BULLETIN DE LA S. M. F.

R. PERRIN

Sur les halphéniennes ou expressions différentielles qu'annule l'opérateur caractéristique des covariants

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 211-238

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__211_0>

SUR LES HALPHÉNIENNES OU EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES QU'ANNULE L'OPÉRATEUR CARACTÉRISTIQUE DES COVARIANTS;

PAR M. R. PERRIN.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES HALPHÉNIENNES.

1. Dans un Mémoire publié en 1887 dans les *Mathematische Annalen*, M. Hilbert a appelé l'attention sur l'identité des invariants et covariants des formes binaires avec certaines expressions différentielles qui ne contiennent pas explicitement la variable, qui sont homogènes et isobariques par rapport à la fonction et à ses dérivées, qui enfin sont annulées par un opérateur différentiel immédiatement déductible de celui qui caractérise les invariants et covariants. De mon côté, en 1888 (*Bull. de la Soc. math. de France*), j'ai établi une propriété analogue pour les péninvariants; et, en étudiant l'application qu'on peut en faire à l'intégration de certaines équations différentielles, j'ai indiqué incidemment que d'autres expressions différentielles, non identifiables à des covariants, mais s'annulant par le même opérateur pour une valeur nulle, fractionnaire ou négative du nombre qui, dans le cas des covariants, est nécessairement entier et positif puisqu'il représente l'ordre de la forme binaire fondamentale, se présentaient faciles à intégrer par une transformation très simple. Je me suis proposé, en revenant sur ce sujet, d'étudier spécialement la nature et les propriétés de ces expressions différentielles, les cas où elles se prêtent à une intégration plus ou moins complète, enfin les principales conséquences auxquelles on est ainsi conduit, notamment au point de vue de la théorie des formes algébriques ou de la Géométrie (1).

(1) Les résultats de l'étude que j'avais faite à ce sujet étaient obtenus presque en totalité, mais le temps m'avait manqué pour les mettre en ordre en vue d'une rédaction définitive, lorsque M. Stephanos a présenté au Congrès international de Rome (1908) une Communication intitulée : *Sur une extension de la théorie des covariants des formes algébriques;* en partant d'un point de vue un peu différent,

2. *Définition de l'opérateur η et des halphéniennes.* — Soient y, z, w, ... des fonctions connues ou inconnues de la variable x; y', y'', ...; z', z'', ...; w', w'', ... leurs dérivées successives; f une fonction entière de ces diverses quantités, mais où la variable n'apparaît pas explicitement.

Désignons par η l'opérateur différentiel

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & my\frac{d}{dy'} + 2(m-1)y'\frac{d}{dy''} + 3(m-2)y''\frac{d}{dy'''} + \ldots \\
& + nz\frac{d}{dz'} + 2(n-1)z'\frac{d}{dz''} + 3(n-2)z''\frac{d}{dz'''} + \ldots \\
& + pw\frac{d}{dw'} + 2(p-1)w'\frac{d}{dw''} + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

où m, n, p, ... sont des nombres réels indépendants et tout à fait arbitraires, entiers ou fractionnaires, rationnels ou non, positifs, nuls ou négatifs. Ces nombres seront appelés les *indices* respectivement affectés à y, z, w, ...; lorsqu'il sera nécessaire de les rappeler explicitement, je désignerai l'opérateur (1) par $\eta_{my,\,nz,\,pw,\,\ldots}$.

Appliqué à un terme quelconque de f, l'opérateur η fournit évidemment un nombre fini de termes, tous de même degré que le terme initial par rapport à chacun des groupes de quantités y, z, ... séparément, et de poids moindre d'une unité (en appelant *poids* la somme des indices de dérivation).

Pour que $\eta(f)$ s'annule identiquement, il est donc nécessaire et suffisant que f soit composée de groupes de termes tels que chaque groupe soit homogène, isobarique, et s'annule séparément par l'opérateur η. J'appellerai désormais, pour abréger, *halphé-*

---

il y indiquait quelques-unes des propriétés principales de ces expressions différentielles analogues aux covariants des formes algébriques que j'avais étudiées de mon côté. Me trouvant présent à la séance du Congrès où M. Stephanos faisait cette Communication, je présentai aussitôt quelques observations verbales, résumant les autres résultats que j'avais obtenus pour ma part dans cette étude. Il ne sera pas sans intérêt, je pense, de faire connaître ici *in extenso* ces résultats, ainsi que la méthode qui m'y a conduit; d'autant plus que, comme il a été dit ci-dessus, le point de vue auquel je m'étais placé au départ diffère sensiblement de celui de M. Stephanos (on peut même dire qu'il en est l'inverse), et que la marche suivie conduit, en passant, à quelques résultats intéressants, en dehors même du but directement poursuivi.

nienne [1] tout groupe satisfaisant à ces conditions, ou autrement dit, toute expression différentielle ne renfermant pas explicitement la variable, homogène par rapport à chacune des fonctions qu'elle renferme, isobarique par rapport à la somme des indices de dérivation de toutes ces fonctions prises ensemble, enfin s'annulant par l'opérateur η.

Les nombres m, n, p, ... figurant dans cet opérateur seront dits les *indices* de l'halphénienne en y, z, w, ... *L'étendue* de l'halphénienne sera l'ordre de dérivation le plus élevé qui y figure. Enfin j'appellerai *ordre* de l'halphénienne le nombre

$$g = m\theta_y + n\theta_z + p\theta_w + \ldots - 2\pi,$$

où θ_y, θ_z, θ_w, ... sont les degrés respectifs, les mêmes pour tous les termes, auxquels entrent y et ses dérivées, z et ses dérivées, w et ses dérivées, etc.; et π est le poids commun de tous les termes. Il est évident qu'on trouverait la même valeur g pour l'ordre de l'halphénienne, si on la regardait simplement comme une fonction entière de quantités $y, z, w, \ldots; y', z', w', \ldots; y'', z'', w'', \ldots$, dont les ordres respectifs seraient par convention $m, n, p, \ldots; m-2, n-2, p-2, \ldots, m-4, n-4, p-4, \ldots$ et ainsi de suite.

3. *Distribution des halphéniennes en régulières et singulières.* — Lorsque m, n, p, ... sont des entiers positifs, il suffit souvent de remplacer dans une halphénienne donnée y, z, w, ... par des formes binaires indépendantes d'ordres m, n, p, ... respectivement, pour la transformer en un covariant (ou invariant) commun de ces formes, et dont l'ordre par rapport à la variable est précisément g. Mais s'il arrive que g soit négatif, on n'obtiendra pas un covariant : le résultat sera identiquement nul. Soit, par exemple, l'expression différentielle

$$3y^{\text{IV}}z + 4y'''z'. \tag{2}$$

Il est aisé de vérifier que c'est une halphénienne d'indices 2 en y, 3 en z; le poids étant 4, l'ordre est -3, en vertu de la

---

(1) En souvenir de l'éminent géomètre qui a donné, comme on le verra plus loin, les premiers exemples d'intégration d'expressions de cette nature.

définition donnée ; et si l'on y met pour y et z des formes binaires respectivement d'ordres 2 et 3, le résultat est identiquement nul.

Cette particularité, qui permet de considérer la notion des halphéniennes comme comportant un degré de généralité plus élevé, même pour les indices entiers et positifs, que celle des covariants, résulte du fait que, pour tout indice entier et positif μ, on a nécessairement, d'après la définition de l'opérateur η,

$$\eta(y^{(\mu+1)}) = 0,$$

en sorte que la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction quelconque y de x est une halphénienne d'indice μ en y, mais dont la valeur devient identiquement nulle si l'on prend pour y un polynome en x d'ordre μ.

