Bulletin de la S. M. F.

F. Boulad

Application de la notion des valeurs critiques à la disjonction des variables dans les équations d'ordre nomographique supérieur

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 105-129
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__105_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPLICATION DE LA NOTION DES VALEURS CRITIQUES A LA DISJONCTION DES VARIABLES DANS LES ÉQUATIONS D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE SUPÉRIEUR;

PAR M. FARID BOULAD.

I. — EXPOSÉ.

Lorsqu'on se propose de représenter une équation $F_{123} = 0$ à trois variables z_1, z_2, z_3 par un nomogramme à points alignés, une question s'offre en premier lieu : c'est de reconnaître si cette équation peut être mise sous la forme d'un déterminant,

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

les éléments F_i, G_i, H_i désignant des fonctions réelles d'une seule variable z_i; et, dans l'affirmative, de trouver ces éléments.

L'opération consistant à former ce déterminant a été appelée par M. d'Ocagne, dans son *Traité de Nomographie*, la *disjonction des variables* de l'équation proposée [1].

Ce problème assez difficile n'a pas été résolu jusqu'à présent d'une manière générale. On n'est pas encore parvenu à former les équations différentielles exprimant les conditions suffisantes et nécessaires auxquelles l'équation $F_{123} = 0$ doit satisfaire pour qu'elle soit représentable en points alignés.

Néanmoins, M. Duporcq a obtenu des conditions suffisantes, sous forme d'équations fonctionnelles [2].

Tout récemment, M. d'Ocagne a indiqué une nouvelle notion nomographique très féconde, dite *des valeurs critiques* [3]. Elle permet de construire directement les nomogrammes représentatifs

[1] Nous indiquerons respectivement, par les notations T.N. et C.G.N., les renvois au susdit Traité et au *Calcul graphique et nomographie* par le même auteur.

[2] *Bull. de la Soc. math.*, 1897, p. 287 et T.N., p. 427.

[3] *Comptes rendus*, t. CXLIV, 1907, p. 190, 895, 1027; *Bull. de la Soc. math.*, t. XXXV, 1907, p. 173; C.G.N., p. 253.

des équations d'ordre 3 et 4, sans effectuer préalablement la disjonction de leurs variables; elle réduit la théorie de ces équations à sa plus simple expression, et elle s'applique à la définition et à la recherche de la symétrie nomographique.

En étudiant ces diverses applications, nous avons été conduit à élucider de nouveaux points qui font l'objet de cette Note, et qui peuvent se résumer comme il suit :

1° *L'application de la notion des valeurs critiques à la construction directe des nomogrammes représentatifs des équations d'ordre nomographique* 3 *et* 4, *peut être étendue à toutes les équations nomographiquement rationnelles de la forme*

$$F_{123} = F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0, \tag{2}$$

sans se préoccuper de la possibilité de leur représentation en points alignés, car, par des valeurs critiques réelles obtenues en opérant suivant la marche indiquée par M. d'Ocagne pour la détermination de ces valeurs, on peut à la fois affirmer cette possibilité et effectuer la disjonction des variables de ces équations;

2° *Recherche d'une forme caractéristique des équations* $F_{123} = 0$ *susceptibles d'une représentation par un nomogramme à échelles superposées, et son application à la disjonction des variables de ces équations;*

3° *Établissement des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation* $F_{123} = 0$ *soit représentable par un nomogramme de l'un des trois types principaux de nomogrammes à simple alignement définis comme suit : dans l'un d'eux, les trois supports des échelles sont distincts; dans un autre, deux des supports sont confondus; dans le troisième, les trois supports sont également confondus;*

4° *Application de la notion des valeurs critiques à la réduction de l'équation* $F_{123} = 0$ *d'ordre quelconque, la plus générale à la forme* (2), *en vue de la disjonction des variables. Si cette équation n'est pas réductible à cette forme par le procédé indiqué, on démontre aisément qu'il est impossible qu'elle le soit, à moins toutefois d'une substitution non linéaire et homogène effectuée sur les fonctions par rapport auxquelles* *cette équation a été considérée sous forme nomographiquement rationnelle et homogène.*

Avant d'exposer nos recherches ci-dessus avec des exemples, rappelons en quelques mots les deux notions suivantes, aujourd'hui classiques.

II. — Ordre nomographique d'une équation [1].

Une équation à trois variables est dite, d'après M. Soreau, *ordonnée nomographiquement* par rapport à la variable z_1, si elle peut se mettre sous la forme d'un polynome $\Sigma f_1 f_{22} = 0$ du premier degré par rapport à des fonctions f_1 de z_1, ces fonctions étant linéairement indépendantes. Si ce polynome comporte $p_1 + 1$ termes, cette équation est dite *d'ordre nomographique* p_1 par rapport à la variable z_1, et si elle est de cette façon d'ordre p_i par rapport à chaque variable z_i, la somme $p_1 + p_2 + p_3$ est l'ordre *nomographique total* de l'équation proposée.

L'équation $F_{123} = 0$ est dite, d'après M. d'Ocagne, *nomographiquement rationnelle*, si elle peut être ordonnée nomographiquement par rapport à chacune de ses variables.

III. — Notion des valeurs critiques.

Cette notion consiste, d'après M. d'Ocagne, dans la considération des valeurs que prennent deux quelconques z_1 et z_2 des trois variables de l'équation $F_{123} = 0$ pour une valeur indéterminée de la troisième z_3. Ces valeurs de z_1 et z_2 sont dites *critiques*.

Suivant que l'échelle (z_1), correspondante d'une variable z_1, est curviligne ou rectiligne, les valeurs critiques de z_2 et z_3, pour une valeur indéterminée de la variable considérée z_1, sont réunies aux points de rencontre des deux échelles (z_2) et (z_3) ou réparties aux points mutuels de rencontre de ces trois échelles.

---

[1] *Bull. de la Soc. des Ing. civils*, août 1901, p. 243; *Bull. de la Soc. math.*, t. XXXI, 1907, p. 174; C. G. N., p. 230.

Cette définition s'étend aussi aux valeurs correspondantes des fonctions de ces variables dont dépendent ces échelles.

Pour avoir, d'après M. d'Ocagne, les valeurs critiques des deux variables z_1 et z_2, correspondant à une valeur indéterminée z_3, on ordonne nomographiquement l'équation $F_{123} = 0$ par rapport aux fonctions de cette variable. Ensuite, il suffit d'égaler à zéro les coefficients de ces fonctions pour obtenir un système d'équations aux valeurs critiques cherchées.

IV. — Application de la notion des valeurs critiques a la disjonction des variables des équations nomographiquement rationnelles de la forme générale (2) au plus d'ordre 2 par rapport a une même variable z_1 (1).

