G. FONTENÉ

Système attaché à la coïncidence principale d'un connexe

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 164-183

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__164_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SYSTÈME DIFFÉRENTIEL ATTACHÉ A LA COINCIDENCE PRINCIPALE D'UN CONNEXE;

PAR M. G. FONTENÉ.

I. — CARACTÉRISTIQUES ET DÉVELOPPABLES CARACTÉRISTIQUES.

1. Soient, en coordonnées tétraédriques, x, y, z, t les coordonnées d'un point M, et u, v, w, r les coordonnées d'un plan m. Une équation de la forme

$$F(x, y, z, t, u, v, w, r) = 0, \tag{1}$$

homogène en x, y, z, t d'une part, en u, v, w, r d'autre part, représente ce qu'on appelle un *connexe;* en particulier l'équation

$$ux + vy + wz + rt = 0, \tag{2}$$

qui exprime que le point M est dans le plan m, ou, comme nous dirons, que le point et le plan sont *associés*, est dite représenter le *connexe identique*. L'ensemble de deux équations telles que (1) représente ce qu'on appelle une *coïncidence*; en particulier, l'ensemble des équations (1) et (2) est dit représenter la *coïncidence principale* du connexe (1); nous appellerons *élément* d'une telle coïncidence un ensemble de valeurs des quantités x, y, z, t, u, v, w, r satisfaisant aux équations (1) et (2), ou encore l'ensemble d'un point et d'un plan associés appartenant au connexe (1).

2. Nous appellerons *surface intégrale* de la coïncidence principale du connexe toute surface pour laquelle le point courant et le plan tangent en ce point appartiennent au connexe; si l'équation ponctuelle d'une telle surface est

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

on a pour les coordonnées du plan tangent en un point M

$$u = kf'_x, \qquad v = kf'_y, \qquad w = kf'_z, \qquad r = kf'_t;$$

l'équation tangentielle étant

$$\varphi(u, v, w, r) = 0,$$

on a de même pour les coordonnées du point de contact d'un plan tangent m

$$x = k\varphi'_u, \qquad y = k\varphi'_v, \qquad z = k\varphi'_w, \qquad t = k\varphi'_r.$$

Ces valeurs de $u, v, \ldots$, de $x, y, \ldots$ donnent en effet les relations

$$(3) \qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz + r\,dt = 0,$$

$$(4) \qquad x\,du + y\,dv + z\,dw + t\,dr = 0,$$

équivalentes en vertu de la relation (2).

3. Avant d'aller plus loin, nous ferons la remarque suivante : Prenons, comme on le peut,

$$t = -1, \qquad w = -1,$$

ce qui n'oblige d'ailleurs pas à l'emploi de coordonnées cartésiennes; au point de vue de la notation, on remarquera qu'on fait jouer des rôles analogues aux deux éléments associés d et C de la figure de référence, de même aux deux éléments associés D et c. En ce qui concerne la recherche des surfaces intégrales, si l'on prend comme variables x et y, comme fonction z, on écrira

$$u = -\frac{f'_x}{f'_z}, \qquad v = -\frac{f'_y}{f'_z}, \qquad w = -1, \qquad r = \ldots,$$

c'est-à-dire que u et v seront les dérivées partielles de z : nous les désignerons, comme d'ordinaire, par p et q; la relation (3) donne d'ailleurs

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

La quantité r est définie le plus simplement par la relation (2), qui donne

$$(5) \qquad px + qy = z + r;$$

l'équation du plan tangent en un point est $pX + qY - Z = r$. On a ainsi, en conservant le symbole F, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(6) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q, r) = 0, \\ p = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \dfrac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = px + qy - z; \end{cases}$$

c'est une relation entre les coordonnées x, y, z d'un point M d'une surface intégrale et les coordonnées p et q du plan m tangent en ce point.

Si l'on prend comme variables p et q (transformation de Legendre), comme fonction la quantité r définie par la relation (5), la différentiation de cette relation donne

$$dr = x\,dp + y\,dq,$$

ce qui est d'ailleurs la relation (4), et l'on a l'équation aux dérivées partielles

$$(7) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q, r) = 0, \\ x = \dfrac{\partial r}{\partial p}, \qquad y = \dfrac{\partial r}{\partial q}, \qquad z = px + qy - r; \end{cases}$$

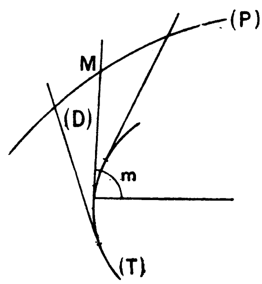
c'est une relation entre les coordonnées p, q, r d'un plan m tangent à une surface intégrale et les coordonnées x et y du point de contact M.

Je rappelle que les hypothèses $t = -1$, $w = -1$, sont relatives au plan d et au point C, non opposés.

