

BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur les groupes pseudo-nuls et non commutatifs de quantités hypercomplexes

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 187-200

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__187_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES GROUPES PSEUDO-NULS ET NON COMMUTATIFS
DE QUANTITÉS HYPERCOMPLEXES.**

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans deux Notes précédentes ⁽¹⁾ j'ai étudié les groupes commu-

(¹) I. FROBENIUS, *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, avril 1903).

II. CARTAN, *Sur les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de l'Université de Toulouse*, t. XII, 1898).

III. AUTONNE, *Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1909).

IV. AUTONNE, *Sur les groupes commutatifs de quantités hypercomplexes*, (même Recueil, 1911).

On renverra à la présente liste par une notation telle que celle-ci (*Index*, II), pour désigner, par exemple, le travail de M. Cartan.

Un Mémoire assez étendu sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls paraîtra dans les *Annales de l'Université de Lyon* en 1912.

tatifs et pseudo-nuls de quantités hypercomplexes. Dans cette troisième Note, je me propose d'examiner jusqu'à quel point les résultats obtenus s'étendent aux groupes pseudo-nuls généraux, c'est-à-dire non commutatifs.

Les notations et la terminologie précédemment employées sont conservées; cela me dispensera de les rappeler ici.

Dans un groupe (ε) , m -aire, pseudo-nul et non commutatif, de quantités hypercomplexes x , la matrice antistrophe $T(x) = T_x$ ne se confond plus avec la matrice $S(x) = S_x$ du groupe. On a, pour x et y arbitraires, la relation $S_x T_y = T_y S_x$, qui exprime que dans (ε) la multiplication est associative.

Voici les principaux résultats qu'on trouve :

A tout groupe (ε) correspond sans ambiguïté un système de k entiers positifs g_λ , $\{\lambda = 1, 2, \dots, k; k \leq m\}$, $\sum_\lambda g_\lambda = m$, tels que (pour un choix convenable de variables) on ait à la fois

$$(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, k), \quad S_x = (p_{\rho\mu}(x)), \quad T_x = (q_{\lambda\mu}(x)),$$

où $p_{\lambda\mu}$ et $q_{\lambda\mu}$ sont des Tableaux à g_λ lignes et g_μ colonnes, formés avec des éléments de S_x et de T_x avec $p_{\lambda\mu}(x) \equiv 0$, $q_{\lambda\mu}(x) \equiv 0$, pour $\mu \geq \lambda$.

On a ainsi une *forme réduite* entièrement analogue à celle qui se présente pour les groupes commutatifs.

Répartissons comme précédemment (*Index*, IV, 18) les m unités ε_α , $\{\alpha = 1, 2, \dots, m\}$ en k systèmes ε_λ , à g_λ termes. On a encore la proposition : *le produit d'une unité de ε_μ par une unité de ε_ν ne dépend que des unités de ε_λ , $\varepsilon_{\lambda 1}, \dots, \varepsilon_k$, λ étant le plus petit entier qui surpasse à la fois μ et ν .*

Le *prolongement* d'un groupe se fait comme en matière de groupes commutatifs.

J'en profite pour démontrer que tous les groupes, où $g_\lambda = 1$ et, par suite, $k = m$, sont commutatifs et sont parmi ceux construits précédemment.

Décembre 1911.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. Prenons un groupe non commutatif (ε) , dont les m unités ε_α , $\{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, m\}$ se multiplient suivant les formules (les $\alpha_{\beta\gamma}$ étant des constantes ordinaires, réelles ou complexes),

$$(1) \quad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha \alpha_{\beta\gamma}.$$

Si $z = xy$ est le produit des deux quantités hypercomplexes $x = \sum_{\beta} \varepsilon_\beta x_\beta$ et $y = \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma y_\gamma$, dans l'ordre indiqué des facteurs, on a

$$(2) \quad z_\alpha = \sum_{\beta\gamma} \alpha_{\beta\gamma} x_\beta y_\gamma.$$