D'autre part, l'opérateur $\eta_{\mu y}$, pour μ entier et positif, devient

$$(3) \quad \mu y \frac{d}{dy'} + 2(\mu-1)y'\frac{d}{dy''} + \ldots + \mu y^{(\mu-1)}\frac{d}{dy^{(\mu)}} \\ - (\mu+2)y^{(\mu+1)}\frac{d}{dy^{(\mu+2)}} - 2(\mu+3)y^{(\mu+2)}\frac{a}{dy^{(\mu+3)}} - \ldots .$$

Il est donc identique à l'opérateur $n_{\mu y, -(\mu+2)z}$ construit avec les indices respectifs μ et $-(\mu+2)$ pour deux fonctions indépendantes y et z, pourvu qu'on admette que y a toutes ses dérivées nulles à partir de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$, et qu'on remplace ensuite z par $y^{(\mu+1)}$.

En d'autres termes, une halphénienne, d'indice entier et positif μ par rapport à une fonction y, peut aussi être regardée comme une halphénienne d'indices μ et $-(\mu+2)$ par rapport aux deux fonctions indépendantes y et $y^{(\mu+1)}$ pourvu qu'on y regarde toute dérivée $y^{(\nu)}$ d'ordre $\nu > \mu+1$ comme la dérivée d'ordre $\nu-\mu-1$ de la fonction indépendante $y^{(\mu+1)}$.

On est ainsi conduit à distinguer deux classes d'halphéniennes :

1° Les halphéniennes *régulières*, qui peuvent être obtenues en donnant des valeurs particulières, d'ailleurs quelconques, à m, n, p, ... dans l'expression différentielle d'un covariant (ou invariant) du système composé des formes binaires respectivement d'ordres m, n, p, ... ; par exemple

$$5yy'' - 8y'^2,$$

qui s'obtient en faisant $m = -\frac{5}{3}$ dans l'expression différentielle

$$myy'' - (m-1)y'^2,$$

correspondant au covariant hessien de la forme binaire y d'ordre m;

2° Les halphéniennes *singulières,* qui n'admettent pas ce mode de formation; par exemple

$$yy''' + 3y'y''$$

qui est une halphénienne d'indice 1 en y.

Nous verrons plus loin quelle est la loi générale de formation des halphéniennes singulières.

4. *Méthodes de formation des halphéniennes.* — Pour construire toutes les halphéniennes, tant régulières que singulières, la méthode la plus générale est celle des coefficients indéterminés, fondée sur la définition même de ces expressions.

Proposons-nous, par exemple, de construire toutes les halphéniennes unilettres (c'est-à-dire à une seule fonction) de degré 3 et de poids 5. Leur forme la plus générale est évidemment

$$\alpha y^2 y^{\text{v}} + \beta yy'y^{\text{iv}} + \gamma yy''y''' + \delta y'^2 y''' + \varepsilon y'y''^2,$$

et il suffit de déterminer m, α, β, γ, δ, ε de telle sorte que l'opérateur η_{my} donne identiquement zéro; d'où les quatre équations de condition

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & m\beta + 5(m-4)\alpha = 0, \\ & m\delta + (m-1)\gamma + 2(m-3)\beta = 0, \\ & m\varepsilon + 3(m-2)\gamma = 0, \\ & 4(m-1)\varepsilon + 3(m-2)\delta = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les halphéniennes régulières, s'il en existe, il faut laisser m indéterminé. Alors le système (4) permet de calculer $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ en fonction de m, et l'on obtient l'halphénienne régulière unique

$$(5)\quad \begin{aligned} & m^2(m-1)y^2y^{\text{v}} - 5m(m-1)(m-4)yy'y^{\text{iv}} \\ & \quad + 2m(m-3)(m-4)yy''y''' + 8(m-1)(m-3)(m-4)y'^2y''' \\ & \quad - 6(m-2)(m-3)(m-4)y'y''^2. \end{aligned}$$

Toutefois on peut satisfaire aux deux dernières équations du système (4) en faisant $m = 2$, $\varepsilon = 0$; les deux premières équations fournissent alors l'halphénienne à deux indéterminées

$$\alpha y(yy^{\mathrm{v}} + 5y'y^{\mathrm{iv}} + 10y''y''') + \delta y'''(y'^2 - 2yy''), \tag{6}$$

qui ne peut pas s'obtenir en faisant $m = 2$ dans l'expression (5) et qui constitue par suite une halphénienne singulière ou plutôt la somme de deux halphéniennes singulières distinctes. Chacune de celles-ci se décompose d'ailleurs en un produit de deux halphéniennes, soit régulières $(y, y'^2 - 2yy'')$, soit singulières

$$(y''', yy^{\mathrm{v}} + 5y'y^{\mathrm{iv}} + 10y''y'''),$$

mais dont aucune n'a le degré ou le poids demandé.

D'autres valeurs entières de m, introduites dans l'expression (5), la rendent également décomposable en un produit de facteurs, dont chacun est une halphénienne, soit régulière, soit singulière. Ainsi, pour $m = 0, 1, 3, 4$, on trouve respectivement

$$\begin{aligned} &y'(2y'y''' - 3y''^2), \\ &y''(yy''' + 3y'y''), \\ &y\,(3yy^{\mathrm{v}} + 5y'y^{\mathrm{iv}}), \\ &y^2y^{\mathrm{v}}. \end{aligned}$$

On voit par cet exemple que le produit d'une halphénienne singulière par une autre halphénienne, régulière ou singulière, peut donner une halphénienne régulière.

Proposons-nous encore de construire toutes les halphéniennes unilettres de degré 2 et de poids 5. Leur forme générale sera

$$\alpha yy^{\mathrm{v}} + \beta y'y^{\mathrm{iv}} + \gamma y''y''',$$

et les équations de condition s'écriront

$$\left\{\begin{aligned} m\beta + 5(m-4)\alpha &= 0, \\ 2(m-1)\gamma + 4(m-3)\beta &= 0, \\ 3(m-2)\gamma &= 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si m doit rester indéterminé, ces équations exigent $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Il n'existe donc pas d'halphénienne régulière du type demandé. Mais on trouve sans peine trois solutions particulières du système (7), savoir pour $m = 2, 3, 4$; ce qui donne les trois halphéniennes singulières

$$\begin{array}{ll} yy^{\mathrm{v}} + 5y'y^{\mathrm{iv}} + 10y''y''' & \text{(d'indice 2)}, \\ 3yy^{\mathrm{v}} + 5y'y^{\mathrm{iv}} & \text{(d'indice 3)}, \\ yy^{\mathrm{v}} & \text{(d'indice 4)}, \end{array}$$

que nous avions déjà rencontrées incidemment dans le calcul précédent.

Comme dernier exemple, proposons-nous de construire les halphéniennes bilettres de degrés $(1, 1)$ et de poids 5, c'est-à-dire de la forme

$$\alpha y z^{\mathrm{v}} + \beta y' z^{\mathrm{iv}} + \gamma y'' z''' + \delta y''' z'' + \varepsilon y^{\mathrm{iv}} z' + \zeta y^{\mathrm{v}} z.$$

Soient m, n les indices affectés à y et z; on trouve pour les équations de condition :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{r} m\beta + 5(n-4)\alpha = 0, \\ (m-1)\gamma + 2(n-3)\beta = 0, \\ (m-2)\delta + (n-2)\gamma = 0, \\ 2(m-3)\varepsilon + (n-1)\delta = 0, \\ 5(m-4)\zeta + n\varepsilon = 0. \end{array} \right.$$

En laissant m et n indéterminés, le système (8) permet d'exprimer cinq des coefficients α, β, ... en fonction de m, n et du sixième, ce qui donne l'halphénienne régulière unique

$$(9) \qquad \begin{array}{l} m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) y z^{\mathrm{v}} \\ - 5(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(n-4) y' z^{\mathrm{iv}} \\ + 10(m-2)(m-3)(m-4)(n-4)(n-3) y'' z''' \\ - 10(m-3)(m-4)(n-4)(n-3)(n-2) y''' z'' \\ + 5(m-4)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1) y^{\mathrm{iv}} z' \\ - (n-4)(n-3)(n-2)(n-1) n y^{\mathrm{v}} z. \end{array}$$

Mais on peut aussi disposer de m et n de manière à satisfaire à une quelconque des équations (8); ou de m, n et d'un des coefficients arbitraires α, β, ..., de manière à satisfaire à deux équations consécutives du système (8); ou de m, n et de deux coefficients de manière à satisfaire à trois équations consécutives, et ainsi de suite; dans tous ces cas, il restera *deux* coefficients arbitraires de plus que d'équations à satisfaire, en sorte qu'on obtiendra une halphénienne à deux indéterminées, non réductible par conséquent au type (9), c'est-à-dire enfin un couple d'halphéniennes singulières.