4. Le système (1, 2), quand on en considère les surfaces intégrales, est comparable à une équation aux dérivées partielles. Il existe donc des *suites d'éléments* fonctions d'une variable s, suites déterminées par un seul élément, et telles qu'une intégrale contient tous les éléments de la suite dès qu'elle en contient un.

Géométriquement, une telle suite comprend (*fig.* 1) une *caractéristique* ponctuelle (P), lieu des points M qui appartiennent aux éléments de la suite, et une *caractéristique tangentielle* (T), courbe admettant comme plans osculateurs les plans m qui appartiennent aux éléments de la suite; au lieu de parler de cette courbe (T), il est d'usage de parler de la développable caractéristique (D) qui est l'enveloppe des plans m, développable dont les

Fig. 1.



génératrices sont les tangentes à la courbe (T) : cette représentation fait mieux image, et elle est d'ailleurs la seule possible lorsque les développables caractéristiques sont des cônes [1]. Une surface intégrale qui passe par un point d'une courbe (P), et qui est tangente en ce point à une développable caractéristique correspondante (D), contient la courbe (P) tout entière et est inscrite à la développable (D) le long de la courbe (P). La question de savoir si la courbe (P) détermine la développable (D) et inversement sera traitée plus loin.

5. Cela posé, cherchons à obtenir le système différentiel qui détermine les suites d'éléments (M, m), les ensembles formés d'une courbe caractéristique (P) et d'une développable caractéristique (D) avec correspondance des points de la courbe et des plans tangents à la développable.

---

[1] Les points de la développable (D) ont pour analogues les plans tangents à la courbe (P), les génératrices de (D) ont pour analogues les tangentes à la courbe (P), les plans tangents de (D) ont pour analogues les points de la courbe (P).

Si l'on se donne un point M, l'équation

$$(S_1) \qquad F(x, y, z, t, U, V, W, R) = 0,$$

dans laquelle x, y, z, t sont les coordonnées du point fixe M, tandis que U, V, W, R sont les coordonnées courantes d'un plan variable, est l'équation tangentielle d'une surface ; si l'on y adjoint l'équation

$$xU + yV + \ldots = 0,$$

on a le cône de sommet M circonscrit à la surface. De même, si l'on se donne un plan m de coordonnées u, v, w, r, l'équation

$$(S_2) \qquad F(X, Y, Z, T, u, v, w, r) = 0$$

représente une surface ; si l'on y adjoint l'équation

$$uX + vY + \ldots = 0,$$

on a la section de cette surface par le plan m.

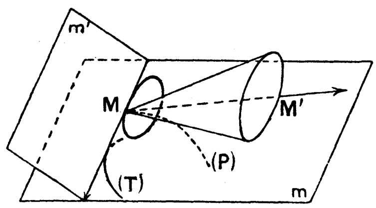
Si l'on se donne un point M et un plan m dont les coordonnées vérifient les relations

$$(1) \qquad F(x, y, z, t, u, v, w, r) = 0,$$

$$(2) \qquad ux + vy + \ldots = 0,$$

la surface S_1 qui correspond au point M admet le plan m comme plan tangent, et les coordonnées du point de contact M' sont F'_u, F'_v, ... ; la droite MM' (*fig.* 2) est la génératrice de contact

Fig. 2.



avec le plan m du cône de sommet M qui (par ses plans tangents associés au point M) fait partie du connexe. La surface S_2 qui correspond au plan m passe au point M, et les coordonnées du plan m' tangent en ce point sont F'_x, F'_y, ... ; la droite (m, m') est la tangente en M à la courbe plane, située dans le plan m, qui (par ses points associés au plan m) fait partie du connexe. *Ainsi se trouvent définies, pour chaque élément* (M, m) *appartenant à la coïncidence principale du connexe, deux droites remarquables* MM' *et* (m, m').

Cela posé, si l'on se donne un tel élément (M, m), il existe une caractéristique et une développable associées telles que la caractéristique passe en M et que la développable ait comme plan tangent en M le plan m. Et l'on a ce théorème, dont l'exactitude apparaîtra plus loin comme conséquence de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais que je suppose ici établi géométriquement :

Théorème. — *La tangente en* M *à la caractéristique* (P) *est la droite* MM' *génératrice de contact avec le plan m du cône de sommet* M *qui (par ses plans tangents associés au point* M) *fait partie du connexe. Corrélativement, la génératrice de la développable* (D) *issue du point* M, *ou la tangente à la caractéristique tangentielle* (T) *pour le plan osculateur* m, *est la tangente en* M *à la courbe plane, située dans le plan* m, *qui (par ses points associés au plan* m) *fait partie du connexe.*