2. Nommons $u_\alpha, x_\beta, y_\gamma$, trois m paramètres quelconques et $F(u, x, y)$ la forme trilinéaire

$$(3) \quad F(u, x, y) = \sum_{\alpha\beta\gamma} \alpha_{\beta\gamma} u_\alpha x_\beta y_\gamma.$$

Soient

$$\begin{aligned} r_{\beta\gamma}(u) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial y_\gamma} = \sum_{\alpha} u_\alpha \alpha_{\beta\gamma} \\ s_{\alpha\gamma}(x) &= \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \partial y_\gamma} = \sum_{\beta} x_\beta \alpha_{\beta\gamma}, \\ t_{\alpha\beta}(y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \partial x_\beta} = \sum_{\gamma} y_\gamma \alpha_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

M. Frobenius (*Index*, I) introduit trois matrices m -aires :
la matrice du groupe

$$S(x) = S_x = [s_{\alpha\gamma}(x)],$$

la matrice antistrophe

$$T(y) = T_y = [t_{\alpha\beta}(y)],$$

la matrice parastrophe

$$R(u) = R_u = [r_{\beta\gamma}(u)].$$

Le groupe (ε) est défini sans ambiguïté par une quelconque de ces trois matrices.

3. Désignons par $f_\alpha(x; \gamma)$ la forme bilinéaire (1)

$$z_\alpha = (x\gamma)_\alpha = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \gamma_\gamma;$$

on a

$$s_{\alpha\gamma}(x) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \gamma_\gamma}; \quad t_{\alpha\beta}(\gamma) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

La connaissance des m formes bilinéaires $f_\alpha(x; \gamma)$ assure sans ambiguïté celle du groupe (ε) et l'on peut écrire

$$(\varepsilon) = (f_1, f_2, \dots, f_\alpha, \dots, f_m).$$

Pour que (ε) soit commutatif, il faut et il suffit que chacune des formes bilinéaires f_α soit symétrique.

4. Rappelons enfin les formules (*Index*, I)

$$\begin{aligned} S(xy) &= S_x S_y; & T(xy) &= T_y T_x, \\ S_x T_y &= T_y S_x & \text{ou} & & R_u S_x &= T'_x R_u \end{aligned}$$

pour x, γ, u quelconques, dont les deux dernières expriment, l'une ou l'autre, que la multiplication est, dans le groupe (ε) , associative.

D'ailleurs tout système de m^3 constantes $a_{\alpha\beta\gamma}$, telles que : 1° S_x et T_γ soient échangeables; 2° les deux déterminants $|\rho E - S_x|$ et $|\rho E - T_\gamma|$ soient égaux à ρ^m , définit sans ambiguïté un groupe pseudo-nul (ε) .

5. Soit $B = (b_{\alpha\beta})$ une matrice m -aire quelconque; posons

$$Y_\alpha = \sum_{\beta} X_\beta b_{\alpha\beta}.$$

On écrira symboliquement $Y = B[X]$.

Alors on voit que la formule (2) du n° 1 s'écrit

$$(1) \quad xy = S_x[\gamma] = T_\gamma[x].$$

6. $C = (c_{\alpha\beta})$ étant une matrice invertible, posons (*Index*, I, § 9)
 $\varepsilon = C' [\bar{\varepsilon}]$ c'est-à-dire $\varepsilon_{\beta} = \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} c_{\alpha\beta}$.

On aura $\bar{x} = C[x]$, pour

$$x = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} x_{\alpha} = \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} \bar{x}_{\alpha},$$

et les formules de multiplication

$$\bar{\varepsilon}_{\beta} \bar{\varepsilon}_{\gamma} = \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} \bar{a}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Nommons $\bar{S}$, $\bar{T}$, $\bar{R}$ les matrices construites avec les $\bar{a}_{\alpha\beta\gamma}$, comme S , T , R sont construites avec les $a_{\alpha\beta\gamma}$. On a les formules

$$\begin{aligned} S_x &= C^{-1} \bar{S}(\bar{x}) C, & T_y &= C^{-1} \bar{T}(\bar{y}) C, \\ R_u &= C' \bar{R}(\bar{u}) C, & R'_u &= C' \bar{R}'(\bar{u}) C \end{aligned}$$

avec $u = C'[\bar{u}]$.

