BULLETIN DE LA S. M. F.

E. COTTON

Sur la réduction des forces d'inertie

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 139-148

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__139_1>

SUR LA RÉDUCTION DES FORCES D'INERTIE ;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Soient S un système matériel, Σ_1 un système invariable de comparaison; en faisant usage d'un système intermédiaire Σ on décompose le mouvement absolu (de S par rapport à Σ_1) dans les deux mouvements suivants : mouvement relatif (de S par rapport à Σ), mouvement d'entraînement (de Σ par rapport à Σ_1).

Soit M un point matériel ou, comme nous dirons plus brièvement, une molécule de S. Un théorème bien connu apprend que l'accélération absolue de M est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire. A chacune de ces accélérations on peut faire correspondre une force d'inertie égale au produit de cette accélération par $-m$, m étant la masse de M. La force d'inertie absolue est donc la résultante des forces suivantes : force d'inertie d'entraînement (ou force centrifuge), force d'inertie relative, force d'inertie complémentaire (ou force de Coriolis).

Nous *effectuons ici la réduction géométrique* (1) *des diverses*

(1) Par *réduction géométrique* d'un système de vecteurs, nous entendons la

forces d'inertie correspondant à toutes les molécules de S ; nous indiquons ensuite l'intérêt de cette réduction en Mécanique appliquée.

1. Appelons D_a *le système des forces d'inertie absolues* de S. Les calculs mêmes qu'on fait au début de la Dynamique des systèmes (*voir*, par exemple, Appell, *Mécanique rationnelle*, t. II, nos 328 et 335) conduisent au résultat suivant :

La résultante de translation de D_a *est équipollente à la force d'inertie absolue de la masse entière de* S *concentrée au centre de gravité.*

Le moment résultant de D_a *par rapport à un point* O_1 *fixe* (par rapport à Σ_1) s'obtient de la façon suivante : On imagine le moment résultant $O_1 h_{1a}$ des quantités de mouvement absolues, moment pris par rapport à O_1, et la vitesse absolue $h_{1a}h'_{1a}$ du point h_{1a}. On construit $O_1 \eta_{1a}$ équipollent à $h_{1a}h'_{1a}$, ce vecteur représente le moment résultant cherché.

Au lieu d'effectuer la réduction par rapport à un point fixe, on peut l'effectuer par rapport au centre de gravité G de S, qui, en général est mobile par rapport à Σ_1. On voit alors, à l'aide de calculs simples, que *le moment résultant de* D_a *par rapport au centre de gravité* G *de* S s'obtient ainsi : par G on mène des axes de directions fixes (par rapport à Σ_1) ; soit Σ'_1 le système invariable défini par ces axes. On prend le moment résultant Gh_a, par rapport à G, des quantités de mouvement correspondant au mouvement de S par rapport à Σ'_1 (*mouvement autour du centre de*

---

détermination de la résultante de translation et du moment résultant par rapport à un point. Deux systèmes de vecteurs sont dits *géométriquement équivalents*, si les résultats de leur réduction géométrique sont identiques. On sait que, lorsque les vecteurs correspondent à des *forces appliquées à un solide* absolument rigide, tel qu'on les imagine en Mécanique rationnelle, deux systèmes de forces (dynames) géométriquement équivalents sont aussi mécaniquement équivalents, c'est-à-dire peuvent être remplacés l'un par l'autre sans qu'il y ait de modifications dans l'équilibre ou le mouvement du corps.

Dans le cas d'un système S quelconque, il n'en est généralement plus ainsi, mais l'intérêt que présente encore cette réduction géométrique tient à ce qu'elle donne les éléments essentiels pour l'application des théorèmes généraux du début de la Dynamique des systèmes, concernant les quantités de mouvement (projections et moments) et où les forces intérieures s'éliminent.

gravité). On construit $h_a h'_a$ vitesse de h_a dans son mouvement par rapport à Σ'_1 et enfin l'on mène $G\eta_a$ équipollent à $h_a h'_a$.

2. Pour ce qui concerne la réduction du *système* D_r *des forces d'inertie relatives*, il suffit évidemment de remplacer, dans les constructions précédentes, Σ_1 par Σ.

Donc, la résultante de translation de D_r égale la force d'inertie relative de la masse entière de S concentrée en son centre de gravité, et le moment résultant $G\eta_r$ est équipollent à $h_r h'_r$ vitesse du point h_r, extrémité du moment résultant Gh_r de quantités de mouvement de S, ces quantités de mouvement et cette vitesse se rapportant aux mouvements de S et de h_r par rapport à un système Σ' d'axes dont la direction est invariable par rapport à Σ.