On en conclut, pour l'ensemble d'une caractéristique et de la développable correspondante, le système différentiel

$$(A_1) \qquad \begin{Vmatrix} dx & dy & dz & dt \\ x & y & z & t \\ F'_u & F'_v & F'_w & F'_r \end{Vmatrix} = 0,$$

$$(A_2) \qquad \begin{Vmatrix} du & dv & dw & dr \\ u & v & w & r \\ F'_x & F'_y & F'_z & F'_r \end{Vmatrix} = 0,$$

par lequel on exprime que chacun des deux groupes de trois équations

$$\begin{aligned} &U\,dx + V\,dy + \ldots = 0, &\qquad &X\,du + Y\,dv + \ldots = 0, \\ &Ux \;\; + Vy \;\; + \ldots = 0, & &Xu \;\; + Yv \;\; + \ldots = 0, \\ &UF'_u + VF'_v + \ldots = 0, & &XF'_x + YF'_y + \ldots = 0, \end{aligned}$$

se réduit à deux équations distinctes, ou encore que tout plan passant par MM' contient la tangente en M à la caractéristique,

que tout point situé sur la droite (m, m') est sur la génératrice de la développable issue du point M.

6. Les six rapports $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, $\frac{r}{w}$, relatifs aux éléments (M, m) des ensembles (P, D), sont liés par quatre relations (A_1), (A_2), et il en faut une cinquième (A_3).

Or, les quatre relations (A_1) et (A_2) équivalent aux six relations

$$\left\| \begin{matrix} dx & dy & \ldots & du & dv & \ldots \\ x & y & \ldots & \lambda u & \lambda v & \ldots \\ F'_u & F'_v & \ldots & -\mu F'_x & -\mu F'_y & \ldots \end{matrix} \right\| = 0,$$

avec deux indéterminées λ et μ. Si l'on multiplie les éléments de la première colonne par $F'_x, \ldots$, les éléments de la cinquième colonne par $F'_u, \ldots$, les éléments de la première ligne ont une somme nulle

$$F'_x\,dx + \ldots + F'_u\,du + \ldots = 0;$$

les éléments de la seconde ligne ont également une somme nulle

$$(xF'_x + \ldots) + \lambda(uF'_u + \ldots) = 0;$$

les éléments de la troisième ligne doivent donc avoir aussi une somme nulle, ce qui donne $\mu = 1$. On a donc le système de six relations :

$$\left\| \begin{matrix} dx & dy & dz & dt & du & dv & dw & dr \\ x & y & z & t & \lambda u & \lambda v & \lambda w & \lambda r \\ F'_u & F'_v & F'_w & F'_r & -F'_x & -F'_y & -F'_z & -F'_t \end{matrix} \right\| = 0,$$

entre lesquelles on doit éliminer λ.

Finalement, en faisant jouer dans l'écriture un rôle spécial aux variables t et w, on a les cinq relations

$$\frac{\frac{dx}{x} - \frac{dt}{t}}{\frac{F'_u}{x} - \frac{F'_r}{t}} = \ldots = \frac{\frac{du}{u} - \frac{dw}{w}}{-\left(\frac{F'_x}{u} - \frac{F'_z}{w}\right)} = \ldots,$$

ou encore

$$\text{(A)} \qquad \frac{t\,dx - x\,dt}{tF'_u - xF'_r} = \frac{t\,dy - y\,dt}{tF'_v - yF'_r} = \frac{t\,dz - z\,dt}{tF'_w - zF'_r}$$

$$= \frac{w\,du - u\,dw}{-(wF'_x - uF'_z)} = \frac{w\,dv - v\,dw}{-(wF'_y - vF'_z)} = \frac{w\,dr - r\,dw}{-(wF'_t - rF'_z)};$$

au point de vue des constantes, il faut d'ailleurs tenir compte des relations

$$(a) \qquad F = 0, \qquad ux + vy + \ldots = 0.$$

Observons encore que l'on peut écrire, avec deux indéterminées h et k, les sept relations

$$\frac{dx}{F'_u + hx} = \frac{dy}{F'_v + hy} = \frac{dz}{F'_w + hz} = \frac{dt}{F'_r + ht}$$
$$= \frac{du}{-(F'_x + ku)} = \frac{dv}{-(F'_y + kv)} = \frac{dw}{-(F'_z + kw)} = \frac{dr}{-(F'_t + kr)}.$$

7. Si l'on fait $t = -1$, $w = -1$, ce qui donne l'équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q, r) = 0, \qquad px + qy = z + r,$$

on a le système différentiel

$$(B) \qquad \frac{dx}{F'_p + xF'_r} = \frac{dy}{F'_q + yF'_r} = \frac{dz}{F'_w + zF'_r}$$
$$= \frac{dp}{-(F'_x + pF'_z)} = \frac{dq}{-(F'_y + qF'_z)} = \frac{dr}{-(F'_t + rF'_z)} = S\,ds,$$

S représentant une fraction de la variable auxiliaire s; au point de vue des constantes, il faut d'ailleurs tenir compte des relations

$$(b) \qquad F = 0, \qquad px + qy = z + r.$$

En ce qui concerne les notations F'_w, F'_t, on rend la relation $F = 0$ doublement homogène en remplaçant

$$x, \; y, \; z \quad \text{par} \quad -\frac{x}{t}, \; -\frac{y}{t}, \; -\frac{z}{t},$$
$$u, \; v, \; r \quad \text{par} \quad -\frac{u}{w}, \; -\frac{v}{w}, \; -\frac{r}{w},$$

sauf à faire ensuite $t = -1$, $w = -1$.