Comme la forme bilinéaire $f_{\alpha}(x, y)$ n'est pas autre chose que la coordonnée $(xy)_{\alpha}$ de xy , on a

$$\bar{f}_{\alpha}(\bar{x}; \bar{y}) = C[f(x; y)],$$

en vertu des formules ci-dessus.

7. Supposons que (ε) soit un groupe pseudo-nul et prenons dans (ε) la quantité hypercomplexe quelconque x .

Nommons σ le plus petit entier positif tel que $x^{\sigma} = 0$. Comme $S(0) = T(0) = 0$, il vient

$$0 = S(x^{\sigma}) = S_x^{\sigma} = T(x^{\sigma}) = T_x^{\sigma}$$

et

$$|\rho E - S_x| = |\rho E - T_x| = \rho^m.$$

Une certaine puissance de S_x et T_x est nulle; soient p et q les entiers positifs minima, tels que

$$S_x^p = S(x^p) = 0, \quad T_x^q = T(x^q) = 0.$$

Les formules (1) du n° 5 donnent

$$x^{p+1} = S_{x'}[x] = 0, \quad x^{q+1} = T_{x''}[x] = 0;$$

donc

$$\sigma \leq p + 1, \quad \sigma \leq q + 1.$$

Les déterminants $|\rho E - S_x|$ ou $|\rho E - T_x|$ décomposés en leurs successifs (*Elementarteiler*) donnent, en vertu de théories connues,

$$\begin{aligned} |\rho E - S_x| &= \rho^p \rho^{p'}, & \dots & p \geq p' \geq \dots, \\ |\rho E - T_x| &= \rho^q \rho^{q'}, & \dots & q \geq q' \geq \dots \end{aligned}$$

Cela fournit la manière de calculer p et q . Il est évident que si l'on particularise x en lui attribuant une valeur $x = \xi$ convenablement choisie, on peut avoir une autre décomposition

$$\begin{aligned} |\rho E - S_\xi| &= \rho^\varpi \rho^{\varpi'}, & \dots & \varpi \geq \varpi' \geq \dots, \\ |\rho E - T_\xi| &= \rho^\chi \rho^{\chi'}, & \dots & \chi \geq \chi' \geq \dots \end{aligned}$$

seulement, en vertu même de la théorie des successifs, $\varpi \leq p$, $\chi \leq q$.

Voici comment on s'en assure :

Nommons par exemple $\Delta_{\alpha\beta}(\rho; x)$, les premiers mineurs du déterminant $|\rho E - S_x|$, $\{\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m\}$. On aura, par définition,

$$\Delta_{\alpha\beta}(\rho; x) = \rho^{m-p} \{ P_{\alpha\beta 0}(x) + \rho P_{\alpha\beta 1}(x) + \dots \},$$

un au moins des m^2 polynomes $P_{\alpha\beta 0}(x)$ étant donné $\neq 0$. Pour $x = \xi$, il peut se faire que tous les polynomes $P_{\alpha\beta 0}(\xi)$, $P_{\alpha\beta 1}(\xi)$, ..., $P_{\alpha\beta, h-1}(\xi)$ soient nuls à la fois. Les $\Delta_{\alpha\beta}(\rho; \xi)$ sont divisibles par ρ^{m-p+h} , sans l'être par $\rho^{m-p+h+1}$. Il vient alors par définition $\varpi = p - h \leq p$.

De même pour le déterminant $|\rho E - T_x|$.

CHAPITRE II.

FORME RÉDUITE.

8. Un théorème dû à M. Cartan (*Index*, II, 35) dit ceci : *dans tout groupe pseudo-nul, il existe au moins un nombre η , $\eta \neq 0$, tel que, pour x quelconque dans le groupe, on ait à la fois $y\eta = \eta x = 0$.*

Alors [formules (1) du n° 5]

$$0 = S_{\eta}[x] = T_{\eta}[x];$$

comme x est quelconque, il vient les $2m^2$ équations

$$S_{\eta} = 0 = s_{\alpha\beta}(\eta), \quad T_{\eta} = 0 = t_{\alpha\beta}(\eta)$$

aux m inconnues η_{α} .