Ce problème peut se ramener à la recherche de deux systèmes de trois fonctions F_2, G_2, H_2 et F_3, G_3, H_3, respectivement des deux variables z_2 et z_3, tels qu'ils vérifient les deux identités

$$F_2 F_{23} + G_2 G_{23} + H_2 H_{23} \equiv 0, \tag{3}$$

$$F_3 F_{23} + G_3 G_{23} + H_3 H_{23} \equiv 0, \tag{4}$$

lesquelles, avec l'équation (2), donnent par élimination la forme cherchée (1).

Désignons par f_i, g_i, ..., t_i, pour $i = 2$ et 3, les fonctions de la variable z_i par rapport auxquelles l'équation (2) peut être ordonnée nomographiquement sous forme homogène. Soit n_i le nombre de ces fonctions.

Pour avoir l'un quelconque des deux systèmes de fonctions inconnues ci-dessus, par exemple le système F_2, G_2, H_2 correspondant à la variable z_2, écrivons les trois fonctions F_{23}, G_{23}, H_{23} sous la forme suivante ordonnée nomographiquement par rapport au système des fonctions f_3, g_3, ..., t_3 de z_3

$$\left\{\begin{aligned} F_{23} &= A_2^1 f_3 + A_2^2 g_3 + \ldots + A_2^{n_3} t_3, \\ G_{23} &= B_2^1 f_3 + B_2^2 g_3 + \ldots + B_2^{n_3} t_3, \\ H_{23} &= C_2^1 f_3 + C_2^2 g_3 + \ldots + C_2^{n_3} t_3, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

(1) Cette solution a été précédemment communiquée par nous sous une forme différente à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus* du 14 février 1910, p. 379).

où chacun des coefficients A_2^k, B_2^k, B_2^k représente une forme linéaire et homogène du système f_2, g_2, ..., t_2 à coefficients constants.

Cela posé, introduisons les expressions (5) dans l'équation (2) et appliquons le procédé précité de M. d'Ocagne à la détermination des valeurs critiques que prennent les deux variables z_1 et z_2, en rendant indéterminée la variable z_3, dans l'équation (2), nous aurons le système suivant de n_3 équations linéaires et homogènes en F_1, G_1, H_1 :

$$(6) \qquad A_2^k F_1 + B_2^k G_1 + C_2^k H_1 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n_3).$$

A présent, je dis que, *si en considérant* F_1, G_1, H_1 *comme inconnues, ce système d'équations est compatible, et si*

$$(7) \qquad F_1 = \lambda \Phi_2, \qquad G_1 = \lambda \Psi_2, \qquad H_1 = \lambda X_2$$

(λ *étant un nombre arbitraire*) *en est la solution la plus générale, les trois fonctions* Φ_2, Ψ_2, X_2 *représentent précisément les fonctions cherchées* F_2, G_2, H_2.

En effet, les deux systèmes d'équations (6) et (7) donnent les n_3 identités

$$(8) \qquad A_2^k \Phi_2 + B_2^k \Psi_2 + C_2^k X_2 \equiv 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n_3).$$

D'autre part, en ajoutant membre à membre les trois relations (5), après les avoir multipliées respectivement par Φ_2, Ψ_2, X_2, on obtient l'égalité

$$\Phi_2 F_{23} + \Psi_2 G_{23} + X_2 H_{23} = S_2^1 f^2 + S_2^2 g_3 + \ldots + S_2^{n_3} t_3,$$

où les coefficients S_2^1, S_2^2, ..., $S_2^{n_3}$ représentent les n_3 trinomes (8).

Or, comme tous ces trinomes sont, par hypothèse, nuls, quels que soient z_1 et z_3, il en résulte que le premier membre de l'égalité ci-dessus est identiquement nul. Donc, les trois fonctions Φ_2, Ψ_2, X_2 vérifient l'identité (3).

En vertu des relations (7), ces trois dernières fonctions peuvent être considérées comme étant les expressions critiques respectives de F_1, G_1, H_1 en fonction de z_2, pour une valeur indéterminée de z_3.

Remarque. — Il est aisé de voir que, si le couple de variables (z_1, z_2) admet des valeurs critiques, le système d'équations (6) définissant les fonctions cherchées Φ_2, Ψ_2 X_2 doit être compatible par rapport à F_1, G_1, H_1.

Or, comme les équations d'ordre 3 et 4 ne sont qu'un cas particulier des équations de la forme (2), il s'ensuit que M. d'Ocagne, en se servant des valeurs critiques réelles pour la construction directe des nomogrammes représentatifs de ces équations, a, en même temps, affirmé la possibilité de la disjonction de leurs variables, et effectué l'opération de cette disjonction ; car, pour arriver aux équations (7) des valeurs critiques qui sont la solution générale du système d'équations (6), il a dû évidemment établir la compatibilité de ces dernières équations.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, relatif à la disjonction des équations de la forme (2) :

Théorème. — *Si chacun des deux systèmes d'équations de valeurs critiques correspondant aux deux couples de variables* (z_1, z_2) *et* (z_1, z_3) *est compatible, en considérant* F_1, G_1, H_1 *comme inconnues, ou si*, a fortiori, *chacun de ces deux couples admet des valeurs critiques réelles, la disjonction complète des variables peut s'effectuer sous la forme voulue. Sinon, elle est impossible, à moins toutefois d'une transformation autre qu'une substitution linéaire et homogène effectuée sur les systèmes de fonctions* F_1, G_1, H_1 *et* f_i, g_i, ..., t_i *(pour* $i = 2$ *et* 3) *par rapport auxquels l'équation proposée* (2) *a été considérée ci-dessus nomographiquement rationnelle sous forme homogène.*

Démontrons, premièrement, le cas de l'impossibilité relative à la substitution définie par les équations suivantes :

$$(9) \qquad \begin{cases} F_1 = a_1 F'_1 + a_2 G'_1 + a_3 H'_1, \\ G_1 = b_1 F'_1 + b_2 G'_1 + b_3 H'_1, \\ H_1 = c_1 F'_1 + c_2 G'_1 + c_3 H'_1, \end{cases}$$

F'_1, G'_1, H'_1, étant les nouvelles fonctions de z_1 et $a_1, a_2, \ldots, c_2, c_3$ des constantes quelconques, telles que le *module de substitution*, c'est-à-dire le déterminant

$$M = | \, a_1 \quad b_2 \quad c_3 \, |,$$

soit différent de zéro.