On peut encore écrire, en tenant compte de la relation $F = 0$ pour transformer le système différentiel,

$$(C) \qquad \frac{dx}{F'_p + xF'_r} = \frac{dy}{F'_q + yF'_r} = \frac{dz}{(pF'_p + qF'_q + rF'_r) + zF'_r}$$
$$= \frac{dp}{-(F'_x + pF'_z)} = \frac{dq}{-(F'_y + qF'_z)} = \frac{dr}{-(xF'_x + yF'_y + zF'_z) - rF'_z} = S\,ds,$$

avec

$$(c) \qquad F = 0, \qquad px + qy = z + r,$$

au point de vue des constantes.

8. Si l'on remplace r par $px + qy - z$, de manière à écrire

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

le système (C) donne le système classique

$$(\mathrm{D}) \quad \frac{dx}{f'_p} = \frac{dy}{f'_q} = \frac{dz}{pf'_p + qf'_q} = \frac{dp}{-(f'_x + pf'_z)} = \frac{dq}{-(f'_y + qf'_z)} = \mathrm{S}\, ds,$$

les cinq variables x, y, z, p, q étant ainsi liées par quatre relations; au point de vue des constantes, il faut d'ailleurs tenir compte de l'équation

$$(d) \qquad f = 0.$$

Corrélativement, si l'on remplace z par $px + qy - r$, de manière à écrire

$$\varphi(p, q, r, x, y) = 0,$$

le système (C) donne

$$(\mathrm{E}) \quad \frac{dp}{-\varphi'_x} = \frac{dq}{-\varphi'_y} = \frac{dr}{-(x\varphi'_x + y\varphi'_y)} = \frac{dx}{\varphi'_p + x\varphi'_r} = \frac{dy}{\varphi'_q + y\varphi'_r} = \mathrm{S}\, ds,$$

avec

$$(e) \qquad \varphi = 0$$

au point de vue des constantes.

9. Une même équation aux dérivées partielles étant écrite sous les deux formes

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \varphi(p, q, r, x, y) = 0,$$

où les deux premiers membres sont supposés identiques eu égard à la relation

$$px + qy = z + r,$$

le système différentiel qui détermine les caractéristiques et les développables caractéristiques peut s'écrire

$$(\mathrm{F})\quad \frac{dx}{f'_p} = \frac{dy}{f'_q} = \frac{dz}{pf'_p + qf'_q} = \frac{dp}{-\varphi'_x} = \frac{dq}{-\varphi'_y} = \frac{dr}{-(x\varphi'_x + y\varphi'_y)} = \mathrm{S}\, ds,$$

avec

$$(f)\qquad f = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = 0, \qquad px + qy = z + r,$$

au point de vue des constantes.

La possibilité d'employer simultanément les fonctions f et φ est liée au fait suivant. Dans le système (A), les trois premiers dénominateurs peuvent être calculés en regardant r comme une fonction des autres variables définie par la relation $ux + \ldots = 0$: pour le premier, par exemple, le premier terme devient $t\left(\mathrm{F}'_u - \frac{x}{t}\mathrm{F}'_r\right)$ et le second terme disparaît; les trois derniers dénominateurs peuvent de même être calculés en regardant z comme une fonction des autres variables, définie par la même relation.

10. Dans le cas d'une équation linéaire

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q - \mathrm{R} = 0,$$

on a le système

$$(\mathrm{B}')\qquad \frac{dx}{\mathrm{P}} = \frac{dy}{\mathrm{Q}} = \frac{dz}{\mathrm{R}} = \ldots = \ldots = \mathrm{S}\, ds,$$

$$(b')\qquad \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q - \mathrm{R} = 0.$$

Si la transformation de Legendre fournit une équation aux dérivées partielles qui soit linéaire, soit

$$\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y - \mathrm{Z} = 0,$$

X, Y, Z étant des fonctions de p, q, r, on aura de même

$$(\mathrm{B}'')\qquad \frac{dp}{-\mathrm{X}} = \frac{dq}{-\mathrm{Y}} = \frac{dr}{-\mathrm{Z}} = \ldots = \ldots = \mathrm{S}\, ds,$$

$$(b'')\qquad \mathrm{X}x + \mathrm{Y}y - \mathrm{R} = 0.$$

Considérons l'équation

$$p(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + q(a_2x + \ldots) + (a_3x + \ldots) + r(a_4x + \ldots) = 0,$$

ou

$$x(a_1p + a_2q + a_3 + a_4r) + y(b_1p + \ldots) + z(c_1p + \ldots) + (d_1p + \ldots) = 0,$$