Voici ces couples, avec les indices correspondants (il y aurait 15 couples, je n'en écris que 9, les 6 autres pouvant s'en déduire par l'échange de y avec z et de m avec n) :

$$m = 0, \qquad n = 4 \left\{ \begin{array}{l} yz^{\text{v}}, \\ 5y'z^{\text{iv}} + 10y''z''' + 10y'''z'' + 5y^{\text{iv}}z' + y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

$$m = 1, \qquad n = 3 \left\{ \begin{array}{l} yz^{\text{v}} + 5y'z^{\text{iv}}, \\ 10y''z''' + 10y'''z'' + 5y^{\text{iv}}z' + y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

$$m = 2, \qquad n = 2 \left\{ \begin{array}{l} yz^{\text{v}} + 5y'z^{\text{iv}} + 10y''z''', \\ 10y'''z'' + 5y^{\text{iv}}z' + y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

$$m = 1, \qquad n = 4 \left\{ \begin{array}{l} yz^{\text{v}} \\ 10y''z''' + 20y'''z'' + 15y^{\text{iv}}z' + 4y^{\text{v}}z \end{array} \right.$$

$$m = 2, \qquad n = 3 \left\{ \begin{array}{l} 2yz^{\text{v}} + 5y'z^{\text{iv}}, \\ 10y'''z'' + 10y^{\text{iv}}z' + 3y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

$$m = 2, \qquad n = 4 \left\{ \begin{array}{l} yz^{\text{v}}, \\ 5y'''z'' + 5y^{\text{iv}}z' + 2y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

$$m = 3, \qquad n = 3 \left\{ \begin{array}{l} 3yz^{\text{v}} + 5y'z^{\text{iv}}, \\ 5y^{\text{iv}}z' + 3y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

$$m = 3. \qquad n = 4 \left\{ \begin{array}{l} yz^{\text{v}}, \\ 5y^{\text{iv}}z' + 4y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

$$m = 4, \qquad n = 4 \left\{ \begin{array}{l} yz^{\text{v}}, \\ y^{\text{v}}z. \end{array} \right.$$

On obtient ainsi en tout 22 halphéniennes singulières distinctes du type demandé.

5. *Halphéniennes singulières.* — Dans les divers exemples qui viennent d'être traités, les halphéniennes singulières n'apparaissent que pour des valeurs entières et positives (ou nulles) des indices. Il ne peut en être autrement; car ces indices n'entrent dans les équations de condition que par les binomes tels que $m - \mu$, où μ est entier, positif et au plus égal à $e - 1$ (e étant l'étendue), qui multiplient les coefficients α, β, ...; il faut donc que un ou plusieurs de ces binomes s'annulent pour rendre disponible une indé-

terminée de plus que pour l'halphénienne régulière, s'il en existe; ou une indéterminée au moins, s'il n'existe pas d'halphénienne régulière du type demandé. On peut donc dire que dans toute halphénienne singulière, un au moins des indices est entier et positif (ou nul) et inférieur d'une unité au moins à l'étendue de l'halphénienne.

Mais on peut aller plus loin et démontrer que toute halphénienne singulière, aux indices μ, ν, ..., en y et z, ..., devient une halphénienne régulière, si l'on regarde les dérivées $y^{(\mu+1)}$, $z^{(\nu+1)}$, ... (dont une *au moins* figure dans l'halphénienne d'après la remarque précédente), comme des fonctions indépendantes ayant respectivement pour dérivées $y^{(\mu+2)}$, $y^{(\mu+3)}$; ..., $z^{(\nu+2)}$, $z^{(\nu+3)}$; ..., et affectées des indices $-(\mu+2)$, $-(\nu+2)$, ...

En effet, considérons l'expression différentielle la plus générale de mêmes degré et poids que l'halphénienne singulière donnée, mais à coefficients indéterminés α, β, γ, ...; et supposons écrit le système (Γ) des équations de conditions qui expriment qu'elle est annulée par l'opérateur $\eta_{my,nz,\ldots}$, où m, n, ... sont laissés indéterminés. Puisqu'il existe une halphénienne singulière de ce type, il faut que les équations (Γ) permettent, lorsqu'on y assigne à m, n, ..., les valeurs μ, ν, ..., de conserver une arbitraire de plus parmi les coefficients α, β, ... (soit $r+1$ au lieu de r) que lorsque m, n, ... restaient indéterminés. Mais cette hypothèse, que m, n reçoivent d'avance les valeurs μ, ν, ..., revient à effacer d'avance dans l'opérateur η les termes

$$(\mu-1)(m-\mu)\frac{d}{dy^{(\mu+1)}}, \qquad (\nu-1)(n-\nu)\frac{d}{dz^{(\nu+1)}}, \qquad \ldots,$$

et à faire dans les autres termes $m=\mu$, $n=\nu$, ...

Or, si l'on remplace dans l'halphénienne donnée $y^{(\mu+1)}$, $z^{(\nu+1)}$, ... par des fonctions indépendantes v, w, ... aux indices p, q, ..., puis les dérivées d'ordre supérieur $y^{(\mu+2)}$, $z^{(\nu+2)}$, ... par v', w', ... et ainsi de suite, et qu'on veuille déterminer α, β, ... au moyen de l'opérateur $\eta_{my,nz,pv,qw,\ldots}$, on obtiendra un système (Γ') d'équations de conditions qui différera du système (Γ) précisément par la disparition des termes en $m-\mu$, $n-\nu$, ... et par la substitution, dans certains autres termes, des lettres p, q, ... à $-(\mu+2)$, $-(\nu+2)$, ... Rien n'empêchera donc de conserver $r+1$ arbitraires, comme tout à l'heure, parmi les coefficients α, β, ..., tout en laissant m, n, p, q, ... indéterminés, et lorsqu'on fera ensuite $m=\mu$, $n=\nu$, $p=-(\mu+2)$, $q=-(\nu+2)$, dans l'halphénienne régulière obtenue, on pourra reproduire l'halphénienne singulière donnée, sauf les lettres v, w, ... au lieu de $y^{(\mu+1)}$, $z^{(\nu+1)}$, ... Cette halphénienne singulière apparaîtra donc comme obtenue, à la manière des halphéniennes régulières, par certaines valeurs particulières données à m, n, p, q, ... dans l'expression différentielle d'un certain covariant ou invariant du système de plusieurs formes binaires respectivement d'ordres indéterminés $m, n, p, q, \ldots$, à condition de remplacer ensuite une ou plusieurs des fonctions indépendantes par des dérivées d'un certain ordre d'autres fonctions indépendantes ou même des fonctions conservées, et d'assigner à m, n, p, q, ... les valeurs compatibles avec cette substitution.

Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons l'halphénienne singulière d'indice 2 trouvée précédemment

$$yy^{\mathrm{v}}+5y'y^{\mathrm{iv}}+10y''y'''.$$

Le système (Γ) était ici le système des équations (7). Remplaçant y''' par v, l'expression prend la forme

$$\alpha y v''+\beta y' v'+\gamma y'' v,$$

et l'on trouve pour le système (Γ')

$$(10)\qquad \begin{cases} m\beta+2(p-1)\alpha=0,\\ 2(m-1)\gamma+p\beta=0,\end{cases}$$

p étant l'indice affecté à v. Ce système conduit à l'halphénienne régulière

$$(11)\qquad m(m-1)yv''-2(m-1)(p-1)y'v'+p(p-1)y''v,$$

laquelle reproduit bien l'halphénienne proposée, quand on y fait $v=y'''$, ce qui exige qu'on prenne $m=2$, $p=-4$.