3. Considérons maintenant *le système* D_e *des forces centrifuges* ou *forces d'inertie d'entraînement*.

Ces forces ne dépendent que du mouvement d'entraînement et de la position à l'instant t considéré de S par rapport à Σ. On peut donc, pour effectuer la réduction, substituer à S un solide fictif obtenu en imaginant que les diverses molécules de S conservent par rapport à Σ les positions qu'elles ont effectivement à l'instant t et appliquer les résultats du n° 1.

En particulier, la résultante de translation des forces centrifuges est égale à la force centrifuge de la masse entière de S concentrée en son centre de gravité.

4. Il nous reste à étudier *le système* D_c *des forces centrifuges composées* ou forces d'inertie complémentaires.

Pour cela, considérons des axes Ox, Oy, Oz fixes par rapport à Σ. Soit M une molécule de S, de masse m, de coordonnées x, y, z; les projections de la force de Coriolis de cette molécule sont :

$$(1)\qquad 2m\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right),\quad 2m\left(p\frac{dz}{dt} - r\frac{dx}{dt}\right),\quad 2m\left(q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt}\right),$$

p, q, r désignant les composantes de la rotation instantanée dans le mouvement d'entraînement.

En ajoutant les expressions analogues correspondant aux diverses molécules de S, on voit d'abord que la résultante de translation de D_c est égale à la force centrifuge composée de la masse entière de S concentrée au centre de gravité, ce qu'on aurait pu voir aussi en rapprochant les uns des autres les résultats précédents.

Par le centre de gravité G menons les axes Gx', Gy', Gz', parallèles à Ox, Oy, Oz. Soient α, β, γ les projections de la vitesse de G par rapport à Σ et x', y', z' les coordonnées de M dans le nouveau système. Les expressions (1) de la force centrifuge composée de ce point peuvent s'écrire

$$2m\left(r\frac{dy'}{dt} - q\frac{dz'}{dt}\right) + 2m(r\beta - q\gamma), \quad \ldots.$$

Le moment de cette force par rapport à Gx' est donné par une formule bien connue ; en ajoutant les expressions analogues, les termes contenant α, β, γ disparaissent et il reste pour le moment résultant par rapport à Gx'

$$(2) \qquad \lambda = -2p\sum m\left(y'\frac{dy'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right) + 2q\sum my'\frac{dx'}{dt} + 2r\sum mz'\frac{dx'}{dt},$$

la sommation étant étendue à toutes les molécules de S.

On peut écrire

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} 2y'\frac{dx'}{dt} &= \frac{d}{dt}(x'y') + y'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dy'}{dt}, \\ 2z'\frac{dx'}{dt} &= \frac{d}{dt}(z'x') + z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Désignant par A, B, C les moments d'inertie de S par rapport à Gx', Gy', Gz'; par D, E, F les produits d'inertie relatifs aux plans coordonnées se croisant suivant ces axes, on a

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum m(y'^2 + x'^2) \\ &= 2\sum m\left(y'\frac{dy'}{dt} + z'\frac{dz'}{dt}\right), \qquad \frac{dB}{dt} = \ldots, \qquad \frac{dC}{dt} = \ldots, \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum my'z' = \sum m\frac{d}{dt}(y'z'), \qquad \frac{dE}{dt} = \ldots, \qquad \frac{dF}{dt} = \ldots. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(5) \qquad 2\mathfrak{T} = \frac{dA}{dt}p^2 + \frac{dB}{dt}q^2 + \frac{dC}{dt}r^2 - 2\frac{dD}{dt}qr - 2\frac{dE}{dt}rp - 2\frac{dF}{dt}pq$$

et désignons par f, g, h les projections sur les axes du moment résultant par rapport à G des quantités de mouvement par rapport à $Gx'y'z'$

$$(6)\quad \begin{cases} f=\sum m\left(y'\dfrac{dz'}{dt}-z'\dfrac{dx'}{dt}\right), \qquad g=\sum m\left(z'\dfrac{dx'}{dt}-x'\dfrac{dz'}{dt}\right), \\ h=\sum m\left(x'\dfrac{dy'}{dt}-y'\dfrac{dx'}{dt}\right). \end{cases}$$