qui peut prendre les deux formes

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q - \mathrm{R} = 0, \qquad \mathrm{X}x + \mathrm{Y}y - \mathrm{Z} = 0;$$

les deux premiers membres étant supposés identiques quand on a égard à la relation $px + qy = z + r$, on a le système différentiel

$$(\mathrm{B}''') \qquad \frac{dx}{\mathrm{P}} = \frac{dy}{\mathrm{Q}} = \frac{dz}{\mathrm{R}} = \frac{dp}{-\mathrm{X}} = \frac{dq}{-\mathrm{Y}} = \frac{dr}{-\mathrm{Z}} = \mathrm{S}\,ds,$$

avec

$$(b''') \quad \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q - \mathrm{R} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{X}x + \ldots = 0, \qquad px + qy = z + r,$$

au point de vue des constantes. (On remarquera que P, Q, R contiennent des termes du second degré en x, y, z, etc.)

11. Le système (F), *que sa forme concise rend mnémonique*, permet de retrouver les autres systèmes. Pour le système classique (D), on calcule φ'_x en considérant $f(x, y, z, p, q)$ comme une fonction composée dans laquelle z représente $px + qy - r$, puisque la fonction φ contient seulement p, q, r, x, y; on a de même le système (E).

On passe aisément du système (F) au système (C); si l'on part du système (D), le dénominateur de dp est, au signe près,

$$(\mathrm{F}'_x + p\mathrm{F}'_r) + p(\mathrm{F}'_z - \mathrm{F}'_r) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{F}'_x + p\mathrm{F}'_z.$$

On peut enfin remplacer le système (C) par le système (B), qui conduit au système (A). L'interprétation géométrique des relations (A_1) et (A_2) donne le théorème du n° 5, qui se présente ainsi comme une conséquence des relations classiques (D); c'est d'ailleurs par cette voie que je suis arrivé à ce théorème.

12. L'ensemble d'une courbe caractéristique et d'une développable caractéristique qui lui est associée dépend toujours de trois paramètres; le système (A), par exemple, en donnerait cinq, mais les relations (a) les réduisent à trois. Il y a toutefois plusieurs cas à distinguer :

1° En général, les courbes caractéristiques dépendent de trois paramètres, et il en est de même des développables caractéristiques, courbes et développables se correspondant une à une.

2° (a) Si l'équation aux dérivées partielles est linéaire, les courbes caractéristiques dépendent seulement de deux paramètres, et à chacune correspondent des développables caractéristiques en nombre simplement infini : ces développables sont généralement en nombre triplement infini. On le voit en considérant le système (B'), dont les deux premières égalités déterminent les caractéristiques indépendamment des développables caractéristiques.

2° (b). Si, en appliquant la transformation de Legendre, on tombe sur une équation aux dérivées partielles qui soit linéaire, les développables caractéristiques de l'équation primitive dépendent seulement de deux paramètres, et à chacune correspondent des courbes caractéristiques en nombre simplement infini : ces courbes sont généralement en nombre triplement infini. On le voit en considérant le système (B'').

3° Si l'équation donnée est linéaire, et si la transformation de Legendre conduit encore à une équation linéaire, les courbes caractéristiques dépendent seulement de deux paramètres, et il en est de même des développables caractéristiques, chaque courbe caractéristique correspondant à une infinité de développables, et inversement. On le voit en considérant le système (B''') qui détermine séparément les caractéristiques, les développables caractéristiques, et enfin les associe. L'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution qui ont pour axe une droite donnée est dans ce cas.

L'ensemble d'une caractéristique (P) et d'une développable associée (D) dépendant de trois paramètres, les éléments (M, m) qui contribuent à former de tels ensembles dépendent de quatre paramètres; par suite, à tout élément (M, m) satisfaisant aux relations (1) et (2) correspond un ensemble (P), (D), comme on l'a dit à propos du théorème du n° 5.

13. Un point M étant donné, il passe en général par ce point une simple infinité de caractéristiques dont les tangentes en M sont les génératrices du cône de sommet M qui (par ses plans tangents) fait partie du connexe; à chacune de ces caractéristiques correspond une développable dont le plan tangent le long de la génératrice qui passe en M est le plan tangent au cône le long de la génératrice à laquelle la caractéristique est tangente. Corrélativement, un plan m étant donné, il existe en général une simple infinité de développables (D) tangentes à ce plan, et les génératrices de contact sont les tangentes à la courbe plane, située dans le plan m, qui fait partie du connexe ; à chacune de ces développables correspond une caractéristique passant par le point de contact de la tangente à la courbe plane.

Si l'équation du connexe est linéaire en u, v, w, r, soit

$$u f_1(x, y, z, t) + v f_2(x, y, z, t) + \ldots + \ldots = 0,$$

s'il s'agit en particulier d'une équation aux dérivées partielles qui soit linéaire, quand on se donne x, y, z, t, l'équation du connexe représente un point M′ de coordonnées f_1, f_2, ..., et le cône MM′ se réduit à la droite MM′. Il passe alors par ce point une seule caractéristique, tangente d'ailleurs à la droite MM′ ; à cette caractéristique correspondent des développables (D) en nombre simplement infini, et pour chacune desquelles le plan tangent le long de la génératrice qui passe en M est un plan passant par MM′, variable de l'une à l'autre.