Ces $2m^2$ équations doivent se réduire à h distinctes, $h < m$, qu'on peut toujours (6) supposer être $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_h = 0$, $\eta_{h+1}, \dots, \eta_m$ restant arbitraires. S_{η} et T_{η} ne contiennent que $\eta_1, \dots, \eta_h$; par suite

$$\begin{aligned} \text{pour } S_{\eta}, \alpha\beta\gamma &= 0 && (\text{pour } \beta > h, \alpha \text{ et } \gamma \text{ quelconques}), \\ \text{pour } T_{\eta}, \alpha\beta\gamma &= 0 && (\text{pour } \gamma > h, \alpha \text{ et } \beta \text{ quelconques}); \\ t_{\alpha\beta}(\gamma) &\equiv 0 && (\text{pour } \alpha \text{ quelconque, } \beta > h), \\ s_{\alpha\gamma}(x) &\equiv 0 && (\text{pour } \alpha \text{ quelconque, } \gamma > h). \end{aligned}$$

S_x et T_y ont, pour x et y quelconques, leurs $m - h$ dernières colonnes composées de zéros.

Par suite

$$S_x = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}(x) & 0 \\ \mathfrak{P}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ m-h \end{matrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}(y) & 0 \\ \mathfrak{Q}(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ m-h \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} h, & m-h, \\ h, & m-h, \end{matrix}$$

$\mathfrak{L}(x), \mathfrak{M}(y)$ = matrice h -aire

$\mathfrak{P}(x), \mathfrak{Q}(y)$ = Tableau à $m - h$ lignes et h colonnes.

9. Les matrices S_x et T_y sont échangeables (4); les matrices h -aires $\mathfrak{L}(x)$ et $\mathfrak{M}(y)$ le sont donc aussi.

Les relations (7)

$$|\rho E - S_x| = |\rho E - T_y| = \rho^m$$

entraînent, $\{E_h = h$ -aire unité

$$|\rho E_h - \mathfrak{L}(x)| = |\rho E_h - \mathfrak{M}(y)| = \rho^h.$$

Donc (n° 4, in fine) $\mathfrak{L}(x)$ et $\mathfrak{M}(y)$ sont la matrice et la matrice antistrophe d'un groupe $(\mathfrak{S})$ h -aire et pseudo-nul, aux h unités $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h$.

On peut reprendre sur $(\mathfrak{S})$ le même raisonnement que sur (ε) et

les mêmes considérations que précédemment (*Index*, IV, 16 à 22). On arrive ainsi à diverses propositions que j'énoncerai sans démonstration et qui sont la généralisation de ce qui se passe pour les groupes commutatifs.

10. S_x et T_y peuvent se mettre sous la *forme réduite*

$$S_x = \begin{vmatrix} 0 & & & & & & & \\ p_{21} & 0 & & & & & & \\ p_{31} & p_{32} & 0 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & \dots & p_{\lambda \mu} & \dots & p_{\lambda, \lambda-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & p_{k, k-1} & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_y = \begin{pmatrix} 0 & & \\ q_{21} & 0 & \\ \dots & \dots & \end{pmatrix},$$

où $p_{\lambda\mu} = p_{\lambda\mu}(x)$ et $q_{\lambda\mu} = q_{\lambda\mu}(y)$ sont des Tableaux à g_λ lignes et g_μ colonnes empruntées respectivement à S_x et T_y , avec $m = g_1 + g_2 + \dots + g_k$, $\{\lambda, \mu = 1, 2, \dots, k\}$, $k \leq m$. De plus, $p_{\lambda\mu}(x) = q_{\lambda\mu}(y) \equiv 0$ pour $\mu \geq \lambda$.

Si l'on considère $p_{\lambda\mu}$ ou $q_{\lambda\mu}$ comme une lettre unique, on a deux matrices k -aires

$$P = (p_{\lambda\mu}), \quad Q = (q_{\lambda\mu})$$

qui sont respectivement le canevas de S_x et de T_y .