En effet, si l'on effectue cette substitution dans l'équation (2), et si, ensuite, on applique le procédé de M. d'Ocagne, on obtient comme correspondant du système (6), le système suivant de n_3 équations :

$$(6') \qquad \alpha_2^k F_1' + \beta_2^k G_1' + \gamma_2^k H_1' = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_3),$$

où

$$\alpha_2^k = a_1 A_2^k + b_1 B_2^k + c_1 C_2^k,$$
$$\beta_2^k = a_2 A_2^k + b_2 B_2^k + c_2 C_2^k,$$
$$\gamma_2^k = a_3 A_2^k + b_3 B_2^k + c_3 C_2^k.$$

Or, si l'on désigne par δ et δ' deux déterminants caractéristiques correspondants entre eux et relatifs aux deux systèmes (6) et (6'), on établit aisément la relation

$$\delta' = M\delta.$$

Mais, comme par hypothèse M et δ sont différents de zéro, il en est de même de leur produit δ'. Donc, le système (6') est incompatible, et il en résulte que la disjonction ne peut s'effectuer moyennant la substitution (9).

Passons à présent à la substitution concernant le système de n_i fonctions f_i, g_i, ..., t_i (pour $i = 2$ et 3). Pour démontrer le cas relatif à l'un quelconque de ces deux systèmes, par exemple, le système correspondant à $i = 3$, écrivons les n_3 formes linéaires définissant cette substitution

$$f_3 = a_1 \varphi_3^1 + a_2 \varphi_3^2 + \ldots + a_{n_3} \varphi_3^{n_3},$$
$$g_3 = b_1 \varphi_3^1 + b_2 \varphi_3^2 + \ldots + b_{n_3} \varphi_3^{n_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t_3 = p_1 \varphi_3^1 + p_2 \varphi_3^2 + \ldots + p_{n_3} \varphi_3^{n_3},$$

φ_3^1, φ_3^2, ..., $\varphi_3^{n_3}$ étant les n_3 nouvelles fonctions de z_3 et a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., p_{n_3}, des constantes quelconques telles que le *module de substitution*

$$\Delta = | \, a_1 \quad b_2 \quad c_3 \quad \ldots \quad p_{n_3} \, |$$

soit différent de zéro.

Si l'on introduit ces n_3 formes linéaires dans les expressions (5), et si ensuite on applique le procédé de M. d'Ocagne en désignant respectivement par A, B, C, ..., P les premiers membres des n_3 équations (6), on aura, comme correspondant à ce dernier, le système suivant de n_3 équations

$$(6'') \qquad a_k A + b_k B + c_k C + \ldots + p_k P = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n_3).$$

Or, comme ce dernier est *équivalent* à son correspondant (6) qui est incompatible par hypothèse, il en résulte que la disjonction ne peut s'effectuer par la dernière substitution ci-dessus.

Avant de passer aux applications, énonçons la règle pratique suivante que nous adopterons pour effectuer la disjonction au moyen des valeurs critiques :

Règle des valeurs critiques. — *L'équation* $F_{123} = 0$ *étant mise sous la forme* (2) *au plus d'ordre* 2 *par rapport à une même variable* z_1, *pour avoir le système de trois fonctions inconnues* F_2, G_2, H_2 *correspondant à l'une quelconque* z_2 *des deux autres variables* z_2 et z_3, *il suffit de substituer ces trois fonctions respectivement aux trois autres* F_1, G_1, H_1 *dans l'équation* (2), *ensuite de résoudre l'identité obtenue* (3).

Pour cela, on ordonne nomographiquement cette dernière par rapport au système des fonctions f_3, q_3, ..., t_3 *de l'autre variable* z_3. *Puis en égalant à zéro les coefficients de ces fonctions, on obtient un système d'équations linéaires et homogènes en* F_2, G_2, H_2.

Remarque. — Il convient de bien remarquer que ce dernier système d'équations n'est autre que celui (6) des valeurs critiques des deux variables z_1, z_2, dans lequel F_1, G_1, H_1 seraient remplacés par F_2, G_2, H_2.

V. — Équation d'ordre 3 la plus générale.

Cette équation, complètement étudiée par M. d'Ocagne [1], peut s'écrire sous la forme

$$(10) \qquad \begin{aligned} &F_3(a f_1 f_2 + b_1 f_2 + b_2 f_1 + c_3) \\ &+ G_3(b_3 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + d) + H_3 H_{12} = 0, \end{aligned}$$

[1] *Acta math.*, t. XXI, 1897, p. 301; T.N., p. 436; C.G.N., p. 257.

où

$$F_3 = f_3, \qquad G_3 = 1, \qquad H_3 = 0,$$

est une quantité *arbitraire* que nous désignerons par λ.

En appliquant la marche de la règle ci-dessus à la recherche des deux systèmes de fonctions inconnues F_1, G_1, H_1 et F_2, G_2 H_2, on obtient les deux systèmes d'équations :

$$(11) \qquad \begin{cases} (a\,f_1 + b_1)F_1 + (b_3 f_1 + c_2)G_1 = 0, \\ (b_2 f_1 + c_3)F_1 + (c_1 f_1 + d)G_1 + \lambda H_1 = 0; \end{cases}$$

$$(12) \qquad \begin{cases} (a\,f_2 + b_2)F_2 + (b_3 f_2 + c_1)G_2 = 0, \\ (b_1 f_2 + c_3)F_2 + (c_2 f_2 + d)G_2 + \lambda H_2 = 0, \end{cases}$$

Distinguons les deux cas suivants relatifs au paramètre λ :

1° $\lambda = 0$. C'est le cas des *nomogrammes à échelles rectilignes* N_0, qui a été déjà traité par M. d'Ocagne au moyen des valeurs critiques (*C. G. N.*, p. 257),

En effet, si dans les équations (11) et (12) on substitue le système de fonctions F_3, G_3, H_3 de z_3 à chacun de ceux correspondant à z_1 et z_2, on aura précisément, en vertu de la dernière remarque du paragraphe IV, les deux systèmes d'équations des valeurs critiques, respectivement des deux couples de variables (z_1, z_3) et (z_2, z_3) qui s'obtiennent, d'après M. d'Ocagne, en rendant successivement indéterminée z_2 et z_3 dans l'équation (10).

Les deux systèmes d'équations (11) et (12) sont donc compatibles pour les deux couples de valeurs critiques (σ'_1, σ''_1) et (σ'_2, σ''_2) relatifs aux deux fonctions f_1 et f_2.

D'ailleurs, on vérifie aisément cette compatibilité en remarquant que σ'_2 et σ''_2 sont les racines du déterminant résultant de l'élimination de F_i, G_i, H_i, dans le système d'équations correspondant. Ainsi, le système (11) donne par élimination le résultant

$$\begin{vmatrix} a\,f_1 + b_1 & b_3 f_1 + c_2 \\ b_2 f_1 + c_3 & c_1 f_1 + d \end{vmatrix} = (f_1 - \sigma'_1)(f_1 - \sigma''_1) = 0,$$

ayant pour racines σ'_1 et σ''_1, et qui n'est autre que l'équation (6_i) donnée par M. d'Ocagne dans son *C. G. N.*, p. 258.