Un cas particulier qu'il importe de noter est celui où l'halphénienne singulière dérive d'une halphénienne unilettre, dans laquelle on a remplacé la fonction indépendante y par sa $(m+1)^{\text{ième}}$ dérivée, et m par $-(m+2)$. Ainsi le premier membre de l'équation différentielle des coniques

$$(12)\qquad 9y''^2y^{\mathrm{v}}-45y''y'''y^{\mathrm{iv}}+40y'''^3=0$$

est une halphénienne singulière d'indice 1, et elle dérive de l'halphénienne régulière

$$(13) \qquad m^2y^2y''' - 3m(m-2)yy'y'' + 2(m-1)(m-2)y'^3,$$

en y remplaçant y par y'', ce qui entraîne $m = -3$, puisque y'' n'est une halphénienne que si y est considéré comme d'ordre 1, et que son ordre est alors -3 (1).

Nous verrons d'ailleurs plus loin que tout invariant différentiel de Halphen est une halphénienne singulière pure d'indice 1 en y, ou, si on le préfère, d'indice -3 en y''.

6. Pour résumer ce qui concerne les méthodes de formation des halphéniennes, on peut dire :

1° Toutes les halphéniennes *régulières* distinctes s'obtiendront en transformant en expressions différentielles tous les covariants distincts de la forme binaire d'ordre indéterminé m, et des systèmes de formes binaires simultanées d'ordres indéterminés m, n, p, ... Cette transformation consiste, comme on sait, à remplacer dans le péninvariant, source du covariant considéré, les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_0, b_1, b_2, \ldots; c_0, c_1, c_2, \ldots$ des diverses formes, respectivement par $y, \frac{y'}{m}, \frac{y''}{m(m-1)}, \ldots; z, \frac{z'}{n}, \frac{z''}{n(n-1)}, \ldots$.

2° Toutes les halphéniennes *singulières* distinctes s'obtiendront en remplaçant, dans les halphéniennes régulières, une ou plusieurs des fonctions indépendantes par des dérivées d'un certain ordre de ces fonctions ou d'autres fonctions indépendantes, et en assignant aux indices correspondants les valeurs convenables, d'après la règle donnée précédemment ; si par exemple on veut remplacer une fonction indépendante z, à laquelle est affecté l'indice indéterminé n, par la dérivée d'une autre fonction indépendante y à laquelle est affecté l'indice m, il faudra que ce soit par la $(m+1)^{\text{ième}}$ dérivée, et l'on devra remplacer n par $-(m+2)$.

Ce procédé permettra d'obtenir des familles d'halphéniennes singulières de degré donné et de poids variable. Ainsi, au covariant hessien de la forme d'ordre m correspond l'halphénienne régulière

(1) J'appellerai *halphéniennes singulières pures* ces halphéniennes singulières qui ne renferment pas de dérivée d'ordre inférieur à $m+1$.

déjà considérée ci-dessus

$$(14) \qquad myy'' - (m-1)y'^2.$$

Remplaçant y par $y^{(m+1)}$ et m par $-(m+2)$, on obtient la famille

$$(15) \qquad (m+2)y^{(m+1)}y^{(m+3)} - (m+3)y^{(m+2)^2}.$$

De même, au jacobien de deux formes binaires d'ordres m et n correspond l'halphénienne régulière

$$(16) \qquad myz' - nzy',$$

d'où l'on déduit la famille d'halphéniennes singulières

$$(17) \qquad myy^{(m+2)} + (m+2)y'y^{(m+1)}.$$

Les halphéniennes singulières unilettres binomes rencontrées précédemment appartiennent toutes à l'une ou à l'autre de ces deux familles.

7. *Première propriété fondamentale des halpheniennes.* — Avant d'appliquer les principes qui viennent d'être établis à la formation et à l'étude des halphéniennes les plus simples ou présentant un intérêt particulier au point de vue soit de la Géométrie, soit de la théorie des formes, je vais établir deux propriétés importantes de cette classe d'expressions différentielles.

La première peut s'énoncer comme il suit :

Si dans une halphénienne aux indices donnés m, n, ... *en* y, z, ..., *on substitue à* y, z, ... *des halphéniennes aux indices quelconques* p, q, ... *en* v, w, ... *mais respectivement d'ordres* m, n, ..., *le résultat sera une halphénienne aux indices* p, q, ... *en* v, w, ...

Cette propriété n'est que l'extension aux halphéniennes de la propriété bien connue des formations invariantes, savoir que tout invariant ou covariant d'un covariant d'un système de formes est aussi un invariant ou covariant de ce système; elle est presque évidente, puisqu'il a été établi ci-dessus que toute halphénienne, régulière ou singulière, peut être considérée comme obtenue en donnant aux indices m, n, p, ... certaines valeurs déterminées dans l'expression différentielle d'un certain covariant d'un système déterminé de formes binaires ayant pour ordres respectifs les indices m, n, p, ...

Le théorème étant vrai pour les halphéniennes directement réductibles à des covariants, c'est-à-dire pour une infinité de systèmes de valeurs des indices (savoir toutes les valeurs entières et positives supérieures à l'étendue de l'halphénienne), tandis que les coefficients des divers termes de l'halphénienne sont des polynomes d'ordre fini en m, n, p, ..., il est nécessairement vrai pour *toutes* les valeurs des indices. Mais il ne sera pas inutile de donner une démonstration directe et rigoureuse, fondée sur la seule définition des halphéniennes.

A cet effet, j'introduirai, avec l'opérateur η déjà défini, un autre opérateur ω, savoir

$$(18)\qquad \begin{aligned}\omega = {} & y'\frac{d}{dy} + y''\frac{d}{dy'} + y'''\frac{d}{dy''} + \ldots \\ & + z'\frac{d}{dz} + z''\frac{d}{dz'} + z'''\frac{d}{dz''} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier directement que si V est une fonction *absolument quelconque* de $x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots$ on a identiquement

$$(19)\quad \begin{aligned}(\eta\omega - \omega\eta)\mathrm{V} = {} & my\frac{d\mathrm{V}}{dy} + (m-2)y'\frac{d\mathrm{V}}{dy'} + (m-4)y''\frac{d\mathrm{V}}{dy''} + \ldots \\ & + nz\frac{d\mathrm{V}}{dz} + (n-2)z'\frac{d\mathrm{V}}{dz'} + (n-4)z''\frac{d\mathrm{V}}{dz''} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

m, n, ... étant toujours les indices, d'ailleurs quelconques, qui figurent dans l'opérateur η.

Supposons que V soit une fonction entière dont tous les termes soient de même degré θ_y par rapport à l'ensemble des lettres y, y', y'', ...; de même degré θ_z par rapport à l'ensemble des lettres z, z', z'', ...; et de même poids π (somme des indices de dérivation de toutes les lettres accentuées); l'opérateur du second membre de l'identité (19) fournira évidemment le produit de V par

$$m\theta_y + n\theta_z + \ldots - 2\pi,$$

c'est-à-dire par la quantité g que nous avons appelée *l'ordre* de V. Dès lors, les restrictions relatives aux degrés partiels et aux poids des différents termes de V deviennent inutiles, pourvu que *l'ordre* de tous ces termes soit le même; et comme d'autre part l'opérateur ω, appliqué à une expression différentielle qui ne renferme pas la variable, équivaut à une simple différentiation, nous pouvons dire d'une manière générale :

Si V est une expression différentielle ne renfermant pas la variable, et dont tous les termes ont un même ordre g; et si V' est sa dérivée, on a

$$\eta V' = (\eta V)' + gV. \tag{20}$$

Dans cette formule, remplaçons V par V' qui est évidemment une expression analogue, mais d'ordre $g - 2$; il vient

$$\eta V'' = (\eta V')' + (g - 2)V'.$$

Mais en différentiant (20), il vient aussi

$$(\eta V')' = (\eta V)'' + gV';$$

d'où par comparaison

$$\eta V'' = (\eta V)'' + 2(g - 1)V'. \tag{21}$$

On est ainsi conduit par induction à la formule générale

$$\eta V^{(s)} = (\eta V)^{(s)} + s(g - s + 1)V^{(s-1)}, \tag{22}$$

dont l'exactitude se vérifie aisément au moyen de l'identité (20) pour une valeur entière quelconque de s, en la supposant exacte pour la valeur immédiatement inférieure d'une unité.

