BULLETIN DE LA S. M. F.

E. DELASSUS

Sur la distribution des vitesses dans un solide en mouvement

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 159-162
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__159_1>

SUR LA DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SOLIDE EN MOUVEMENT;

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS.

1. M. Kœnigs [1] a montré l'utilité, dans l'étude du mouvement d'un solide, de la notion de système de vecteurs représentatif de l'état des vitesses à l'instant t, mais en faisant dériver cette notion de l'identité des formules donnant les composantes de la vitesse sur les axes mobiles, établies analytiquement, avec celles des moments.

Le système représentatif s'introduit tout naturellement par la voie géométrique suivante qui, sans aucun calcul, conduit aux formules des vitesses pour des axes animés d'un mouvement quelconque :

2. S étant un système de vecteurs, faisons correspondre à chaque point M de l'espace le moment μ du système S en ce point; nous constituerons ainsi un champ de vecteurs que nous appellerons *champ des moments du système* S et qui, d'après une propriété classique des moments, satisfera à la condition :

Les vecteurs qui correspondent à deux points quelconques de l'espace ont même projection sur la droite qui joint ces deux points que, pour abréger, nous appellerons *condition des moments*.

3. Proposons-nous de démontrer la réciproque ainsi énoncée :

---

(1) M. KŒNIGS, *Leçons de Cinématique.*

Tout champ de vecteurs satisfaisant à la condition des moments est un champ de moments.

Nous supposons essentiellement qu'à chaque point M de l'espace correspond un et un seul vecteur μ et nous remarquons immédiatement que la condition des moments détermine, complètement et sans ambiguïté, par ses projections sur les trois arêtes d'un trièdre, le vecteur μ d'un point quelconque M, dès que l'on connaît les vecteurs α, β, γ, relatifs à trois points A, B, C non en ligne droite. Il en résulte que *deux champs de vecteurs, satisfaisant tous deux à la condition des moments, coïncident dans tout l'espace s'ils coïncident en trois points non en ligne droite.*

Supposons, en premier lieu, que tous les vecteurs μ soient équipollents à un vecteur fixe G. Il est alors manifeste que le champ (M, μ) est le champ des moments du couple ayant G pour axe.

Supposons, en second lieu, que le champ (M, μ) satisfaisant à la condition des moments possède un point A dont le vecteur est nul; μ ne peut être nul pour tous les points, de sorte que nous pouvons choisir un point B dont le vecteur β ne sera pas nul et, d'après la condition des moments, sera perpendiculaire à AB; soit P_β le plan mené par AB perpendiculairement à β. Choisissons un autre point C, non situé dans P_β, et dont le vecteur γ n'est pas nul; soit P_γ le plan analogue à P_β. Ces deux plans sont distincts puisque le point C est dans le second et n'est pas dans le premier, ils se coupent suivant une droite Δ bien déterminée passant par A, et la condition des moments, appliquée aux trois groupes (M, A), (M, B), (M, C), montre que μ est nul en tout point M de Δ.

β étant perpendiculaire au plan M, Δ, il est visible qu'on peut construire un vecteur R porté par Δ et dont le moment en B sera précisément β; comme son moment en tout point de Δ sera nul, le champ des moments de R coïncidera avec le champ considéré en B et en tous les points de Δ, donc lui sera identique. Ainsi le champ étudié est celui des moments d'un vecteur.

Étudions maintenant le cas général. Prenons un point A fixe, soit α son vecteur, et considérons les deux champs

$$(M, \alpha), \qquad (M, \mu - \alpha),$$

le premier ayant tous ses vecteurs équipollents à α, et les vecteurs $\mu - \alpha$ du second étant des différences géométriques.

La condition des moments est réalisée, par hypothèse, par les vecteurs μ; elle est réalisée par les vecteurs α équipollents entre eux, elle l'est donc aussi par les vecteurs $\mu - \alpha$ et le vecteur $\mu - \alpha$ qui correspond au point A est nul. On retombe donc sur les deux cas particuliers précédents. α et $\mu - \alpha$ sont les moments en M d'un couple G et d'un vecteur R; leur somme géométrique μ sera donc le moment en M du système R, G; autrement dit, le champ étudié sera le champ des moments du système R, G : ce qui démontre la réciproque énoncée dans le cas général.

4. Soient M, M′ deux points d'un solide en mouvement, V et V′ leurs vitesses à l'instant t, et imaginons un trièdre de direction fixe ayant M pour origine.

Relativement à ce trièdre, la vitesse absolue V′ du point M′ se décomposera en une vitesse d'entraînement équipollente à V et une vitesse relative qui sera perpendiculaire à MM′ car, cette distance étant constante, le mouvement relatif du point M′ se fait sur une sphère de centre M. Il résulte de là que *les vitesses à l'instant t de deux points quelconques d'un solide ont même projection sur la droite qui joint ces deux points.*

Plaçons-nous à l'instant t et, à chaque point du solide, faisons correspondre sa vitesse à cet instant; nous constituerons ainsi un champ de vecteurs qui sera le *champ des vitesses du solide à l'instant t.* Ce qui précède montre que ce champ satisfait à la condition des moments et il en résulte :

Le champ des vitesses d'un solide à l'instant t est celui des moments d'un système de vecteurs.

5. Soit S_t ce système de vecteurs représentatif de la loi des vitesses à l'instant t. Prenons trois axes $Oxyz$ animés d'un *mouvement quelconque*, et soient x, y, z et p, q, r, ξ, η, ζ les coordonnées d'un point M du solide et du système S_t par rapport à ces axes. La vitesse de M à l'instant t étant le moment de S_t, ses composantes suivant les axes s'obtiendront par les formules

classiques des moments

$$
\begin{aligned}
V_x &= \xi + qz - ry, \\
V_y &= \eta + rx - pz, \\
V_z &= \zeta + py - qx.
\end{aligned}
$$

Ces formules de vitesses sont ainsi établies pour des axes animés d'un mouvement quelconque et par une voie géométrique mettant en évidence leur véritable origine.

6. L'existence du système de vecteurs S_t et les formules des vitesses étant établies, on en tirera toutes les conséquences en suivant, par exemple, la marche indiquée par M. Kœnigs.