Nous connaissons donc de chaque échelle (z_i) deux points σ'_i, σ''_i placés aux points de rencontre avec les deux autres échelles (z_j) et (z_k).

A présent, cherchons les équations en coordonnées cartésiennes des supports des trois échelles de ce nomogramme en partant des formules

$$x = \frac{F_i}{G_i}, \qquad y = \frac{H_i}{G_i}.$$

Le support de l'échelle (z_3), est défini par l'équation $y = 0$ représentant l'axe des x.

Pour avoir les équations des supports des échelles (z_1) et (z_2), divisons respectivement par G_1 et G_2 les membres des deux systèmes d'équations (11) et (12); puis remplaçons $\frac{F_i}{G_i}$ (pour $i = 1$ et 2) par x et éliminons f_1 et f_2 respectivement dans ces deux systèmes d'équations. Nous aurons relativement à chacun de ces derniers la même équation

$$\frac{ax + b_3}{b_2 x + c_1} = \frac{b_1 x + c_2}{c_3 x + d},$$

représentant deux droites parallèles à l'axe des y qui peuvent être rendues concourantes par une transformation homographique.

2° $\lambda \neq 0$. Montrons immédiatement que c'est le cas des *nomogrammes coniques* qui a été traité au moyen des valeurs critiques par M. d'Ocagne, après avoir été établi d'une façon assez laborieuse par MM. Clark et Soreau.

En effet, substituons respectivement x, y, 1 aux trois fonctions F_i, G_i, H_i pour $i = 1$ et 2, contenues dans les deux systèmes d'équations (11) et (12). Ensuite, éliminons f_1 et f_2 ; nous aurons la même équation suivante, définissant le support commun des deux échelles (z_1) et (z_2),

$$\frac{b_1 x + c_2}{ax + b_3} = \frac{b_2 x + c_1}{c_3 x + \lambda y + d}.$$

Elle représente une hyperbole à un paramètre *arbitraire* λ que l'on peut transformer en une conique quelconque par l'homographie la plus générale.

Il est intéressant de remarquer que, si l'on fait $\lambda = 0$ dans l'équation ci-dessus, l'hyperbole se réduit à deux droites.

---

(1) C.G.N., p. 292; *Revue de Mécanique*, t. XXI, 1907.

VI. — ÉQUATION D'ORDRE 4 LA PLUS GÉNÉRALE.

Cette équation est de la forme suivante, posée par M. Soreau [1],

$$f_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3)$$
$$+ g_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) + h_3(c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3) = 0;$$

en prenant

$$F_3 = f_3, \qquad G_3 = f_3, \qquad H_3 = h_3,$$

et en appliquant la règle ci-dessus, on obtient les deux systèmes d'équations

$$(13) \qquad \begin{cases} (a_0 f_1 + a_2)F_1 + (b_0 f_1 + b_2)G_1 + (c_0 f_1 + c_2)H_1 = 0, \\ (a_1 f_1 + a_3)F_1 + (b_1 f_1 + b_3)G_1 + (c_1 f_1 + c_3)H_1 = 0, \end{cases}$$

$$(14) \qquad \begin{cases} (a_0 f_2 + a_1)F_2 + (b_0 f_1 + b_1)G_2 + (c_0 f_2 + c_1)H_2 = 0, \\ (a_2 f_2 + a_3)F_2 + (b_2 f_2 + b_3)G_2 + (c_2 f_2 + c_3)H_2 = 0, \end{cases}$$

qui définissent les fonctions inconnues F_1, G_1, H_1 et F_2, G_2, H_2.

Nous allons voir que les échelles correspondantes (z_1) et (z_2) sont portées sur une même conique ayant pour équations en coordonnées cartésiennes

$$(15) \qquad \frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

En effet, si l'on ordonne le système (13) par rapport à f_1, après y avoir substitué x, y, 1 respectivement à F_1, G_1, H_1, et si, ensuite on élimine f_1, on obtient précisément l'équation ci-dessus.

En opérant par une marche analogue sur le système (14), on retrouve la même équation.

VII. — EXEMPLE D'APPLICATION PRATIQUE.

Considérons l'équation du quatrième ordre

$$(16) \qquad (1 + l)h^2 - l(1 + p)h - \frac{1}{3}(1 - l)(1 + 2p) = 0$$

(voir *T. N.*, p. 198) à trois variables $z_1 = h$, $z_2 = p$, $z_3 = l$.

[1] C.G.N., p. 271; *Bull. de la Soc. des Ing. civils*, août 1901, p. 290.

Pour appliquer la règle ci-dessus, faisons :

$$F_1 = h^2, \qquad G_1 = -h, \qquad H_1 = -\frac{1}{3}.$$

Cette équation devient

$$(1+l)F_1 + l(1+p)G_1 + (1-l)(1+2p)H_1 = 0.$$

Substituons à F_1, G_1, H_1 respectivement F_2, G_2, H_2 et ordonnons nomographiquement cette équation par rapport à la variable $l = z_3$. Ensuite, égalons à zéro les coefficients de cette dernière, nous aurons le système d'équations

$$(17) \qquad \begin{cases} F_2 + (1+p)G_2 - (1+2p)H_2 = 0, \\ F_2 + (1+2p)H_2 = 0, \end{cases}$$

ayant pour solution générale

$$F_2 = \lambda, \qquad G_2 = \frac{-2\lambda}{1+p}, \qquad H_2 = \frac{-\lambda}{1+2p}$$

(λ étant un nombre arbitraire).

Pour avoir l'équation du support de l'échelle z_2, substituons x, y, 1 respectivement à F_2, G_2, H_2 dans le système (17). Puis, ordonnons ce dernier par rapport à p ; nous aurons l'équation cherchée

$$(18) \qquad \frac{y-2}{2} = \frac{x+y-1}{x+1}.$$

En opérant de même pour avoir les inconnues F_3, G_3, H_3, on aura le système d'équations

$$(19) \qquad \begin{cases} lG_3 + 2(1-l)H_3 = 0, \\ (1+l)F_3 + lG_3 + (1-l)H_3 = 0, \end{cases}$$

ayant pour solution générale

$$F_3 = \lambda, \qquad G_3 = \frac{-2\lambda(1+l)}{l}, \qquad H_3 = \frac{\lambda(1+l)}{1-l}.$$

En appliquant la marche ci-dessus à la recherche du support de l'échelle (z_3), on retrouve pour ce dernier la même équation (18).