On a des faits corrélatifs que je me contente de mentionner.

Si l'équation du connexe est de la forme

$$u(a_1 x + b_1 y + \ldots) + v(a_2 x + \ldots) + w(a_3 x + \ldots) + r(a_4 x + \ldots) = 0,$$

de sorte qu'on peut encore écrire

$$x(a_1 u + a_2 v + \ldots) + y(b_1 u + \ldots) + z(c_1 u + \ldots) + t(d_1 u + \ldots) = 0,$$

l'exemple des surfaces de révolution qui ont pour axe une droite donnée montre assez comment les choses se passent.

II. — Groupement des caractéristiques et des développables.

14. Toute surface intégrale est lieu de caractéristiques, enveloppe de développables caractéristiques dépendant d'un paramètre. Une caractéristique et une développable associées sont déterminées par un de leurs éléments, soit

$$\bar{x},\quad \bar{y},\quad \bar{z},\quad \bar{t},\qquad \bar{u},\quad \bar{v},\quad \bar{w},\quad \bar{r},$$

et il s'agit de déterminer l'élément initial $(\overline{M}, \overline{m})$ en fonction d'un paramètre α.

Donnons-nous une courbe $\overline{C}$ par laquelle doit passer la surface intégrale, et prenons comme points $\overline{M}$ les points de cette courbe. Les caractéristiques doivent être telles que la surface engendrée par elles soit inscrite aux développables correspondantes, et il suffit pour cela que cette surface soit tangente en $\overline{M}$ au plan $\overline{m}$ qu'on associe au point $\overline{M}$; comme le plan tangent en $\overline{M}$ à la surface contiendra la tangente en $\overline{M}$ à la courbe $\overline{C}$, le plan $\overline{m}$ doit contenir cette tangente : c'est un plan tangent au cône de sommet $\overline{M}$ dont on a parlé précédemment et passant par la tangente à la courbe $\overline{C}$.

Si l'on désigne par $\overline{x}(\alpha)$, ou simplement par $\overline{x}$, la fonction du paramètre α qui exprime la coordonnée $\overline{x}$, ..., les fonctions relatives aux éléments de départ des ensembles (P), (D) doivent donc vérifier les relations

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} F(\overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{u}, \overline{v}, \ldots) = 0, \\ \overline{u}\overline{x} + \overline{v}\overline{y} + \ldots = 0, \\ \overline{u}\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{y}}{\partial \alpha} + \ldots = 0, \end{cases}$$

d'où résulte d'ailleurs la relation

$$\overline{x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \alpha} + \overline{y}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \alpha} + \ldots = 0.$$

Lorsqu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles avec $t = -1$, $w = -1$, u et v étant remplacés par p et q, r étant remplacé par $px + qy - z$, on retrouve les relations connues

$$(\beta)\qquad \begin{cases} f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q}) = 0, \\ \overline{p}\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha} + \overline{q}\dfrac{\partial \overline{y}}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \alpha} = 0; \end{cases}$$

inversement, ces relations peuvent conduire aux relations (α).

On peut suivre une marche corrélative, en se donnant une développable $\overline{\Gamma}$ à laquelle la surface intégrale doit être inscrite;

cela conduit à la relation

$$x\frac{\partial\bar{u}}{\partial\alpha}+\ldots=0.$$

Si la relation donnée est linéaire en u, v, w, r, la courbe $\overline{C}$ détermine les caractéristiques sans qu'on ait à s'occuper des développables. On a un fait corrélatif.

III. — Intégrale complète.

Ce qui suit ne se rapporte pas spécialement à l'objet de ce Mémoire; on y trouvera quelques remarques qui m'ont paru intéressantes sur la question de l'intégrale complète. Je ne pouvais, d'ailleurs, présenter ces remarques sans faire un exposé rapide de la théorie.

15. Si, en intégrant le système différentiel (A), on obtient trois intégrales premières d'où l'on puisse tirer $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, $\frac{r}{w}$ en fonction de $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, ou deux intégrales premières qui, avec la relation (2), conduisent au même résultat, ou enfin une seule intégrale première qui, avec les relations (1) et (2), ait le même effet, l'équation

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz+r\,dt=0,$$

dans laquelle on remplace u, v, w, r par leurs expressions en x, y, z, t, est *complètement intégrable*, et l'on obtient l'une des équations des caractéristiques sous la forme

$$V(x,y,z,t,a,b)=0,$$

avec deux paramètres; si l'on a employé trois intégrales premières, ce qui donnerait quatre constantes d'intégration, on doit, en effet, tenir compte des relations (1) et (2), qui laissent seulement deux constantes. Corrélativement, ...