11. On répartira

Les unités ϵ_α	en systèmes...	$\mathcal{E}_\lambda$
Les variables x_α	»	$\mathcal{X}_\lambda$
Les variables y_α	»	$\mathcal{Y}_\lambda$
Les formes bilinéaires $f_\alpha(x, y)$.	»	$\mathcal{F}_\lambda$
$(\alpha = 1, 2, \dots, m)$		$(\lambda = 1, 2, \dots, k).$

de la même façon que précédemment (*Index*, IV, 18), le système d'indice λ étant à g_λ termes.

On dira que l'entier α , pris dans la suite $1, 2, \dots, m$, appartient à l'indice λ , pris dans la suite $\lambda = 1, 2, \dots, k$, si x_α , par exemple, figure dans le système $\mathcal{X}_\lambda$. Pour mettre en évidence

les k entiers g_λ , on emploiera la notation

$$(\epsilon) = \{ x_1, \dots, x_{g_1}; x_{g_1+1}, \dots, x_{g_1+g_2}; \dots; \dots, x_{m-1}, x_m \}.$$

Autrement dit, on séparera :

- 1° Par le point et virgule, les différents systèmes $\mathcal{N}_\lambda$;
- 2° Par la virgule, les différentes variables x_α d'un même système $\mathcal{N}_\lambda$.

12. On aura encore (*Index*, IV, 20) la proposition que voici :
le produit d'une unité du système $\mathcal{E}_\mu$ par une unité du système $\mathcal{E}_\nu$ ne dépend que des unités de $\mathcal{E}_\lambda$, $\mathcal{E}_{\lambda+1}$, ..., $\mathcal{E}_k$, où λ désigne le plus petit entier qui dépasse à la fois μ et ν .

13. Les formes bilinéaires $f_\alpha(x; y)$ du système $\mathcal{F}_\lambda$ ne contiennent que les variables des systèmes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{\lambda-1}$ et $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_{\lambda-1}$. Si une variable x_α de $\mathcal{N}_{\lambda-1}$ ne figure dans aucune des expressions $f_\alpha(x; y)$ de $\mathcal{F}_\lambda$, alors la variable y_α de $\mathcal{J}_{\lambda-1}$ figurera sûrement dans une au moins des formes bilinéaires $f_\alpha(x; y)$ de $\mathcal{F}_\lambda$.

Cela résulte immédiatement du raisonnement du paragraphe 8.

CHAPITRE III.

PROLONGEMENT D'UN GROUPE.

14. Je dirai qu'un groupe (ζ) pseudo-nul et $(m+1)$ -aire a la forme Z (*Index*, IV, 27) si l'on a, pour un nombre quelconque x de (ζ) ,

$$x \varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1} x = 0.$$

Tout groupe peut être mis sous la forme Z, car tout groupe peut-être mis sous la forme réduite, laquelle n'est qu'un cas particulier de la forme Z.

Un groupe conserve la forme Z après transformation par une collinéation (*Index*, IV, 27)

$$C = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}$$

$m-1,$

laquelle, laissant ε_{m+1} fixe, soumet les m premières unités à une collinéation quelconque m -aire D.

15. Si, pour x quelconque $x\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1}x = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_\beta \varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1} \varepsilon_\beta \\ 0 &= \alpha_{\alpha\beta, m+1} = \alpha_{\alpha, m+1, \beta} \quad \{ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m+1 \}. \end{aligned}$$

Nommons S_x et $\mathfrak{S}_y$ la matrice et la matrice antistrophe du groupe $(m+1)$ -aire (ζ) . On voit que S_x et $\mathfrak{S}_y$ ont leur dernière colonne composée de zéros :

$$S_x = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ L_x & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}, \quad \mathfrak{S}_y = \begin{pmatrix} T_y & 0 \\ M_y & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}.$$

Le même raisonnement qu'au n° 9 montre que S_x et T_y sont la matrice et la matrice antistrophe d'un groupe m -aire (ε) pseudo-nul.

On dira encore (*Index*, IV, 29) que le groupe (ζ) est le *prolongement* du groupe (ε) , qu'on passe de (ε) à (ζ) par *prolongement*, qu'on obtient (ζ) en *prolongeant* (ε) , etc.