VIII. — Équation d'ordre 6 la plus générale.

Elle s'écrit sous la forme suivante, que nous avons déjà traitée tout récemment ([1]) :

$$f_3(f_1 A_2 + g_1 L_2 + P_2) + g_3(f_1 A'_2 + g_1 L'_2 + P'_2) + h_3(f_1 A''_2 + g_1 L''_2 + P''_2) = 0,$$

dans laquelle on a, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} A_2 &= a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2, \\ L_2 &= l_2 f_2 + m_2 g_2 + n_2, \\ P_2 &= p_2 f_2 + q_2 g_2 + r_2, \\ A'_2 &= a'_2 f_2 + b'_2 g_2 + c'_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on applique la règle ci-dessous et si l'on pose d'une manière générale

$$\begin{aligned} A_2 &= a_2 x + a'_2 y + a''_2, \\ B_2 &= b_2 x + b'_2 y + b''_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_2 &= r_2 x + r'_2 y + r''_2, \end{aligned}$$

on établit aisément le théorème suivant :

Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ L & M & N \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

est identiquement nul, l'équation d'ordre 6 la plus générale est représentable en un nomogramme à points alignés.

Les équations en coordonnées cartésiennes des supports des deux échelles (z_1) et (z_2) s'obtiennent en éliminant z_1 et z_2 entre les rapports

$$\frac{f_1}{\Delta_a} = \frac{g_1}{\Delta_l} = \frac{1}{\Delta_p} \quad \text{et} \quad \frac{f_2}{\Delta_a} = \frac{g_2}{\Delta_b} = \frac{1}{\Delta_c},$$

dans lesquels les Δ sont les déterminants mineurs figurant dans les deux développements suivants :

$$\Delta = A\Delta_a + L\Delta_l + P\Delta_p = A\Delta_a + B\Delta_b + C\Delta_c.$$

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 14 février 1910, p. 379.

IX. — Symétrie nomographique.

Avant d'exposer la forme caractéristique que nous avons trouvée pour les équations $F_{123} = 0$ susceptibles d'être représentées par un nomogramme à échelles superposées, rappelons, au moyen de la remarquable notion des valeurs critiques de M. d'Ocagne, la définition de la *symétrie nomographique* mise en évidence par M. Clark (*Revue de Mécanique*, t. XXI, 1907).

Soit $F_{123} = 0$ une équation représentable par un nomogramme à simple alignement défini par le déterminant

$$(20) \qquad D = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0.$$

M. d'Ocagne a montré que si, pour une valeur indéterminée de z_3 dans ce déterminant, les équations suivantes des valeurs critiques des deux variables z_1 et z_2

$$(21) \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{H_1}{H_2} = \mu,$$

admettent une solution de la forme

$$(22) \qquad f_1 = f_2,$$

les deux échelles (z_1) et (z_2) de ce nomogramme ont leurs supports confondus.

En effet, tous les alignements correspondant à l'infinité de couples des valeurs des variables z_1 et z_2 satisfaisant à la relation (22) étant indéterminés, et comme ces valeurs sont celles prises par les deux susdites variables aux points de rencontre de ces deux échelles, il en résulte que les supports de celles-ci coïncident.

Les éléments des deux premières lignes du déterminant (20) étant, dans ce cas, proportionnels pour $f_1 = f_2$, ce déterminant est divisible par $f_2 - f_1$, et nous pouvons par suite le mettre sous une forme telle qu'on ait $\mu = 1$ et la relation suivante

$$D = (f_2 - f_1) F_{123},$$

relative au cas où le support commun des deux échelles (z_1) et (z_2) est distinct de celui de l'échelle (z_3).

Cela posé, si l'on permute f_1 et f_2 dans cette dernière relation, le déterminant D change de signe, mais non de valeur. Comme il en est ainsi du facteur $f_2 - f_1$, il s'ensuit que l'équation $F_{123} = 0$ est symétrique sous une forme apparente ou cachée par rapport aux fonctions f_1 et f_2.

C'est en raison de cette symétrie analytique que cette représentation par un nomogramme à trois échelles dont deux (z_1) et (z_2) ont leurs supports confondus, est dite *symétrique par rapport aux fonctions* f_1 et f_3.

Si, de même, le système d'équations

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{G_2}{G_3} = \frac{H_2}{H_3} = \nu \tag{23}$$

des valeurs critiques de z_2 et z_3 admet une solution de la forme $f_2 = f_3$, on démontre aisément les trois points suivants : 1° les trois échelles de ce nomogramme ont même support ; 2° le déterminant D est divisible par le produit $(f_2 - f_1)(f_3 - f_2)(f_1 - f_3)$; 3° l'équation $F_{123} = 0$ est douée de la symétrie par rapport aux trois fonctions f_1, f_2, f_3.

Dans ce cas, on dit également que la représentation *est symétrique* par rapport à ces trois dernières fonctions.

X. — Théorème de la forme caractéristique des équations susceptibles d'une représentation symétrique.

Énonçons ci-dessous ce nouveau théorème et son application à la disjonction, en admettant les points suivants possibles :

1° L'équation $F_{123} = 0$ est prise sous la forme symétrique apparente par rapport au système de fonctions f_1, f_2, f_3 suivant lequel la représentation est considérée symétrique ;

2° Le déterminant correspondant (20) est pris sous une forme telle qu'on ait pour $f_1 = f_2 = f_3$

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = F_3 = F(f_i), \\ G_1 = G_2 = G_3 = G(f_i), \\ H_1 = H_2 = H_3 = H(f_i), \end{cases} \tag{24}$$

c'est-à-dire $\mu = \nu = 1$ dans les équations (21) et (23) ;

3° L'équation $F_{123} = 0$ est égale au quotient du déterminant correspondant D par le produit des facteurs parasites envisagés ci-dessus.

THÉORÈME. — *Toute équation* $F_{123} = 0$ *susceptible d'une représentation en points alignés symétrique par rapport à un système quelconque de fonctions* f_1, f_2, f_3 *possède la propriété de pouvoir être mise sous la forme dite caractéristique en* x

$$F_{123} = F(x)\Phi_{123} + G(x)\Psi_{123} + H(x)X_{123} = 0, \tag{25}$$

qui est satisfaite par $x = f_1, f_2$ *et* f_3. *Les fonctions* Φ_{123}, Ψ_{123}, X_{123} *sont symétriques par rapport aux lettres* f_1, f_2, f_3 *comme l'est l'équation considérée.*

Les éléments F_i, G_i, H_i *du déterminant correspondant* (20) *ont pour expressions*

$$F_i = F(f_i), \qquad G_i = G(f_i), \qquad H_i = X(f_i).$$

Si la symétrie est considérée par rapport à deux fonctions f_1 *et* f_2, *les éléments* F_i, G_i, H_i *pour* $i = 1$ *et* 2 *sont donnés comme ci-dessus ; quant aux éléments* F_3, G_3, H_3, *ils sont définis par l'identité*

$$F_3\Phi_{123} + G_3\Psi_{123} + H_3X_{123} \equiv 0. \tag{26}$$

RÉCIPROQUE. — *Pour que l'équation* $F_{123} = 0$ *soit représentable par un nomogramme symétrique par rapport à un système quelconque de trois fonctions* f_1, f_2, f_3, *il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme caractéristique* (25) *satisfaite par* $x = f_1, f_2$ *et* f_3.