On a ainsi, pour le moment résultant cherché du dyname D_c, les projections suivantes sur Gx', Gy', Gz'

$$(7)\quad \lambda=-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial p}-qh+rg,\quad \mu=-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial q}-rf+ph,\quad \nu=-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial r}-pg+qf.$$

5. Dans le *cas où* S *est un solide*, on peut transformer les expressions trouvées pour λ, μ, ν, en introduisant les projections P, Q, R sur Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée dans le mouvement de S par rapport à Σ. On a, en effet,

$$\frac{dx'}{dt}=Qz'-Ry',\qquad \frac{dy'}{dt}=Rx'-Pz',\qquad \frac{dz'}{dt}=Py'-Qx',$$

et, en portant ces valeurs dans les expressions telles que (2), il vient, tous calculs faits,

$$(8)\quad \begin{cases} \lambda=+2p(QE-RF) \\ \qquad +q[2QD-R(A+C-B)]+r[Q(A+B-C)-2RD], \\ \mu=\quad p[R(B+C-A)-2PE)] \\ \qquad +2q(RF-PD)+r[2RE-P(B+A-C)], \\ \nu=\quad p[2PF-Q(C+B-A)] \\ \qquad +q[P(C+A-B)-2QF)]+2r(PD-QE). \end{cases}$$

Nous poserons

$$(9)\qquad 2I=A+B+C,$$

I représente le moment d'inertie de S relatif à G, c'est donc un invariant vis-à-vis de toute transformation d'axes rectangulaires, on le démontre d'ailleurs en géométrie analytique. Les formules (8) donnent alors

$$\lambda=2Q(Ir+Ep+Dq-Cr)-2R(Iq+Fp-Bq+Dr),\qquad \ldots.$$

En écrivant

$$2\theta = \mathrm{I}(p^2+q^2+r^2) - (\mathrm{A}p^2+\mathrm{B}q^2+\mathrm{C}r^2 - 2\mathrm{D}qr - 2\mathrm{E}rp - 2\mathrm{F}pq),$$

on voit que

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= 2\left(\mathrm{Q}\frac{\partial\theta}{\partial r} - \mathrm{R}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right),\\ \mu &= 2\left(\mathrm{R}\frac{\partial\theta}{\partial p} - \mathrm{P}\frac{\partial\theta}{\partial r}\right),\\ \nu &= 2\left(\mathrm{P}\frac{\partial\theta}{\partial q} - \mathrm{Q}\frac{\partial\theta}{\partial p}\right). \end{aligned}\right.$$

Considérons le vecteur $\mathrm{G}\gamma$ *ayant pour projections* $\frac{\partial\theta}{\partial p}, \frac{\partial\theta}{\partial q}, \frac{\partial\theta}{\partial r}$; λ, μ, ν *sont les projections du double de la vitesse de l'extrémité* γ *de ce vecteur tournant autour d'un axe passant par* G; *la vitesse de rotation ayant pour projections* P, Q, R, c'est précisément la vitesse de rotation de S par rapport aux axes $\mathrm{G}x'y'z'$ (vitesse de rotation dans le mouvement relatif).

Le vecteur $\mathrm{G}\gamma$ *se construit avec la vitesse de rotation* p, q, r *correspondant au mouvement d'entraînement et la quadrique*

$$(11)\quad \mathrm{I}(x^2+y^2+z^2) - (\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+\mathrm{C}z^2 - 2\mathrm{D}yz - 2\mathrm{E}zx - 2\mathrm{F}xy) = 1,$$

comme le moment résultant des quantités de mouvement se construit dans la théorie de Poinsot à l'aide de l'ellipsoïde d'inertie ordinaire et de la vitesse instantanée de rotation.

Cette quadrique (11) n'est autre qu'un ellipsoïde lieu des points M obtenus en portant sur chaque axe passant par G une longueur GM égale à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie de S par rapport au plan perpendiculaire à cet axe mené par G.

6. L'intérêt des réductions précédentes apparaît quand on étudie le mouvement d'une machine par rapport au sol, que nous prendrons comme système Σ_1.

Nous distinguerons dans la machine la pièce solide la plus importante (par exemple la coque pour un navire, le fuselage pour un aéroplane, etc.) ; nous admettrons qu'on peut la regarder avec une approximation suffisante comme absolument rigide ; Σ sera invariablement lié à cette pièce. Le reste de la machine (moteur, transmissions, roues ou hélices motrices, organes de direction) constitue (avec les passagers) le système S.