Il convient de rappeler que dans la formule (22) les indices supérieurs sont des indices de dérivation, et que l'opérateur η est construit avec les mêmes indices m, n, ... qui sont affectés aux fonctions y, z, ... pour le calcul de l'ordre g commun à tous les termes de l'expression V.

Soient maintenant V, W deux expressions différentielles (je me borne à deux pour abréger l'écriture, mais la démonstration s'appliquerait à un nombre quelconque) formées avec y, z, et respectivement d'ordres p et q. Soit U une fonction de V, W et de leurs dérivées dont tous les termes aient un même ordre G, calculé en affectant à V, W les indices p et q respectivement, c'est-à-dire en considérant V, W comme d'ordres p, q; leurs dérivées premières V′, W′, comme d'ordres $p-2$, $q-2$; et ainsi de suite. S l'on remplace V, W et leurs dérivées successives par leurs valeurs en $y, y', y'', \ldots; z, z', z'', \ldots$, U devient une fonction de ces quantités et nous pouvons lui appliquer l'opérateur $\eta_{my,nz}$. Nous aurons évidemment

$$\eta_{my,nz}(\mathrm{U}) = \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}}\eta\mathrm{V} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}'}\eta\mathrm{V}' + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}''}\eta\mathrm{V}'' + \ldots$$
$$+ \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}}\eta\mathrm{W} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}'}\eta\mathrm{W}' + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}''}\eta\mathrm{W}'' + \ldots,$$

c'est-à-dire, à cause des relations (22) qui ont lieu pour les V et les W :

$$(23)\quad \eta_{my,nz}(\mathrm{U}) = \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}}\eta\mathrm{V} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}'}(\eta\mathrm{V})' + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}''}(\eta\mathrm{V})'' + \ldots$$
$$+ \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}}\eta\mathrm{W} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}'}(\eta\mathrm{W})' + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}''}(\eta\mathrm{W})'' + \ldots$$
$$+ p\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}'} + 2(p-1)\mathrm{V}'\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}''} + 3(p-2)\mathrm{V}''\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}'''} + \ldots$$
$$+ q\mathrm{W}\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}'} + 2(q-1)\mathrm{W}'\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}''} + 3(q-2)\mathrm{W}''\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{W}'''} + \ldots.$$

Les deux premières lignes de l'opérateur développé au second membre renferment dans chacun de leurs termes $\eta\mathrm{V}$, $\eta\mathrm{W}$ ou leurs dérivées, quantités qui s'annulent toutes si V, W sont des halphéniennes ou des groupes d'halphéniennes en y, z, ... aux indices m, n. Restent les deux dernières lignes, qui constituent précisément l'opérateur $\eta_{pv,qw}$, appliqué à U centralisée comme fonction de V, W et de leurs dérivées, aux indices p, q. Il reste donc finalement

$$(24)\qquad \eta_{my,nz}(\mathrm{U}) = \eta_{pv,qw}(\mathrm{U}),$$

ce qui démontre le théorème; car si U est une halphénienne en V, W, aux indices p, q, le second membre de (24) est nul par définition; il en est donc de même du premier, c'est-à-dire que U est devenue, par la substitution envisagée, une halphénienne en y, z, aux indices m, n.

Le théorème connu relatif aux invariants et covariants se présente maintenant comme un cas particulier de celui-ci, quand les indices m, n, p, q sont tous entiers et positifs.

Remarquons en outre que si U n'est pas une halphénienne en V, W, mais que V, W soient toujours des halphéniennes (ou groupes d'halphéniennes de même ordre) en y, z, ..., on pourra déduire de (24) la relation générale quel que soit s :

$$\eta^{s}_{my,nz}(\mathrm{U}) = \eta^{s}_{pv,qw}(\mathrm{U}). \tag{25}$$

Comme chaque opération η diminue le poids d'une unité, il viendra nécessairement

$$\eta^{\pi+1}_{pv,qw}(\mathrm{U}) = 0,$$

π étant le poids de U considérée comme fonction de V, W et de leurs dérivées ; et l'on en conclura en vertu de (25)

$$\eta^{\pi+1}_{my,nz}(\mathrm{U}) = 0. \tag{26}$$

Si donc on appelle avec M. Hilbert (Mémoire déjà cité) *expression de rang r* une expression différentielle qui s'annule par l'opération η répétée *précisément* $r+1$ fois, on peut dire :

Toute expression différentielle qui est d'ordre g et de rang r quand on y attribue les indices respectifs m, n, ... aux fonctions v, w, ... dont elle est formée, conserve son ordre et son rang, quand on substitue à v, w, ... des halphéniennes (ou groupes d'halphéniennes) d'ordres respectifs m, n, ... par rapport à de nouvelles fonctions y, z, ..., quels que soient les indices p, q, ... attribués à ces dernières.

Ce résultat concorde avec une remarque de M. Hilbert relative aux fonctions des dérivées d'une forme binaire, savoir qu'une telle fonction, si elle est de rang r, est d'ordre $g+r$ par rapport à la variable x, g étant le nombre défini ci-dessus comme *ordre* d'une expression différentielle. En effet, soit g' l'ordre (par rapport à x) d'une telle expression ; en lui appliquant r fois l'opérateur η, on ne change pas son degré θ en y, on augmente de r son ordre par rapport à x, et l'on diminue son poids de r ; mais l'expression obtenue est un covariant, puisqu'elle s'annule par hypothèse en appliquant l'opérateur η une fois de plus, et son ordre par rapport à x doit être par conséquent

$$g' + r = m\theta - 2(\pi - r);$$

d'où

$$g' = m\theta - 2\pi + r = g + r.$$

Remarquons encore que dans la formule (20) les deux termes du second membre s'annulent si V est une halphénienne d'ordre zéro; donc *la dérivée de toute halphénienne d'ordre zéro est elle-même une halphénienne*. Plus généralement, de (20) on peut déduire la formule générale

$$(27) \qquad \eta^s(V') = (\eta^s V)' + s(q+s-1)\eta^{s-1}V,$$

qui montre que si une expression V est de rang s, sa dérivée V' est de rang $s+1$; à moins que l'ordre de V ne soit précisément $-s$, auquel cas V' est de même rang que V.

8. *Deuxième propriété fondamentale des halphéniennes. — Soit un système d'équations différentielles simultanées à q fonctions inconnues*

$$(28) \qquad \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_q, \ldots; y'_1, y'_2, \ldots, y'_q; y''_1, \ldots) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_q, \ldots; y'_1, y'_2, \ldots, y'_q; y''_1, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q(y_1, y_2, \ldots, y_q, \ldots; y'_1, y'_2, \ldots, y'_q; y''_1, \ldots) = 0. \end{cases}$$

Si $f_1, f_2, \ldots, f_q$ sont des halphéniennes en $y_1, y_2, \ldots, y_q$ aux mêmes indices respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_q$, les intégrales générales du système pourront toujours se mettre sous la forme

$$(29) \qquad y_1 = u^{n_1}\varphi_1\left(\frac{v}{u}\right), \quad y_2 = u^{n_2}\varphi_2\left(\frac{v}{u}\right), \quad \ldots, \quad y_q = u^{n_q}\varphi_q\left(\frac{v}{u}\right),$$

u et v désignant deux binomes arbitraires $ax + a'$, $bx + b'$.