Indépendamment de cette condition, pour que l'équation considérée soit représentable par un nomogramme symétrique par rapport à deux fonctions quelconques f_1 *et* f_2, *il faut et il suffit qu'elle puisse être mise sous la forme caractéristique* (2e) *satisfaite par* $x = f_1$ *et* f_2 *et qu'il existe un système de trois fonctions* F_3, G_3, H_3 *qui vérifie l'identité* (26).

Démonstration. — Nous allons déduire le théorème ci-dessus du déterminant (20) considéré sous la forme sus-mentionnée.

Pour cela, énonçons d'abord le lemme suivant, qu'on démontre aisément au moyen de la série de Mac-Laurin :

Lemme. — *Si* f_1, f_2, f_3 *désignent trois quantités quelconques et* F (x) *une fonction quelconque d'une seule variable, les deux différences*

$$F(f_3) - F(f_2),$$

$$\frac{F(f_3) - F(f_1)}{f_3 - f_1} - \frac{F(f_2) - F(f_1)}{f_2 - f_1}$$

sont divisibles par $f_3 - f_2$.

A présent, distinguons les deux cas suivants :

1° *Symétrie par rapport à deux fonctions* f_1 *et* f_2.

En remarquant que, dans ce cas, l'équation $F_{123} = 0$ est le quotient du déterminant correspondant

$$D = \begin{vmatrix} F(f_1) & G(f_1) & H(f_1) \\ F(f_2) & G(f_2) & H(f_2) \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix}$$

par le facteur $f_2 - f_1$, et en se reportant au lemme ci-dessus, si l'on développe ce déterminant par rapport aux éléments de la première ligne, après y avoir substitué aux éléments de la deuxième ligne le quotient de la différence des deux premières lignes par le facteur $f_2 - f_1$, on obtient la forme

$$(27) \qquad F_{123} = F(f_1)\Phi_{123} + G(f_1)\Psi_{123} + H(f_1)X_{123}.$$

Or, si l'on permute f_1 et f_2 dans les expressions des fonctions Φ_{123}, Ψ_{123}, X_{123} obtenues dans le développement ci-dessus, ces fonctions ne changent pas, et comme l'équation $F_{123} = 0$ est par hypothèse symétrique par rapport à f_1 et f_2, il en résulte que, si l'on remplace f_1 par f_2 dans la forme (27), celle-ci ne change pas non plus.

Φ_{123}, Ψ_{123}, X_{123} étant les déterminants mineurs du quotient du déterminant ci-dessus D par le facteur $f_2 - f_1$, si l'on substitue F_3, G_3, H_3 respectivement à $F(f_1)$, $G(f_1)$, $H(f_1)$ dans la forme (27), on obtient l'identité (26).

2° *Symétrie par rapport à trois fonctions* f_1, f_2, f_3.

En remarquant que, dans ce cas, l'équation $F_{123} = 0$ est le quotient du déterminant correspondant

$$D = \begin{vmatrix} F(f_1) & G(f_1) & H(f_1) \\ F(f_2) & G(f_2) & H(f_2) \\ F(f_3) & G(f_3) & H(f_3) \end{vmatrix},$$

par le produit $(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)$, et en se reportant au lemme ci-dessus, effectuons successivement sur ce déterminant les opérations suivantes pour en chasser les facteurs parasites.

Remplaçons à la fois les éléments de la deuxième ligne de ce déterminant par le quotient de la différence des deux premières lignes par le facteur $(f_2 - f_1)$ et les éléments de la troisième ligne par le quotient de la différence des deux lignes extrêmes par le facteur $f_3 - f_1$. Puis de nouveau remplaçons, dans le déterminant obtenu, la dernière ligne par le quotient de la différence des deux dernières lignes par le facteur $f_3 - f_2$.

Finalement, développons par rapport aux éléments de la première ligne ; nous aurons une équation de la forme (27). Le reste se démontre comme dans le cas précédent.

La réciproque de ce théorème s'établit aisément. En effet, les équations (25) et (26) ayant été déduites du déterminant (20), sont donc nécessaires pour que l'équation $F_{123} = 0$ soit représentable par un nomogramme du type considéré. Elles sont également suffisantes, parce que l'élimination de Φ_{123}, Ψ_{123}, X_{123} donne le déterminant voulu (20).

XI. — Exemples d'application a la disjonction des variables.

Considérons la forme canonique suivante entièrement symétrique de l'équation du troisième ordre la plus générale [1] :

$$F_{123} = f_1 f_2 f_3 + \beta \Sigma f_i f_j + \gamma \Sigma f_i + \delta = 0. \tag{28}$$

Pour mettre celle-ci sous la forme (25) admettant pour racines $x = f_1, f_2, f_3$ il est aisé de voir qu'il suffit d'ajouter à cette équa-

[1] C.G.N., p. 295.

tion (28) l'équation suivante du troisième degré

$$(x-f_1)(x-f_2)(x-f_3)=-f_1f_2f_3+x\Sigma f_if_j-x^2\Sigma f_i+x^3=0$$

admettant les mêmes racines f_1, f_2, f_3 pour qu'on ait immédiatement la forme cherchée

$$F_{123}=(x+\beta)\Sigma f_if_j-(x^2-\gamma)\Sigma f_i+(x^3+\delta)=0,$$

d'où

$$F_i=f_i+\beta, \qquad G_i=f_i^2-\gamma, \qquad H_i=f_i^3+\delta.$$

Symétrie par rapport à deux fonctions f_1 et f_2.