16. (ζ) reste le prolongement de (ε) quand on fait intervenir la collinéation $(m+1)$ -aire C du n° 14. On peut profiter de l'indétermination de la collinéation m -aire D, qui transforme (ε) , pour mettre (ε) sous forme réduite. Donc encore (*Index*, IV, 30) *tous les groupes $(m+1)$ -aires pseudo-nuls s'obtiennent en prolongeant des groupes pseudo-nuls m -aires, mis sous forme réduite.*

17. Voici comment (*Index*, IV, 31) s'opérera le calcul effectif du groupe prolongé (ζ) , le groupe (ε) étant supposé connu et pris sous forme réduite.

On a à exprimer que les deux matrices $(m+1)$ -aires S_x et $\mathfrak{S}_y$ (15) sont échangeables. Les deux matrices m -aires S_x et T_y le sont déjà par hypothèse. On n'a donc plus qu'à écrire les m égalités $\{ \beta = 1, 2, \dots, m \}$

$$(0) \quad \sum_{\rho} s_{m+1, \rho}(x) t_{\rho \beta}(y) = \sum_{\rho} t_{m+1, \rho}(y) s_{\rho \beta}(x),$$

où $\rho = \beta + 1, \beta + 2, \dots, m$, puisque, dans les matrices T_y et S_x , sont nuls les éléments où le premier indice ne surpasse pas le

second. Cela résulte de la forme réduite. Les formules (o) développées sont

$$\sum_{\rho} \sum_{\lambda} x_{\lambda} a_{m+1, \lambda \rho} \sum_{\mu} y_{\mu} a_{\rho \beta \mu} = \sum_{\rho} \sum_{\mu} a_{m+1, \rho \mu} y_{\mu} \sum_{\lambda} x_{\lambda} a_{\rho \lambda \beta}.$$

Identifions de part et d'autre les coefficients de $x_{\lambda} y_{\mu}$; il vient

$$\sum_{\rho} a_{m+1, \lambda \rho} a_{\rho \beta \mu} = \sum_{\rho} a_{m+1, \rho \mu} a_{\rho \lambda \beta};$$

sont connus tous les coefficients $a_{\alpha \beta \gamma}$ où $\alpha < m + 1$, puisque ces coefficients figurent dans le groupe (ε). Posons $a_{m+1, \beta \gamma} = b_{\beta \gamma}$. Les m^2 quantités $b_{\beta \gamma}$ $\{\beta, \gamma = 1, 2, \dots, m\}$ sont ceux de la forme bilinéaire $f_{m+1}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m)$.

18. Tout compte fait, on a à résoudre par rapport aux m^2 inconnues $b_{\beta \gamma}$ le système des m^3 équations linéaires et homogènes, $\{\beta = 1, 2, \dots, m\}$

$$[\beta] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\rho} b_{\lambda \rho} a_{\rho \beta \mu} = \sum_{\rho} b_{\rho \mu} a_{\rho \lambda \beta} \\ (\rho = m, m-1, \dots, \beta+1; \lambda, \mu = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right.$$

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

19. J'ai construit (*Index*, IV, 23 à 25) les groupes commutatifs et pseudo-nuls, pour lesquels, dans la forme réduite (10), $k = m$ et tous les g_{λ} sont égaux à l'unité. Ces groupes se confondent avec les groupes commutatifs et pseudo-nuls de rang maximum, c'est-à-dire avec ceux où la matrice S_x a le rang maximum $m - 1$. On a pour la forme réduite $s_{\alpha \beta}(x) = x_{\alpha - \beta}$.

20. On va montrer que *tous les groupes, où tous les g_{λ} sont égaux à l'unité, sont des groupes commutatifs*. On ne parle, bien entendu, que des groupes pseudo-nuls.

Faisons d'abord $m = 2$ et, avec les notations du n° 11, (ε) = $(x_1; x_2)$. Alors $f_1(x; y) = 0$, $f_2(x; y) = a_{21} x_1 y_1$. Les deux

formes bilinéaires $f_{\alpha}(x; y)$ sont symétriques et le groupe est commutatif (3).