Appelons S' la pièce rigide principale envisagée comme système matériel ; d'après le principe de d'Alembert appliqué à l'ensemble formé par S et S', on peut affirmer que l'ensemble des forces absolues d'inertie et des forces extérieures ordinaires appliquées à cet ensemble est géométriquement équivalent à zéro (c'est-à-dire que sa résultante de translation et son moment résultant, par rapport à un point quelconque, sont nuls).

Nous classerons les forces ordinaires extérieures à S et S' en forces de contact, telles que réactions de solides, poussées exercées par l'eau ou par l'air, et forces de profondeur. Nous admettons, ce qui est en général une approximation suffisante, que les forces de profondeur se réduisent aux poids des pièces mobiles. Elles sont alors géométriquement équivalentes au poids total du système, force fictive appliquée au centre de gravité, dont l'intensité et la direction (par rapport à Σ_1) ne varient pas.

Si nous regardons comme connus les mouvements de S par rapport à S' et de S' (ou Σ) par rapport au sol Σ_1, nous pouvons d'après ce qui précède effectuer *la réduction géométrique des forces de contact*. Elles sont en effet géométriquement équivalentes à l'ensemble formé par une force Φ opposée au poids total et par les dynames (¹) suivants : dynames D_e, D'_e formés de forces respectivement opposées aux forces d'inertie d'entraînement ou forces centrifuges de S et de S' ; dyname D_r constitué par les forces respectivement opposées aux forces d'inertie relatives de S ; dyname D_c constitué par les forces opposées aux forces centrifuges composées de S.

7. D_r ne dépend à un instant donné que du mouvement de S par rapport à S', ou plus exactement de la distribution des accélérations dans ce mouvement à l'instant considéré ; il ne changerait pas si S' était fixé au sol à cet instant. D_e, D'_e, D_c seraient alors équivalents à zéro.

(¹) Nous avons cru pouvoir conserver ici le nom de *dyname* pour un système de forces, alors même que ces forces ne sont pas appliquées à un solide ; il n'y a aucun inconvénient à cela, puisque nous ne nous occupons que de réductions ou d'équivalences géométriques.

Pour que D_r soit nul aussi, il faut que G *soit en repos ou en mouvement uniforme par rapport à* Σ, *et que le moment résultant* Gh_r *des quantités de mouvement considéré au n° 2 soit nul.* S'il en est ainsi, nous dirons que *la machine est bien équilibrée pour l'inertie relative* (¹). *L'ensemble des forces extérieures de contact est alors, pour la machine fixe, équivalent à la force* Φ *opposée au poids total du système.*

Supposons maintenant S′ en mouvement par rapport au sol ; D_e et D'_e ne sont pas en général équivalents à zéro (²).

8. Peut-il arriver que D_e soit géométriquement équivalent à zéro, et cela pour tous les instants et pour tous les mouvements d'entraînement possibles ? Il faut que le centre de gravité G de S ait une vitesse relative nulle et que, quels que soient p, q, r, on ait (n° 4)

$$\lambda = -\frac{dA}{dt}p + \left(\frac{dF}{dt} - h\right)q + \left(\frac{dE}{dt} + g\right)r = 0,$$
$$\mu = \left(\frac{dF}{dt} + h\right)p - \frac{dB}{dt}q + \left(\frac{dD}{dt} - f\right)r = 0,$$
$$\nu = \left(\frac{dE}{dt} - g\right)p + \left(\frac{dD}{dt} + f\right)q - \frac{dC}{dt}r = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dD}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dF}{dt} = 0,$$
$$f = g = h = 0.$$

L'ellipsoïde central d'inertie de S *doit donc être invariable de forme et de position* (par rapport à S′) *et le moment résultant* (par rapport à G) *des quantités de mouvement relatives* (n° 2) *doit être nul aussi.*

(¹) Dans une Note intéressante (*Comptes rendus*, 4 décembre 1911), M. Lecornu a montré la possibilité de réaliser cet équilibrage par l'emploi de masses additionnelles convenablement disposées.

(²) Ils le sont toutefois lorsque le mouvement de S′ par rapport au sol est un mouvement de translation rectiligne et uniforme, D_e est alors équivalent à zéro. S'il y a translation non uniforme, D_c est encore nul, D_e et D'_e sont géométriquement équivalents à une force unique opposée à la force d'inertie de la masse totale concentrée au centre de gravité et qu'on peut composer avec la forme Φ ; leur résultante est géométriquement équivalente aux forces extérieures de contact. (On suppose toujours la machine bien équilibrée pour l'inertie relative.)