Considérons l'équation

$$F_{123}=f_3-g_3(f_1^2+f_2^2+f_1f_2)-f_1f_2(f_1+f_2)=0,$$

symétrique par rapport à deux fonctions f_1 et f_2. En ajoutant à cette équation, la suivante

$$(x-f_1)(x-f_2)(x+f_1+f_2)$$
$$=x^3-x(f_1^2+f_2^2+f_1f_2)+f_1f_2(f_1+f_2)=0,$$

admettant f_1 et f_2 pour racines, elle prend la forme voulue

$$F_{123}=F(x)+G(x)(f_1^2+f_2^2+f_1f_2)+H(x)[f_3-g_3(f_1^2+f_2^2+f_1f_2)]=0,$$

où

$$F(x)=x^3, \qquad G(x)=-x, \qquad H(x)=1.$$

Les éléments F_i, G_i, H_i pour $i=1$ et 2 ont, par suite, pour valeurs

$$F_i=f_i^3, \qquad G_i=-f_i, \qquad H_i=1,$$

En résolvant l'identité suivante d'après l'équation (26)

$$F_3+G_3(f_1^2+f_2^2+f_1f_2)+H_3[f_3-g_3(f_1^2+f_2^2+f_1f_2)]\equiv 0,$$

on obtient les valeurs suivantes

$$F_3=-f_3, \qquad G_3=g_3, \qquad H_3=1,$$

d'où le déterminant cherché

$$\begin{vmatrix} f_1^3 & -f_1 & 1 \\ f_2^3 & -f_2 & 1 \\ -f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

XII. — Des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $F_{123} = 0$ soit représentable par un nomogramme de l'un des trois types principaux de nomogrammes a simple alignement définis comme suit : dans l'un d'eux, les trois échelles ont leurs supports distincts; dans un autre, deux échelles sont superposées, et dans le troisième, les trois échelles sont de même superposées.

Désignons respectivement par N^3, N^2, N^1 ces trois types de nomogrammes, en indiquant par un exposant le nombre de supports distincts d'un type. D'après ce qui précède, résumons ci-après pour chacun d'eux les susdites conditions de représentabilité.

Type N^3 *à trois supports distincts.*

Il faut :

1° Que l'équation considérée puisse être mise sous la forme (2)

$$F_{123} = F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23}, \tag{29}$$

au plus d'ordre 2 par rapport à l'une *quelconque* des trois variables;

2° Qu'il existe deux systèmes de fonctions F_2, G_2, H_2 et F_3, G_3, H_3 qui vérifient les identités (3) et (4);

$$\left\{\begin{array}{l} F_2 F_{23} + G_2 G_{23} + H_2 H_{23} \equiv 0, \\ F_3 F_{23} + G_3 G_{23} + H_3 H_{23} \equiv 0; \end{array}\right. \tag{30}$$

3° Que le système d'équations (23) des valeurs critiques

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{G_2}{G_3} = \frac{H_2}{H_3} \tag{31}$$

n'admette pas une solution de la forme $f_2 = f_3$.

Type N^2 *à deux échelles* (2) *et* (3) *superposées et symétriques par rapport à deux fonctions* f_2 *et* f_3 :

Il faut :

1° Que l'équation considérée puisse être mise sous la forme (29) au plus d'ordre 2 par rapport à la *variable* z_1;

2° Que les deux identités (30) admettent une solution;

3° Que le système d'équations (31) soit satisfait pour $f_2 = f_3$.

Outre ces trois dernières conditions, on peut considérer à part les deux suivantes qu'on en déduit pour le même type N^2.

Il faut :

1° Que l'équation $F_{123} = 0$ puisse être mise sous la forme caractéristique (25)

$$F_{123} = F(x)\Phi_{123} + G(x)\Psi_{123} + H(x)X_{123} \tag{32}$$

satisfaite pour $x = f_2$ et f_3;

2° Qu'il existe un système de fonctions F_1, G_1, H_1 qui vérifie l'identité

$$F_1\Phi_{123} + G_1\Psi_{123} + H_1X_{123} \equiv 0.$$

Type N^1 *à trois échelles superposées et symétriques par rapport à trois fonctions* f_1, f_2, f_3.

Il faut que l'équation considérée puisse être mise sous la forme caractéristique ci-dessus satisfaite pour $z = f_1, f_2, f_3$.

Remarque. — Toutes les conditions indiquées dans l'ordre ci-dessus, pour un quelconque de ces trois types de nomogrammes, sont successivement nécessaires, c'est-à-dire que chacune d'elles devient nécessaire si les précédentes sont remplies.

En outre, il importe de remarquer que la représentation de l'équation $F_{123} = 0$ par un nomogramme de l'un quelconque des deux types N^1 et N^2 exige que cette équation soit douée de la symétrie par rapport au système de fonctions suivant lequel le type de nomogramme considéré est symétrique.

Telles sont les conditions qui, une fois remplies, permettent d'effectuer la disjonction sous la forme voulue.

XIII. — Application de la notion des valeurs critiques a la réduction de l'équation $F_{123} = 0$ d'ordre quelconque la plus générale a la forme (2) en vue de la disjonction de ses variables.

Afin d'abréger les écritures dans les démonstrations relatives à cette question, nous adopterons la notation suivante, à *indices superposés*, très usitée dans la théorie des équations et des formes linéaires.

Nous conviendrons de représenter des fonctions quelconques d'une seule variable z_i par $f_i^1, f_i^2, f_i^3, \ldots$ en affectant une quelconque des lettres usuelles f, g, h, Φ, Ψ, ... d'un indice inférieur correspondant à celui de la variable z_i, et d'exposants indiquant que les fonctions sont quelconques.

Nous étendrons cette notation aux constantes quelconques et aux fonctions de deux variables. Nous représenterons ainsi par $f_{12}^1, f_{12}^2, f_{12}^3, \ldots$ des fonctions quelconques dépendant chacune des deux variables z_1 et z_2.

A présent, considérons l'équation $F_{123} = 0$ nomographiquement rationnelle d'ordre quelconque par rapport à chaque variable.

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$F_{123} = f_1^1 f_{23}^1 + f_1^2 f_{23}^2 + \ldots + f_1^{n_1} f_{23}^{n_1} = 0, \tag{33}$$

ordonnée nomographiquement pour une quelconque z_1 de ses variables. Nous désignerons, d'une manière générale, par f_i^1, f_i^2, f_i^3, ..., $f_i^{n_i}$ les n_i fonctions d'une variable z_i par rapport auxquelles cette équation est considérée nomographiquement rationnelle sous forme homogène.

Ceci posé, d'après ce qui a été dit au paragraphe XII, pour que cette équation soit représentable par un nomogramme de l'un quelconque des deux types N^3 et N^2, il faut d'abord qu'elle soit réductible à la forme

$$F_{123} \equiv F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0. \tag{34}$$

Cette condition nécessaire est suffisante s'il existe deux systèmes de fonctions F_2, G_2, H_2 et F_3, G_3, H_3 vérifiant les deux identités (3) et (4).

Ayant déjà donné au paragraphe II une méthode pour résoudre ces deux identités au moyen des valeurs critiques, le problème de la disjonction des variables de l'équation (33) se ramène donc à la recherche de la forme générale des deux systèmes de fonctions inconnues F_1, G_1, H_1 et F_{23}, G_{23}, H_{23} qui doivent vérifier l'identité (34).