Montrons que, si la proposition est vraie pour $m - 1$, elle est vraie aussi pour m .

Il est évident que, pour construire le groupe m -aire cherché, il faut prolonger le groupe commutatif $(m - 1)$ -aire de rang maximum.

21. On a à appliquer les formules des nos 17 et 18, en changeant m en $m - 1$.

Il faut calculer les coefficients de la forme bilinéaire $f_m(x; y)$, où ne peuvent figurer ni x_m , ni y_m , mais où figure effectivement une au moins des deux variables x_{m-1} et y_{m-1} des systèmes $\mathcal{X}_{m-1}$ et $\mathcal{Y}_{m-1}$ (13). On ne peut donc avoir simultanément

$$s_{m,m-1}(x) = \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} = 0, \quad t_{m,m-1}(y) = \frac{\partial f_m}{\partial x_{m-1}} = 0.$$

22. Exprimons que les deux matrices S_x et T_y du groupe m -aire cherché sont échangeables. Il suffira, en vertu de la théorie du prolongement, d'exprimer que $(S_x T_y)_{m\beta} = (T_y S_x)_{m\beta}$, pour $\beta = 1, 2, \dots, m - 2$, car on a évidemment

$$0 = (S_x T_y)_{mm} = (T_y S_x)_{mm} = (S_x T_y)_{m, m-1} = (T_y S_x)_{m, m-1}.$$

Il vient ainsi les $m - 2$ équations

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\rho} s_{m,\rho}(x) t_{\rho\beta}(y) = \sum_{\sigma} t_{m,\sigma}(y) s_{\sigma\beta}(x) \\ (\rho, \sigma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, m - 1; \beta = 1, 2, \dots, m - 2). \end{array} \right.$$

Les deux sommes comprennent $m - 1 - \beta$ termes.

23. Posant

$$s_{m,\rho}(x) = \frac{\partial f_m}{\partial y_{\rho}} = s_{\rho}(x),$$

$$t_{m,\sigma}(y) = \frac{\partial f_m}{\partial x_{\sigma}} = t_{\sigma}(y),$$

et remarquant que (19) $s_{\sigma\beta}(x) = x_{\sigma - \beta}$, $t_{\rho\beta}(y) = y_{\rho - \beta}$, on écrira

plus simplement

$$\sum_{\rho} y_{\rho-\beta} s_{\rho}(x) = \sum_{\sigma} x_{\sigma-\beta} t_{\sigma}(y).$$

Tout compte fait, les expressions $s_{\rho}(x)$ et $t_{\sigma}(y)$ sont liées par les $m-2$ relations, $\{\beta = 1, 2, \dots, m-2\}$

$$[\beta] \quad y_1 s_{\beta+1}(x) + y_2 t_{\beta+2}(x) + \dots + y_{m-1-\beta} s_{m-1}(x) \\ = x_1 t_{\beta+1}(y) + \dots + x_{m-1-\beta} t_{m-1}(y).$$

24. Désignons par $Q_{\sigma}(x; y) = Q_{\sigma}(y; x)$ la forme bilinéaire symétrique $x_1 y_{\sigma-1} + x_2 y_{\sigma-2} + \dots + x_{\sigma-1} y_1$.

LEMME. — On a $s_{\rho}(x) = t_{\rho}(x) = Q_{m+1-\rho}(K; x)$, les K étant des constantes.

Je dis que le lemme est vrai pour $\rho = m-1$. En effet, la relation $[\beta]$ ci-dessus donne

$$y_1 s_{m-1}(x) = x_1 t_{m-1}(y).$$

On ne peut avoir (21)

$$s_{m,m-1}(x) = s_{m-1}(x) = t_{m,m-1}(y) = t_{m-1}(y) \equiv 0;$$

donc

$$s_{m-1}(x) = t_{m-1}(x) = k_1 x_1 = Q_2(K; x),$$

ce qui est conforme au lemme.

On va établir que, si le lemme est vrai pour

$$\rho = m-1, m-2, \dots, \beta+2,$$

il est vrai aussi pour $\beta+1$, c'est-à-dire que le lemme est vrai pour $\rho = m-1, m-2, \dots, 3, 2$.

