'_i$ (les A'_i étant facteurs directs) un groupe isomorphe à A , les A_i et les A'_i pouvant n'être pas réduits. Si, dans l'isomorphisme considéré, $a' = \Pi a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) répond à $a = \Pi a_i$ (a_i étant dans A_i), on obtient un homomorphisme de A'_k à A_i en faisant correspondre a'_k à a_i . Cet homomorphisme peut, d'ailleurs, n'être pas isomorphe, même si $A'_k \equiv A_i$. Ainsi, pour $n = n' = 2$, $A_1 = \{\alpha, \beta\}$ ($\alpha^2 = \beta^3 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha$), $A_2 = \{\gamma\}$ ($\gamma^3 = 1$), $A'_1 = \{\alpha', \beta'\}$ ($\alpha'^2 = \beta'^3 = 1, \alpha'\beta' = \beta'\alpha'$), $A'_2 = \{\gamma'\}$ ($\gamma'^3 = 1$), $a = \alpha^x \beta^y \gamma^z$ ($a_1 = \alpha^x \beta^y, a_2 = \gamma^z$), $a' = \alpha'^x \beta'^y (\beta'\gamma')^z$ ($a'_1 = \alpha'^x \beta'^y \gamma'^z, a'_2 = \gamma'^z$), à chaque $a_1 = \alpha^x \beta^y$ répondent les trois $a'_1 = \alpha'^x \beta'^y \gamma'^z$ ($z = 0, 1, 2$), et à chaque $a'_1 = \alpha'^x \beta'^y$, les trois $a_1 = \alpha^x \beta^y \gamma^z$ ($z = 0, 1, 2$).

Si $n = n' = 2$, et si, dans l'isomorphisme de A à A' , A_2 répond isomorphiquement à A'_2 , la correspondance de ceux des éléments a et a' où $a_2 = a'_2 = 1$ fournit un isomorphisme de A_1 à A'_1 bien que la correspondance de tous les a à tous les a' puisse ne fournir qu'un homomorphisme non isomorphe de A_1 à A'_1 (l'exemple précédent le montre). Il est clair d'ailleurs qu'à chaque isomorphisme de A_1 à A'_1 et de A_2 à A'_2 répond un isomorphisme de A à A' .

4. Deux divisions X et X' de A sont dits *centralement isomorphes dans A* quand on peut établir entre eux une correspondance isomorphe où l'élément x' de X' qui répond à l'élément x de X est $\equiv x \bmod A_0$ (alors $A_0 X = A_0 X'$). Une telle correspondance, *effectivement établie*, sera dite abrégativement *correspondance centrale de X à X' dans A* .

Soit $A' = \Pi''_i A'_i$ (les A'_i étant facteurs directs) un groupe

centralement isomorphe à A dans le produit direct de A par un groupe abélien déterminé quelconque K ($AK = A'K$), les A_i et les A'_i étant réduits. Alors $n' = n$, et l'on peut établir entre A et A' une correspondance centrale dans AK où chaque A'_i correspond centralement à un A_i dans AK.

On peut admettre le théorème quel que soit K pour des groupes A et A' d'ordre moindre. Soit \mathcal{C} une correspondance centrale donnée de A à A' dans AK. Supposons d'abord qu'un A_i tel que A_1 soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i tel que A'_1 , et soit A'' le groupe déduit de A en y remplaçant A_1 par A'_1 . Il résulte immédiatement des équations de A qu'on obtient une correspondance centrale \mathcal{C}' de A'' à A dans AK en remplaçant dans \mathcal{C} chaque élément de A_1 par l'élément de A'_1 qui lui correspond (dans \mathcal{C}). Soit $\Pi'_1 a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) l'élément de A' qui répond dans \mathcal{C}' à $a'_1 \Pi'_2 a_i$ (a_i étant dans A_i) de A''. La considération des éléments où $a'_1 = 1$ montre que $\Pi'_2 A_i$ répond, dans \mathcal{C} comme dans \mathcal{C}' à $\Pi'_2 A'_i$, et l'on est ramené à des groupes d'ordre moindre.

Supposons donc qu'aucun A_i ne soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i . Supposons aussi A_1 d'ordre non premier (si tous les A_i sont d'ordre premier, on peut supposer qu'il en est de même des A'_i , sans quoi on échangerait A et A'; le théorème est alors évident, A et A' ayant le même ordre), et soit B un diviseur maximum de A_1 . Alors $G = B\Pi_2^A A_i$ est un diviseur maximum de A_i contenant A_0 . Son correspondant par C dans A' a la forme $G' = X\Pi' A'_i$, X étant, ou un diviseur maximum B' de A'_1 , ou un diviseur C' de constitutifs A'_1 et A'_2 , maximum dans $A'_1 A'_2$ et réduit : Π' s'étend, si $X = B'$, à $A'_2, \dots, A'_{n'}$, et si $X = C'$, à $A'_3, \dots, A'_{n'}$. Il est clair que \mathcal{C} fournit une correspondance centrale de G à G' dans GKA_0 , et le théorème peut être admis relativement à cet isomorphisme central. Or A_n , qui n'est centralement isomorphe dans AK à aucun A'_i , ne l'est, dans $GKA_0 (= G'KA_0)$ à aucun A'_i de Π' . Car si, dans un tel isomorphisme, un élément x de A_n correspondait à un élément $x' = \alpha_1 \alpha_0 x$ de A'_j , α_0 étant dans KA_0 et α_1 dans A_1 hors de A_0 , le normalisant de x' dans A' serait d'ordre inférieur à celui de x dans A [pour que $\alpha_1 \dots \alpha_n$ (α_i étant dans A_i) soit permutable à $\alpha_1 \alpha_0 x$, il faut que α_1 le soit à α_1 , et le normalisant de α_1 est $< A_1$]. Donc A_n est centralement isomorphe dans GKA_0 à un facteur direct Δ de X, et AK est produit direct

de $A_1, \dots, A_{n-1}, \Delta, K$. Si alors $X = B' < A'_1$, A'_1 , diviseur du produit direct de Δ par $K \Pi_1^{n-1} A_i$ et contenant Δ , n'est pas réduit (1), contre l'hypothèse. Si $X = C' < A'_1 A'_2$, C' , étant réduit, est centralement isomorphe dans GKA_0 à A_n . Donc, si $n > 2$, puisque le théorème est admis pour G et G' dans GKA_0 , un des A_i est centralement isomorphe dans AK à un A'_i , contre l'hypothèse. Si $n = 2$, on peut supposer aussi que $n' = 2$ (sans quoi on échangerait A et A'), et l'équation $BA_2 = C'$ donne $B = 1$. Donc A_1 serait d'ordre premier, contre l'hypothèse.