Pour le démontrer, soit

$$(29\ bis) \qquad y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad y_q = \varphi_q(x)$$

un système d'intégrales du système (28), et proposons-nous de former un système d'équations différentielles qui admette comme système d'intégrales

$$(30) \qquad z_1 = u^{n_1}\varphi_1\left(\frac{v}{u}\right), \quad z_2 = u^{n_2}\varphi_2\left(\frac{v}{u}\right), \quad \ldots, \quad z_q = u^{n_q}\varphi_q\left(\frac{v}{u}\right).$$

Il suffit évidemment de faire dans le système (28) les changements de variable et de fonctions

$$x = \frac{v}{u}, \qquad y_1 = z_1 u^{-n_1}, \qquad y_2 = z_2 u^{-n_2}, \qquad \ldots, \qquad y_q = z_q u^{-n_q},$$

u et v étant deux binomes

$$u = at + a', \qquad v = bt + b',$$

fonctions de la nouvelle variable t. On a tout d'abord, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{D} u^{-2},$$

D étant le résultant $ba' - ab'$ de u et de v,

$$y'_1 = \frac{u^{2-n_1}}{\mathrm{D}}\left(z'_1 - n_1 \frac{u'}{u} z_1\right),$$

$$y''_1 = \frac{u^{4-n_1}}{\mathrm{D}^2}\left[z''_1 - 2(n_1 - 1)\frac{u'}{u} z'_1 + n_1(n_1 - 1)\left(\frac{u'}{u}\right)^2 z_1\right],$$

....,

et d'une manière générale

$$(31) \qquad y_1^{s} = \frac{u^{2s-n_1}}{\mathrm{D}^s}\left[z_1^{(s)} - \left(\frac{u'}{u}\right)\eta_1 z_1^{(s)} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 \eta_1^2 z_1^{(s)} - \ldots\right],$$

en désignant par η_1 l'opérateur

$$n_1 z_1 \frac{d}{dz'_1} + 2(n-1) z'_1 \frac{d}{dz''_1} + 3(n-2) z''_1 \frac{d}{dz'''_1} + \ldots.$$

La formule (31) se démontre sans peine pour $s+1$ si on la suppose vraie pour s, en observant que

$$\eta_1^r z^{(s)} = s(n-s+1)\eta_1^{r-1} z^{(s-1)} = \frac{s(n-s+1)}{(s-r)(n-s+r+1)}(\eta_1^r z^{(s+1)})'.$$

Mais de (31) on déduit immédiatement

$$\left(\eta_1 + u \frac{d}{du'}\right) y_1^{(s)} = 0,$$

et comme y_1 et ses dérivées ne dépendent que de z_1 et de ses dérivées et non de z_2, z_3, ... et leurs dérivées, on peut substituer à $\eta_1 + u\frac{d}{du'}$ l'opérateur plus général

$$(32)\quad \eta = u\frac{d}{du'} + n_1 z_1 \frac{d}{dz'_1} + 2(n_1 - 1)z'_1 \frac{d}{dz''_1} + 3(n_1 - 2)z''_1 \frac{d}{dz'''_1} + \ldots$$
$$+ n_2 z_2 \frac{d}{dz'_2} + 2(n_2 - 1)z'_2 \frac{d}{dz''_2} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ n_q z_q \frac{d}{dz'_q} + \ldots,$$

lequel annule par définition toute halphénienne en u, z_1, z_2, ..., z_q, aux indices 1, n_1, n_2, ..., n_q, et écrire

$$\eta y_r^{(s)} = 0,$$

quels que soient r et s.

Toutes les fonctions y_1, y_2, ..., y_q, ainsi que toutes leurs dérivées de tous ordres y'_1, y''_1, ...; y'_2, y''_2, ..., sont donc devenues des halphéniennes en u, z_1, z_2, ..., z_q aux indices 1, n_1, n_2, ..., n_q, par suite du changement de variable indiqué; ce qui était d'ailleurs facile à prévoir, car chacune des fonctions y_r devenant une halphénienne d'ordre zéro, sa dérivée y'_r est aussi une halphénienne; comme elle est aussi d'ordre zéro, la dérivée seconde y''_r est encore une halphénienne, et ainsi de suite.

Soient maintenant F_1, F_2, ..., F_q ce que deviennent f_1, f_2, ..., f_q, quand on y a remplacé les y et leurs dérivées par leurs expressions (31) en fonction des z et de leurs dérivées. On a évidemment d'une manière générale

$$(33)\qquad \eta F_r = \frac{dF_r}{dy_1}\eta y_1 + \frac{dF_r}{dy'_1}\eta y'_1 + \ldots + \frac{dF_r}{dy_2}\eta y_2 + \ldots = 0,$$

puisque tous les termes du second membre s'annulent séparément. Toutes les fonctions F sont donc des halphéniennes en u, z_1, z_2, ..., z_q. Posons maintenant

$$\psi_r = f_r\left(\frac{z_1}{u^{n_1}}, \frac{z'_1}{D u^{n_1-2}}, \frac{z''_1}{D^2 u^{n_1-4}}, \ldots, \frac{z_2}{u^{n_2}}, \frac{z'_2}{D u^{n_2-2}}, \ldots\right).$$

Il est clair que F_r, ordonnée par rapport aux puissances de $\frac{u'}{u}$, sera nécessairement de la forme

$$(34)\quad F_r = \psi_r - \frac{u'}{u}\eta\psi_r + \frac{1}{1.2}\left(\frac{u'}{u}\right)^2\eta^2\psi_r - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{u'}{u}\right)^3\eta^3\psi_r + \ldots,$$

l'opérateur η pouvant ici être supposé débarrassé de son premier terme, puisque u' n'entre pas dans ψ_r.

Mais nous avons supposé que f_r était une halphénienne en y_1, y_2, ..., y_q aux indices n_1, n_2, ..., n_q, c'est-à-dire s'annulait par l'opérateur

$$n_1 y_1 \frac{d}{dy'_1} + 2(n_1 - 1) y'_1 \frac{d}{dy''_1} + \ldots + n_2 y_2 \frac{d}{dy'_2} + \ldots,$$

qui ne diffère de celui employé ci-dessus (32) que par le changement des lettres z en y et la suppression du premier terme $u \dfrac{d}{du'}$; de même chaque terme de ψ_r ne diffère du terme correspondant de f_r que par le même changement de lettres et par l'introduction en dénominateur du facteur $D^\pi u^g$, g étant l'ordre du terme considéré et π son poids. Tous les termes d'une halphénienne ayant même ordre et même poids, il est permis de faire abstraction du facteur en question, et l'on en conclut que tous les $\eta\psi_r$ étant nuls dans la formule (34), en sorte que F_r se réduit à ψ_r, le système (28) qui admet le système d'intégrales (29 *bis*) admet bien par cela même le système d'intégrales (29).

Si f_r, au lieu d'être une halphénienne en y_1, y_2, ..., y_q, était un agrégat d'halphéniennes de même ordre, mais non de même poids, la substitution des z aux y introduirait le facteur D avec un exposant différent pour chaque élément de l'agrégat, et il faudrait modifier un peu l'énoncé du théorème. Supposons par exemple

$$f_r = A_1 + A_2 + A_3 = 0, \tag{35}$$

A_1, A_2, A_3 étant trois halphéniennes aux mêmes indices en y_1, y_2, ... de même ordre g, mais de poids différents π_1, π_2, π_3, respectivement. La substitution des z aux y donnera

$$\Psi_r = \frac{B_1}{D^{\pi_1}} + \frac{B_2}{D^{\pi_2}} + \frac{B_3}{D^{\pi_3}} = 0, \tag{36}$$

B_1, B_2, B_3 étant ce que deviennent A_1, A_2, A_3 quand on y remplace simplement les lettres y par les lettres z; et la conclusion sera la suivante :

Si le système (28) *admet pour intégrales les expressions* (29 *bis*), *le système d'intégrales* (29) *satisfera au système* (28) *dans lequel on aura simplement remplace toute équation telle que* (35) *où le premier membre est un agrégat d'halphéniennes de poids différents* $\pi_1, \pi_2, \ldots$, *par l'équation* (36) *qui s'en déduit en divisant chaque halphénienne par* D^π (π *étant son poids et* D *le résultant des deux binomes* u, v).