Pour résoudre aussi ce dernier problème par la considération des valeurs critiques et de l'ordre nomographique, nous admettrons que chacune des trois fonctions F_1, G_1, H_1 est linéaire et homogène par rapport au système des n_1 fonctions ci-dessus $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_1^{n_1}$. Autrement dit, que ces trois fonctions sont de la forme

$$(35) \qquad \begin{cases} F_1 = a_1^1 f_1^1 + a_1^2 f_1^2 + \ldots + a_1^{n_1} f_1^{n_1}, \\ G_1 = b_1^1 f_1^1 + b_1^2 f_1^2 + \ldots + b_1^{n_1} f_1^{n_1}, \\ H_1 = c_1^1 f_1^1 + c_1^2 f_1^2 + \ldots + c_1^{n_1} f_1^{n_1}, \end{cases}$$

a_1^k, b_1^k, c_1^k étant des coefficients constants à déterminer.

Si, après avoir porté dans l'identité (34) ces trois expressions et la forme (33), on applique le procédé de M. d'Ocagne à la recherche des valeurs critiques de z_2 et z_3 correspondant à une valeur indéterminée z_1, on obtient le système suivant de n_1 équations linéaires exprimant que cette identité (34) a lieu quel que soit z_1 :

$$(36) \qquad \begin{cases} a_1^1 F_{23} + b_1^1 G_{23} + c_1^1 H_{23} \equiv f_{23}^1, \\ a_1^2 F_{23} + b_1^2 G_{23} + c_1^2 H_{23} \equiv f_{23}^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1^{n_1} F_{23} + b_1^{n_1} G_{23} + c_1^{n_1} H_{23} \equiv f_{23}^{n_1}. \end{cases}$$

N'ayant assujetti les coefficients a_1^k, b_1^k, c_1^k à aucune condition, nous pouvons prendre comme *déterminant principal* de ce système le déterminant des coefficients des inconnues dans trois quelconques de ses équations; par exemple, le déterminant suivant correspondant aux trois premières :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & b_1^1 & c_1^1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 \\ a_1^3 & b_1^3 & c_1^3 \end{vmatrix}.$$

Pour que ce système d'équations (36) soit compatible, il faut et il suffit, d'après le théorème de M. Rouché, que les $(n_1 - 3)$ *déterminants caractéristiques* qu'on obtient en faisant $k = 4, 5, \ldots, n_1$ dans le tableau

$$(37) \qquad \Delta_k = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & f_{23}^1 \\ & \Delta & & f_{23}^2 \\ & & & f_{23}^3 \\ \hline a_1^k & b_1^k & c_1^k & f_{23}^k \end{array} \right|$$

soient tous nuls quels que soient z_2 et z_3.

Or, je dis que, pour que l'un quelconque Δ_k de ces $(n_1 - 3)$ déterminants soit nul, il faut et il suffit que les éléments $f_{23}^1, f_{23}^2, f_{23}^3, f_{23}^k$ de sa dernière colonne soient linéairement dépendants quels que soient z_2 et z_3; autrement dit, qu'il existe quatre nombres α, β, γ, δ *non tous nuls* et tels qu'on ait identiquement

$$(38) \qquad \alpha f_{23}^1 + \beta f_{23}^2 + \gamma f_{23}^3 + \delta f_{23}^k \equiv 0.$$

En effet, si cette condition est remplie et si nous déterminons des constantes a_1^k, b_1^k, c_1^k qui vérifient les trois équations

$$\begin{aligned} \alpha a_1^1 + \beta a_1^2 + \gamma a_1^3 + \delta a_1^k &= 0, \\ \alpha b_1^1 + \beta b_1^2 + \gamma b_1^3 + \delta b_1^k &= 0, \\ \alpha c_1^1 + \beta c_1^2 + \gamma c_1^3 + \delta c_1^k &= 0, \end{aligned}$$

nous aurons précisément exprimé qu'il existe, entre les éléments des colonnes du déterminant Δ_k, une même relation linéaire et homogène quels que soient z_2 et z_3. Par suite $\Delta_k \equiv 0$.

Remarque. — La détermination des quatre nombres α, β, γ, δ qui doivent vérifier l'identité (38) peut s'effectuer facilement en remarquant que les fonctions $f_{23}^1, f_{23}^2, f_{23}^3, f_{23}^k$ sont nomographiquement rationnelles par rapport au système de fonctions $f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^{n_i}$ (pour $i = 2$ et 3).

Une fois que les $(n_1 - 3)$ identités (38) sont résolues, pour réduire l'équation (33) à la forme (34), on tire de ces $(n_1 - 3)$ identités les valeurs de $(n_1 - 3)$ fonctions f_{23}^k ($k = 4, 5, \ldots, n_1$) en fonction linéaire et homogène des trois lettres $f_{23}^1, f_{23}^2, f_{23}^3$. Puis, en les portant dans l'équation (33), celle-ci prend la forme cherchée

$$(39) \qquad F_{123} = \varphi_1^1 f_{23}^1 + \varphi_1^2 f_{23}^2 + \varphi_1^3 f_{23}^3 \equiv F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23}.$$

A présent, remarquons que les trois fonctions F_{23}, G_{23}, H_{23} sont définies par les trois premières équations du système (36) à coefficients tous arbitraires tels que

$$\Delta = | \, a_1^1 \quad b_1^2 \quad c_1^3 \, | \neq 0.$$

Si l'on tire de ces trois équations les valeurs de $f_{23}^1, f_{23}^2, f_{23}^3$ en fonction de F_{23}, G_{23}, H_{23}, et si, après avoir introduit ces valeurs dans l'équation (39), on identifie les deux membres de celle-ci, on obtient les expressions suivantes du système F_1, G_1, H_1,

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = a_1^1\varphi_1^1 + a_1^2\varphi_1^2 + a_1^3\varphi_1^3, \\ G_1 = b_1^1\varphi_1^1 + b_1^2\varphi_1^2 + b_1^3\varphi_1^3, \\ H_1 = c_1^1\varphi_1^1 + c_1^2\varphi_1^2 + c_1^3\varphi_1^3, \end{array}\right. \tag{40}$$

où

$$\Delta \neq 0.$$

De là, le théorème suivant relatif à la réductibilité de l'équation (33) à la forme (2).

Si les fonctions $f_{23}^1, f_{23}^2, f_{23}^3, f_{23}^k$ *pour* $k = 4, 5, \ldots, n_1$ *sont linéairement dépendantes quels que soient* z_2 *et* z_3, *l'équation* $F_{123} = 0$ *est réductible à la forme* (2). *Sinon, il est impossible qu'elle le soit, à moins toutefois d'une substitution non linéaire et homogène effectuée sur les systèmes de fonctions* $f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^n$ *par rapport auxquels l'équation ci-dessus a été considérée nomographiquement rationnelle sous forme homogène.*