Avec le système classique (D), on cherche à obtenir deux intégrales premières d'où l'on puisse tirer p et q en fonction de x, y, z, ou une seule intégrale première qui, avec la relation $f=0$, conduise au même résultat, et l'on intègre l'équation

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0.$$

La surface $V = 0$ contient une infinité de caractéristiques; on démontre que c'est une surface intégrale. Elle dépend, non d'une fonction arbitraire, mais de deux paramètres, c'est-à-dire d'autant de paramètres qu'il y a de variables indépendantes dans le problème (intégrale complète).

L'intégrale générale s'obtient, au point de vue géométrique, en cherchant l'enveloppe de la surface intégrale particulière $V = 0$, lorsque a et b varient en restant liés par une relation $b = \varphi(a)$; on élimine a et b entre les trois équations

$$V(x, y, z, t, a, b) = 0, \qquad b = \varphi(a), \qquad \frac{dV}{da} + \frac{dV}{db}\varphi'(a) = 0.$$

La courbe d'intersection de deux surfaces V infiniment voisines, la caractéristique au point de vue de la théorie des enveloppes, est une courbe caractéristique (P); les équations des caractéristiques se présentent donc ici sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} &V(x, y, z, t, a, b) = 0, \\ &\frac{dV}{da} + c\frac{dV}{db} \qquad = 0, \end{aligned}\right.$$

avec les trois paramètres a, b, c (qui forment seulement deux paramètres distincts lorsque l'équation $F = 0$ est linéaire en u, v, w, r).

En ce qui concerne les développables caractéristiques, on a, d'après ce qui précède, $\frac{u}{w}$, ..., en fonction de $\frac{x}{t}$, ..., ou encore p et q en fonction de x, y, z, par suite r.

L'intégrale singulière s'obtient en éliminant a et b entre les équations

$$V = 0, \qquad \frac{dV}{da} = 0, \qquad \frac{dV}{db} = 0;$$

cette intégrale singulière est représentée par une surface Σ. Les caractéristiques sont tangentes à la surface Σ; il en est de même des développables caractéristiques. Les surfaces intégrales sont également tangentes à la surface Σ.

Si l'on a fait des calculs corrélatifs de ceux qu'on vient d'indiquer, l'intégrale singulière qu'on obtient est l'équation tangentielle de la surface Σ.

16. Il peut se faire qu'on obtienne une intégrale complète sans passer par le système différentiel qui détermine les ensembles (P), (D). Par exemple, si l'on a une équation aux dérivées partielles qui soit la généralisation d'une équation différentielle ordinaire qu'on sache intégrer, on pourra, par analogie, deviner une intégrale complète de l'équation proposée. De quelque manière qu'on ait obtenu une intégrale complète, non seulement on en déduira les caractéristiques, mais encore on pourra lui appliquer la transformation de Legendre, et la nouvelle forme de l'intégrale donnera les développables caractéristiques; il restera peu de chose à faire pour achever l'intégration du système différentiel.

17. Dans le cas d'une équation linéaire, l'ensemble des points d'une caractéristique (P) et des plans passant par les tangentes à cette caractéristique constitue une intégrale, et c'est une intégrale complète. L'équation entre les coordonnées des plans passant par les tangentes, c'est-à-dire l'équation *tangentielle* de la développable formée par ces tangentes (la développable étant assimilée à une surface réglée gauche), est une intégrale au sens que voici : cette équation étant

$$\varphi(p, q, r) = 0,$$

si l'on calcule x et y par les formules

$$x = \frac{\partial r}{\partial p}, \qquad y = \frac{\partial r}{\partial q},$$

l'équation linéaire est satisfaite; on considère comme point de contact d'un plan passant par une génératrice de la développable le point correspondant de l'arête de rebroussement, c'est-à-dire le point correspondant de la caractéristique.

Corrélativement, pour une équation qui donne lieu à une équation linéaire par la transformation de Lagrange, l'ensemble des plans osculateurs à une caractéristique tangentielle (T) et des points situés sur les tangentes à cette courbe, en d'autres termes le système formé par les plans tangents d'une développable caractéristique (D) et les points de cette surface, constitue une intégrale complète. L'équation *ponctuelle* de cette développable est une intégrale, p et q se rapportant au plan tangent au point (x, y, z), ou encore au plan osculateur correspondant de l'arête de rebroussement, c'est-à-dire au plan osculateur correspondant de la caractéristique tangentielle (T). La surface développable est considérée ici sous le point de vue habituel; il n'en était pas de même dans le cas précédent.

Ces intégrales anormales sont d'ailleurs limites d'intégrales régulières. Si l'on considère, par exemple, l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution qui ont pour axe une droite donnée (équation doublement linéaire), elle admet une intégrale réglée dépendant de trois paramètres, constituée par les hyperboloïdes de révolution à une nappe qui ont pour axe la droite donnée; ces hyperboloïdes, en perdant un paramètre, peuvent dégénérer en des cercles qui sont les caractéristiques, en des cônes de révolution qui sont les développables (D).