Ou réciproquement :

Si l'on modifie le système (28) *en multipliant chaque halphénienne par* D^π, π *étant son poids, et que* (29 *bis*) *soit un système d'intégrales satisfaisant au système ainsi modifié, le système d'intégrales* (29) *satisfera au système primitif* (28), *pourvu qu'on prenne pour* u *et* v *deux binomes ayant* D *pour résultant.*

Enfin, dans le cas où $f_1, f_2, \ldots$ ne sont pas toutes des halphéniennes aux mêmes indices et de même ordre, ou sont des expressions différentielles quelconques (non halphéniennes), le second membre de (34) ne se réduit plus à ψ_r, mais n'en reste pas moins une expression différentielle admettant le système d'intégrales (29), si f_r admettait le système (29 *bis*).

9. *Application à la formation rapide d'équations différentielles admettant un système donné d'intégrales.* — De là un moyen rapide pour obtenir dans certains cas l'équation différentielle à laquelle satisfait comme intégrale une fonction donnée.

Soit proposé par exemple de former l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfaisait la fonction

$$y = ku^{\frac{3}{2}} \sin \frac{ax + a'}{u}, \tag{37}$$

u désignant un binome donné $bx + b'$ et k, a, a' étant les trois arbitraires à éliminer.

Partons de la fonction $z = k \sin x$, qui satisfait à l'équation

$$z'' + z = 0.$$

Posons donc

$$f = z'' + z;$$

d'où, en posant $ab' - ba' = D$,

$$\psi = \frac{y''}{D^2 u^{-\frac{5}{2}}} + \frac{y}{u^{\frac{3}{2}}} = D^{-2} u^{-\frac{3}{2}} (u^4 y'' + D^2 y);$$

l'opérateur η sera ici

$$\frac{3}{2}y\frac{d}{dy'}+y'\frac{d}{dy''};$$

d'où

$$\eta\psi = \mathrm{D}^{-2}u^{-\frac{3}{2}}u^4y', \qquad \eta^2\psi = \frac{3}{2}\mathrm{D}^{-2}u^{-\frac{3}{2}}u^4y, \qquad \eta^3\psi = 0.$$

L'équation (34) sera donc

$$(38) \qquad u^4y'' - u^3u'y' + \left(\frac{3}{4}u^2u'^2 + \mathrm{D}^2\right)y = 0.$$

Son premier membre est la somme de deux halphéniennes en u et y aux indices 1 et $\frac{3}{2}$, d'ordre commun $\frac{3}{2}$, mais de poids respectifs 2 et 0. Il suffit d'éliminer D entre cette équation et sa dérivée pour obtenir l'équation demandée

$$(39) \quad u^3(yy'''-y'y'') + u^2u'(3yy''+y'^2) - 3uu'^2yy' + \frac{3}{2}u'^3y^2 = 0$$

qui admet l'intégrale (37), et dont le premier membre est une halphénienne d'ordre zéro.

Si enfin, on élimine $\frac{u'}{u}$ entre cette équation et sa dérivée, on obtiendra l'équation différentielle du quatrième ordre à laquelle satisfaisait la fonction (37), où k, a, a' et u sont arbitraires.

10. *Signification géométrique des halphéniennes.* — En raison de la deuxième propriété fondamentale établie ci-dessus au n° 8, on doit s'attendre à rencontrer une équation dont le premier membre soit une halphénienne d'indice 1 en y, toutes les fois qu'on voudra former l'équation différentielle, ne contenant pas la variable x, d'un système de courbes dans la définition desquelles n'entrent ni la droite de l'infini, ni la position et la direction des axes de coordonnées.

Soit en effet

$$(40) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation d'une des courbes appartenant à un tel système; cette équation devra être une intégrale particulière de l'équation différentielle cherchée. Mais on doit obtenir une autre intégrale particulière en supposant les axes de coordonnées modifiés d'une manière quelconque, c'est-à-dire en remplaçant x et y par $y+u$, $y+v$, u et v étant deux binomes arbitraires $ax+a'$, $bx+b'$; l'équation (40) peut alors s'écrire

$$\varphi\left(u, \frac{y}{u}, \frac{v}{u}\right) = 0, \tag{41}$$

et si elle est telle que u n'y apparaisse plus explicitement en dehors des expressions $\frac{y}{u}$, $\frac{v}{u}$, on pourra la supposer résolue par rapport à $\frac{y}{u}$, et écrire

$$y = u\psi\left(\frac{v}{u}\right). \tag{42}$$

On est ainsi ramené à la forme de l'équation (29), avec l'indice 1 pour y.

Mais la disparition de u dans (42) se produira si l'équation (40) est algébrique en x et y, et homogène par rapport à ces variables, ou même seulement par rapport à des fonctions linéaires de ces variables, puisqu'on peut toujours déterminer λ et μ de manière à identifier une expression quelconque telle que $px+p'$ avec $\lambda u+\mu v$, u et v étant deux binomes donnés en x dont le déterminant Δ n'est pas nul. Lorsque la définition du lieu représenté par l'équation (40) est essentiellement métrique, la droite de l'infini introduit une ou plusieurs constantes à la place d'un ou plusieurs des trinomes $my+nx+q$, l'homogénité ne peut donc plus être obtenue de manière à conduire à l'expression (42). Il pourra cependant arriver qu'on soit amené à la forme

$$y = u^m\psi\left(\frac{v}{u}\right), \tag{43}$$

où m est différent de l'unité.

Il est d'ailleurs à remarquer que, lorsque $m=1$, l'existence de la relation (42) entraîne, en différentiant deux fois par rapport à x, celle-ci

$$y'' = \Delta^2 u^{-3}\psi''\left(\frac{v}{u}\right), \tag{44}$$

en sorte que y'' se présente sous la même forme que y, avec l'indice -3 au lieu de 1. Comme une équation différentielle indépendante de la position et de la direction des axes de coordonnées ne peut évidemment contenir explicitement ni x, ni y, ni y', son premier membre sera donc une halphénienne en y'', à l'indice -3; ce qui signifie d'ailleurs, comme on l'a vu ci-dessus au n° 5, que c'est aussi une halphénienne en y à l'indice 1.

On vérifie de même que si y est de la forme (43), avec m entier positif, il en résulte pour la dérivée $(m+1)^{\text{ième}}$ de y la même forme

$$y^{(m+1)} = \Delta^{m+1}\, u^{-(m+2)}\, \psi^{(m+1)}\left(\frac{v}{u}\right),$$

en sorte que l'équation différentielle dont on a chassé y et ses dérivées jusqu'à la $m^{\text{ième}}$, a pour premier membre une halphénienne en $y^{(m+1)}$ à l'indice $-(m+2)$.

Enfin on peut conclure de ce qui précède que les invariants différentiels de Halphen, définis comme se reproduisant sans altération quand on effectue sur les variables une substitution homographique quelconque, et restant *a fortiori* inaltérés par les substitutions qui laissent invariables les halphéniennes d'indice 1 en y, sont nécessairement des halphéniennes en y'' à l'indice -3. Ils satisfont par conséquent à la condition

$$(45) \qquad 1.3y''\frac{d}{dy'''} + 2.4y'''\frac{d}{dy^{\text{IV}}} + 3.5y^{\text{IV}}\frac{d}{dy^{\text{V}}} + \ldots = 0,$$

ou, ce qui revient au même, se déduisent des certains péninvariants (sources de covariants) de la forme binaire

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)\,(x, y)^n,$$

en y remplaçant respectivement

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n$$

par

$$-\frac{y''}{3},\quad \frac{y'''}{3.4},\quad -\frac{y^{\text{IV}}}{3.4.5},\quad \ldots,\quad \pm\frac{y^{(n+2)}}{3.4\ldots(n+2)}.$$

Mais la réciproque, bien entendu, n'est pas exacte; toutes les halphéniennes ainsi obtenues ne sont pas des invariants différentiels.