Quand ces conditions seront réalisées, nous dirons que la machine est *bien équilibrée pour les effets gyroscopiques* [1]; elle l'est alors aussi pour l'inertie relative.

Dans ces conditions ;

1° Les forces extérieures de contact sont géométriquement équivalentes à l'ensemble formé par Φ, D_e, D'_e.

2° La réduction géométrique des forces D_e et D'_e se fait exactement comme dans le cas d'un solide, car le centre de gravité de l'ensemble SS' et l'ellipsoïde central d'inertie de cet ensemble restent invariables par rapport à Σ.

9. Dans la pratique, on a cherché à réaliser d'une façon plus ou moins exacte cet équilibrage des machines mobiles [2]. Bien qu'il soit pour ainsi dire impossible d'analyser avec précision les actions extérieures de contact et l'influence que peuvent avoir sur elles les mouvements de la pièce rigide principale et du reste de la machine, il apparaît, comme intuitif et comme fait d'expérience, qu'une distribution défectueuse des masses mobiles entraînerait dans la marche de la machine des trépidations qu'on ne saurait guère corriger par une manœuvre continue des appareils de direction.

En pratique, dans les machines mobiles, le système S' (abstraction faite des passagers et des appareils de direction) comparé à S constitue à peu près un système à liaisons complètes, dont la position dépend d'un seul paramètre θ, angle dont a tourné l'arbre principal ; cette position redevenant la même lorsque θ augmente d'une multiple convenable de 2π.

---

(1) On peut dire que le dyname D_e est le dyname des effets gyroscopiques. Voici pourquoi : Imaginons un gyroscope S bien centré tournant uniformément par rapport à sa monture (S') autour de son axe de figure. Pour faire tourner la monture uniformément autour d'un axe perpendiculaire à l'axe du gyroscope, axe passant par le centre de gravité supposé commun au gyroscope et à sa monture, on peut appliquer des efforts à la monture, ces efforts étant équivalents au dyname des effets gyroscopiques (il se réduit ici à un couple).

(2) *Voir*, par exemple, pour ce qui concerne les locomotives, BOUASSE, *Mécanique*, p. 386; pour les navires, FÖPPL, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Band IV, p. 153.

Ces auteurs ne tiennent compte toutefois que des forces d'inertie relatives et des conditions du n° 7.

Voir aussi la note de M. Lecornu citée plus haut.

Posant alors $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, $\frac{d\omega}{dt} = \omega'$, il est bien facile de voir que les vitesses relatives sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles à ω, et les accélérations relatives fonctions linéaires et homogènes de ω^2 et de ω'.

Si donc les conditions des n^{os} 7 et 8 ne sont pas réalisées, les coordonnées pluckériennes de D_c (dyname des effets gyroscopiques) sont proportionnelles (toutes choses égales d'ailleurs) à ω, et le dyname D_r peut être décomposé en deux, l'un dont les coordonnées sont proportionnelles à ω' sera surtout sensible lors de la mise en marche ou de l'arrêt de la machine, l'autre de coordonnées proportionnelles à ω^2 interviendrait lors de la marche normale.

Terminons ces indications rapides en donnant un exemple où l'équilibrage parfait pour les effets gyroscopiques est possible : Toutes les pièces de S sont des roues dont les axes sont fixes par rapport à S'; de plus, ces roues sont bien centrées, au point de vue mécanique, c'est-à-dire que leur axe de rotation passe par leur centre de gravité et est un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point ; enfin les roues engrènent les unes avec les autres de façon que les vitesses angulaires de rotation sont proportionnelles à des nombres fixes.

Il est alors manifeste que la fixité (par rapport à S') de l'ellipsoïdes d'inertie de S est réalisée. Quant à la condition des moments, il est facile de la traduire analytiquement. Appelons C le moment d'inertie d'une roue, ω sa vitesse angulaire de rotation dans son mouvement par rapport à S', α, β, γ les cosinus directeurs de son axe (par rapport à un trièdre de coordonnées lié à S'); il faudra

$$\sum C\omega\alpha = 0, \qquad \sum C\omega\beta = 0, \qquad \sum C\omega\gamma = 0,$$

conditions qu'on pourrait toujours réaliser en ajoutant au besoin une roue nouvelle engrenant avec les précédentes.