IV. — Exemple d'une intégrale complète obtenue directement.

18. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(8)\qquad (Ax+a)p+(By+b)q+\alpha x+\beta y+Cz+D=0;$$

c'est une équation linéaire que la transformation de Legendre change en une équation également linéaire

$$(9)\qquad [(A+C)p+\alpha]\frac{dr}{dp}+[(B+C)q+\beta]\frac{dr}{dq} + ap+bq-Cr+D=0.$$

Le système différentiel (B''') qui définit les suites d'éléments des ensembles (P), (D), est

$$\frac{ds}{s}=\frac{dx}{Ax+a}=\frac{dy}{By+b}=\frac{dz}{-(\alpha x+\beta y+Cz+D)} =\frac{dp}{-[(A+C)p+\alpha]}=\frac{dq}{-[(B+C)q+\beta]}=\frac{dr}{ap+bq-Cr+D}.$$

L'integration du système différentiel en x, y, z peut se faire comme il suit. Si l'on regarde l'équation donnée comme une généralisation de l'équation différentielle ordinaire

$$(Ax + a)\frac{dz}{dx} + Cz + (\alpha x + D) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\alpha x + Cz + D = \frac{\alpha(Ax + a)}{A + C} + M(Ax + a)^{-\frac{C}{A}},$$

M étant une constante, on est conduit à l'*intégrale complète*

$$\alpha x + \beta y + Cz + D - \frac{\alpha(Ax + a)}{A + C} - \frac{\beta(By + b)}{B + C}$$
$$= M(Ax + a)^{-\frac{C}{A}} + N(By + b)^{-\frac{C}{B}},$$

ou encore

$$Cz + D + \frac{\alpha(Cx - a)}{A + C} + \frac{\beta(Cy - b)}{B + C} = M(Ax + a)^{-\frac{C}{A}} + \ldots,$$

M et N étant des constantes.

Les équations des caractéristiques sont dès lors (n° 15)

$$(10)\quad \frac{(Ax + a)^{\frac{1}{A}}}{\lambda} = \frac{(By + b)^{\frac{1}{B}}}{\mu}$$
$$= \frac{\left[\alpha x + \beta y + Cz + D - \frac{\alpha(Ax + a)}{A + C} - \frac{\beta(By + b)}{B + C}\right]^{-\frac{1}{C}}}{\rho} = s;$$

la quantité placée dans le crochet au dernier numérateur peut encore s'écrire

$$Cz + D + \frac{\alpha(Cx - a)}{A + C} + \frac{\beta(Cy - b)}{B + C};$$

il se trouve que le paramètre s est celui du système différentiel écrit plus haut.

On a de même, pour les développables caractéristiques,

$$(11)\quad \frac{[(A + C)p + \alpha]^{\frac{1}{A+C}}}{\lambda'}$$
$$= \frac{[(B + C)q + \beta]^{\frac{1}{B+C}}}{\mu'}$$
$$= \frac{\left\{ap + bq - Cr + D - \frac{a[(A + C)p + \alpha]}{A} - \frac{b[(B + C)q + \beta]}{B}\right\}^{\frac{1}{C}}}{\rho'} = \frac{1}{s};$$

la quantité placée dans l'accolade au dernier numérateur peut encore s'écrire

$$-Cr + D + \frac{a(-Cp-\alpha)}{A} + \frac{b(-Cq-\beta)}{B}.$$

Mais, au point de vue des constantes, il faut écrire que la relation (8) est satisfaite. Cette relation peut s'écrire

$$(Ax+a)\frac{(A+C)p+\alpha}{A+C} + (By+b)\frac{(B+C)q+\beta}{B+C} + \frac{\alpha(Cx-a)}{A+C} + \frac{\beta(Cy-b)}{B+C} + Cz + D = 0,$$

et l'on obtient la condition

$$\frac{\lambda^A \lambda'^{A+C}}{A+C} + \frac{\mu^B \mu'^{B+C}}{B+C} + \rho^{-C} = 0. \tag{12}$$

La relation (9) donne de même la condition

$$\frac{\lambda^A \lambda'^{A+C}}{A} + \frac{\mu^B \mu'^{B+C}}{B} + \rho'^{C} = 0. \tag{13}$$

L'ensemble des relations (1) et (2) comprend d'ailleurs la relation $px + qy = z + r$.

Les caractéristiques dépendent de deux paramètres $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, les développables caractéristiques dépendent également de deux paramètres $\frac{\lambda'}{\rho'}$, $\frac{\mu'}{\rho'}$. Si l'on prend $\rho = 1$, les caractéristiques dépendent des deux paramètres λ et μ; lorsqu'on a choisi λ et μ, on a une infinité de développables caractéristiques associées à une même caractéristique en prenant ρ' à volonté, et en calculant λ' et μ' par les relations (12) et (13).

On a supposé $C \neq 0$.