Cela suffit pour établir la symétrie de la forme bilinéaire $f_m(x; y)$, c'est-à-dire la commutabilité du groupe m -aire.

En effet, des égalités

$$s_{\rho}(x) = s_{m\rho}(x) = \sum_{\alpha} a_{m\alpha\rho} x_{\alpha} \\ t_{\rho}(x) = t_{m\rho}(x) = \sum_{\alpha} a_{m\rho\alpha} x_{\alpha} \quad (\rho = 2, 3, \dots, m-1)$$

on tire

$$a_{m\alpha\rho} = a_{m\rho\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m-1; \rho = 2, 3, \dots, m-1);$$

la symétrie de la forme bilinéaire $(m-1)$ -aire $f_m(x; y)$ devient évidente.

25. Si le lemme est supposé vrai pour

$$\rho = \beta + 2, \beta + 3, \dots, m-1,$$

la relation $[\beta]$ du n° 23 devient

$$[\beta_1] \quad y_1 s_{\beta+1}(x) + \Omega(y; x) = x_1 t_{\beta+1}(y) + \Omega(x; y),$$

où

$$\begin{aligned} \Omega(y; x) &= y_2 Q_{m-1-\beta}(K; x) + y_3 Q_{m-2-\beta}(K; x) + \dots \\ &\quad + y_{m-1-\beta} Q_2(K; x) \\ &= y_2 (K_1 x_{m-2-\beta} + K_2 x_{m-3-\beta} + K_3 x_{m-4-\beta} + \dots \\ &\quad + K_{m-3-\beta} x_2 + K_{m-2-\beta} x_1) \\ &\quad + y_3 (K_1 x_{m-3-\beta} + K_2 x_{m-4-\beta} + K_3 x_{m-5-\beta} + \dots \\ &\quad + K_{m-4-\beta} x_2 + K_{m-3-\beta} x_1) + \dots \\ &\quad + y_{m-2-\beta} (K_1 x_2 + K_2 x_1) + y_{m-1-\beta} K_1 x_1 \\ &= K_1 (x_1 y_{m-1-\beta} + x_2 y_{m-2-\beta} + \dots + x_{m-3-\beta} y_3 + x_{m-2-\beta} y_2) \\ &\quad + K_2 (x_1 y_{m-2-\beta} + \dots + x_{m-4-\beta} y_3 + x_{m-3-\beta} y_2) + \dots \\ &\quad + K_{m-2-\beta} x_1 y_2 \\ &= K_1 [Q_{m-\beta}(x; y) - y_1 x_{m-\beta-1}] \\ &\quad + K_2 [Q_{m-1-\beta}(x; y) - y_1 x_{m-2-\beta}] + \dots \\ &\quad + K_{m-2-\beta} [Q_3(x; y) - y_1 x_2] \\ &= \Phi(x; y) - y_1 (K_1 x_{m-\beta-1} + K_2 x_{m-\beta-2} + \dots + K_{m-2-\beta} x_2), \end{aligned}$$

où

$$\Phi(x; y) = \Phi(y; x) = K_1 Q_{m-\beta}(y; x) + \dots + K_{m-2-\beta} Q_3(x; y).$$

26. Transportons dans la relation $[\beta_1]$ ci-dessus les expressions de $\Omega(x; y)$ et de $\Omega(y; x)$ qui viennent d'être construites. L'expression symétrique Φ en x et y disparaît de part et d'autre et il reste la relation

$$\begin{aligned} [\beta_2] \quad y_1 [s_{\beta+1}(x) - K_1 x_{m-\beta-1} - \dots - K_{m-\beta-2} x_2] \\ = x_1 [t_{\beta+1}(y) - K_1 y_{m-\beta-1} - \dots - K_{m-\beta-2} y_2]. \end{aligned}$$

Introduisons la constante arbitraire $K_{m-\beta-1}$; la condition $[\beta_2]$ donne

$$s_{\beta+1}(x) = Q_{m-\beta}(x; K), \quad t_{\beta+1}(y) = Q_{m-\beta}(y; K).$$

C. Q. F. D.