11. ***Intégration des équations halphéniennes. Application à l'équation différentielle des coniques.*** — Pour intégrer un système d'équations différentielles dont les premiers membres sont des halphéniennes en y, z, ..., aux indices m, n, ..., on peut utiliser l'une ou l'autre des propriétés fondamentales de ces expressions, c'est-à-dire :

1° Remplacer y, z, ..., par des fonctions u, v, ... d'ordres respectifs m, n, ... et choisies de manière à obtenir des halphéniennes plus simples, dont l'intégrale soit connue et facile à calculer par quadratures ;

2° Si l'on peut obtenir un système d'intégrales particulières

$$y = f(x), \qquad z = \varphi(x), \qquad \ldots,$$

en déduire des intégrales à un plus grand nombre de constantes arbitraires par les formules

$$y = u^m f\left(\frac{v}{u}\right), \qquad z = u^n \varphi\left(\frac{v}{u}\right), \qquad \ldots,$$

où u, v sont des binomes arbitraires.

Voici une première application très simple de ces deux procédés à l'équation différentielle des coniques

$$9y''^2 y^{\mathrm{v}} - 45 y'' y''' y^{\mathrm{iv}} + 40 y'''^3 = 0$$

dont le premier membre est, comme on l'a vu plus haut, une halphénienne en y'' à l'indice -3. Posons en premier lieu

$$y'' = z^{-3}.$$

Le premier membre devra se transformer en une halphénienne en z à l'indice 1 et d'étendue 3. En effet, le résultat de la substitution est

$$-27 z^{-11}(z z''' + 3 z' z'') = 0,$$

ce qui donne par trois quadratures successives

$$z = \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

a, b, c étant les trois constantes d'intégration ; d'où

$$y'' = (ax^2 + bx + c)^{-\frac{3}{2}}.$$

En second lieu, posons

$$y'' = x^\lambda$$

et déterminons λ de manière que x^λ soit une intégrale particulière. On trouve pour l'équation en λ

$$2\lambda(2\lambda^2+9\lambda+9)=0$$

dont les racines sont -3, $-\frac{3}{2}$. De la seconde on tire

$$y''=u^{-3}\left(\frac{v}{u}\right)^{-\frac{3}{2}}=(uv)^{-\frac{3}{2}},$$

u et v étant deux binomes arbitraires; c'est le même résultat que ci-dessus. On obtiendrait ensuite y par une double quadrature. Mais on peut obtenir directement y en utilisant la deuxième propriété des halphéniennes et remarquant, que si l'on pose

$$y=a+bx+x^\mu,$$

a et b ne figureront pas dans l'équation différentielle transformée; en sorte qu'on pourra déterminer μ de manière à y satisfaire. L'équation en μ sera alors

$$2\mu^2+\mu-1=0,$$

dont les racines sont $\frac{1}{2}$, -1. La première de ces racines fournit immédiatement l'intégrale

$$y=u\left[a+b\frac{v}{u}+\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

c'est-à-dire

$$y=au+bv+(uv)^{\frac{1}{2}},$$

qui est bien l'intégrale générale à cinq constantes arbitraires. La seconde racine conduirait à

$$y=au+bv+\frac{u^2}{v},$$

expression qui n'est qu'un cas particulier de la précédente.

12. *Application à une équation différentielle linéaire intégrée par Halphen en* 1881. — L'équation linéaire traitée par Halphen en 1881 (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 779) est la

suivante :

$$(46)\quad \mathrm{BQ}^h\mathrm{P}^{n-h}\frac{d^n(\mathrm{P}^h\mathrm{Q}^{n-h}y)}{dx^n}+\mathrm{CQ}^k\mathrm{P}^{p-k}\frac{d^p(\mathrm{P}^k\mathrm{Q}^{p-k}y)}{dx^p}+\ldots=0,$$

dans laquelle P et Q désignent deux binomes donnés $ax+b$, $a'x+b'$, B, C, ..., n, p, ..., h, k, ... sont des constantes données.

Considérons pour un moment P et Q comme des fonctions inconnues, d'ordre 1 en x; il est aisé de voir qu'il suffira de considérer y comme d'ordre -1, pour que chaque terme du premier membre de (45) devienne une halphénienne singulière en P, Q, y, aux indices $1, 1, -1$. Ces halphéniennes auront pour étendues respectivement n, p, ...; pour degrés n, p, ... en P et Q, 1 en y; pour poids n, p, ... respectivement, et par conséquent pour ordre commun -1. Le premier membre de (46) est donc une somme d'halphéniennes toutes de même ordre, mais de poids différents.

Adjoignons maintenant à (46) les deux équations

$$(47)\qquad \mathrm{P}''=0,\qquad \mathrm{Q}''=0;$$

(46) et (47) forment un système de trois équations différentielles simultanées, dont les premiers membres sont des halphéniennes en P, Q, y, avec les mêmes indices et auxquelles s'applique le théorème du n° 8. Si donc nous pouvons déterminer un système d'intégrales particulières du système composé de (47) et de l'équation (46) ainsi modifié

$$(48)\quad \mathrm{BD}^n\mathrm{Q}^h\mathrm{P}^{n-h}\frac{d^n(\mathrm{P}^h\mathrm{Q}^{n-h}y)}{dx^n}+\mathrm{CD}^p\mathrm{Q}^k\mathrm{P}^{p-k}\frac{d^p(\mathrm{P}^k\mathrm{Q}^{p-k}y)}{dx^p}+\ldots=0,$$

nous obtiendrons par la formule (29) une intégrale plus générale, où figureront les deux binomes arbitraires u et v, assujettis seulement à avoir D pour résultant.

Mais si l'on pose $\mathrm{P}=x$, $\mathrm{Q}=1$, $y=x^\alpha$, on satisfait évidemment aux deux équations (47); la substitution de ces valeurs dans (48) donne

$$(49)\quad \begin{aligned}\mathrm{Q}= {} & \mathrm{BD}^n(h+\alpha)(h+\alpha-1)\ldots(h+\alpha-n+1)\\ & +\mathrm{CD}^p(k+\alpha)(k+\alpha-1)\ldots(k+\alpha-p+1)\ldots.\end{aligned}$$

Si n est le plus grand des nombres n, p, ..., l'équation (49) possède n racines, α_1, α_2, ..., α_n, dont chacune fournit une intégrale particulière x^α; puisqu'il s'agit d'une équation linéaire en y, l'expression

$$C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + \ldots + C_n x^{\alpha_n}$$

satisfera encore à (48), en même temps que $P = x$, $Q = 1$. On pourra donc écrire que le système des trois équations (47) et (48) admet le système d'intégrales particulières

$$(50) \qquad P = x, \qquad Q = 1, \qquad y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + \ldots + C_n x^{\alpha_n},$$

où C_1, C_2, ..., C_n sont des constantes arbitraires d'intégration.

Donc le système des trois équations (46) et (47) admettra le système d'intégrales plus général

$$P = u\left(\frac{v}{u}\right) = v,$$
$$Q = u,$$
$$v = u^{-1}\left[C_1\left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha_1} + C_2\left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha_2} + \ldots + C_n\left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha_n}\right],$$

u et v étant deux binomes arbitraires de déterminant D.

Mais P et Q sont connus; u et v sont donc ainsi fixés, et l'expression de y devient

$$(51) \qquad y = \frac{1}{Q}\left[C_1\left(\frac{P}{Q}\right)^{\alpha_1} + C_2\left(\frac{P}{Q}\right)^{\alpha_2} + \ldots + C_n\left(\frac{P}{Q}\right)^{\alpha_n}\right];$$

c'est le résultat auquel Halphen est arrivé par des considérations très différentes.

La même analyse s'appliquerait si, dans l'équation donnée (46), les ordres de dérivation n, p, ... étaient remplacés par $n + s$, $p + s$, ..., s étant le même dans tous les termes; l'intégrale serait encore donnée par la formule (51), en y remplaçant $\frac{1}{Q}$ par Q^{s-1}. On pourrait sans doute imaginer d'autre cas d'extension de la même formule.