BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Des équations majorantes

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 93-101
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__93_1>

DES ÉQUATIONS MAJORANTES.

PAR M. A. PELLET.

1. **Étant donnée l'équation**

$$x^m - f(x, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

nous appellerons *équation majorante* de cette équation toute équation

$$X^m - F(X, X_1, \ldots, X_n) = 0,$$

où $F(X, X_1, \ldots, X_n)$ est une fonction majorante de $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ supposée holomorphe.

Considérons le système des n équations à n inconnues

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad x_2 - f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \\ x_i - f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad x_n - f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Si les premiers membres de leurs équations majorantes, $X_i - F_i(X_1, \ldots, X_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont nuls ou positifs pour le système de valeurs positives $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0$, les équations (1) admettent un système de solutions, $x_1^0, \ldots, x_n^0$ satisfaisant aux inégalités

$$X_1^0 \geqq |x_1^0|, \quad \ldots, \quad X_i^0 \geqq |x_i^0|, \quad X_n^0 \geqq |x_n^0|.$$

On pourra l'obtenir par la série de Newton, en négligeant dans les équations (1) les termes d'un degré supérieur au premier, résolvant les équations du premier degré ainsi obtenues, posant

$$x_i = u_i^0 + x_i',$$

u_i^0 étant la valeur obtenue pour x_i et opérant sur les équations en x_i' comme on a fait sur les équations (1). On obtient ainsi n séries absolument convergentes pour $x_1^0, \ldots, x_n^0$:

$$x_i^0 = u_i^0 + u_i^{(1)} + \ldots + u_i^{(k)} \ldots.$$

En effet, en opérant de même sur les équations majorantes

$$(2) \quad X_1 - F_1(X_1, \ldots, X_n) = 0, \quad \ldots, \quad X_n - F_n(X_1, \ldots, X_n) = 0,$$

on obtient, vu l'hypothèse faite, des quantités U toujours positives et supérieures aux modules des quantités u correspondantes. D'ailleurs, les limites des séries

$$\xi_i = U_i^0 + U_i^{(1)} + \ldots + U_i^{(k)} + \ldots$$

sont inférieures respectivement à X_i^0. De plus, les transformées successives peuvent se mettre sous la forme des équations (2). Il en résulte que pour des systèmes de valeurs $X_1, \ldots, X_n$, inférieures respectivement, mais infiniment voisines de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, et par conséquent pour ces dernières mêmes si le déterminant fonctionnel des équations (2) n'est pas nul pour $\xi_1, \ldots, \xi_n$, les équations du premier degré en $y_1, \ldots, y_n$,

$$y_1 - A_1^0 - \sum_j y_j F'_{1\xi_j}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_i - A_i^0 - \sum y_j F'_{i\xi_j}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0,$$

admettent pour solutions des valeurs positives, les quantités $A_1^0, \ldots, A_n^0$ étant toutes positives. Or, ces solutions sont des fonctions entières, linéaires et homogènes des quantités $A_1^0, \ldots, A_n^0$, à coefficients positifs ; si donc on substituait aux quantités A des quantités négatives, les solutions en y seraient toutes négatives. De là résulte l'impossibilité d'un second système de solutions des équations (2), $x'_1, \ldots, x'_n$, satisfaisant aux inégalités

$$\xi_1 \geqq |x'_1|, \quad \ldots, \quad \xi_x \geqq |x'_i|, \quad \xi_n \geqq |x'_n|.$$

En effet, on aurait

$$x'_1 - x_1^0 = f_1(x'_1, \ldots, x'_n) - f_1(x_1^0, \ldots, x_n^0);$$

mais

$$|f_1(x'_1, \ldots, x'_n) - f_1(x_1^0, \ldots, x_n^0)|$$
$$\leqq d_1 f'_{1\xi_1}(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \ldots + d_n f'_{1\xi_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

d_i représentant le module de la différence $x'_i - x_i^0$:

$$d_i = |x'_i - x_i^0|;$$

d'où

$$d_i + B_i^0 - \sum_j d_j F'_{i\xi_j}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0,$$

B_i^0 étant des quantités positives ; et nous avons vu qu'on ne peut satisfaire à ces équations par des valeurs positives des d.

2. De là on déduit facilement le théorème des fonctions implicites. Supposons que les fonctions f des équations (1) aient pour coefficients des fonctions holomorphes d'une variable t, les termes indépendants des inconnues x et les coefficients des termes du premier degré par rapport à ces inconnues s'annulant avec t ; soit

$$F(T, X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

une fonction majorante de toutes ces fonctions $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, où le terme indépendant des X et les coefficients de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s'annulent avec T. Le système des solutions positives des n équations

$$X_i - F(T_1, X_1, \ldots, X_n) = 0,$$

donné par la série de Newton, est fourni par le système

$$X_1 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = X,$$
$$X - F(T, X, \ldots, X) = 0;$$

T étant très petit, le premier membre de cette dernière équation prend des valeurs positives pour certaines valeurs positives de X ; en général, elle aura deux racines positives pour les valeurs de T inférieures à une certaine valeur positive τ pour laquelle elle aura deux racines positives égales, ξ. Pour les valeurs de t ayant un module inférieur à τ, les équations (1) auront un système de solutions donné par la série de Newton ; on aura

$$\xi \geqq |x_i^0|,$$

et, en prenant pour x_i^0 la valeur

$$u_i^0 + u_i^0 + \ldots + u_i^{(k)},$$

on commettra une erreur ayant un module inférieur à $2|u_j^{(k+1)}|$, $u_j^{(k+1)}$ étant le terme ayant le plus grand module dans la suite des n termes

$$u_1^{(k+1)}, \quad u_2^{(k+1)}, \quad \ldots, \quad u_n^{(k+1)}.$$

D'ailleurs, il est clair que x_i^0 est développable suivant les puissances croissantes de t, et le rayon de convergence est au moins égal à τ.

3. Soient l'équation

$$x^n - f(x) = 0,$$

où

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots;$$
$$F(X) = A_0 + A_1 X + \ldots + A_k X^k + \ldots$$

une fonction majorante de $f(x)$, $A_k \geqq |a_k|$. Si $X_0^n - F(X_0) > 0$, X_0 étant une quantité positive, l'équation $X^n - F(X) = 0$ a une racine positive ξ inférieure à X_0, et, x ayant un module compris entre ξ et X_0, le logarithme de $1 - \frac{f(x)}{x^n}$ est développable suivant les puissances positives et négatives de x :

$$\begin{aligned} l\left[1 - \frac{f(x)}{x^n}\right] &= g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_k x^k \\ &\quad + h_1 \frac{1}{x} + h_2 \frac{1}{x^2} + \ldots + h_k \frac{1}{x^k} \\ &= g_0 + G(x) + H\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

$$G(x) = g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_k x^k + \ldots,$$
$$H(x) = h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_k x^k + \ldots.$$

On a

$$e^{-g_0-G(x)}[x^n-f(x)] = x^n e^{H\left(\frac{1}{x}\right)} = P_n(x),$$

$P_n(x)$ étant une fonction entière algébrique de degré n :

$$P_n(x) = x^n + p_1 x^{n+1} + \ldots + p_n.$$

Les coefficients de $P_n(x)$ sont fonctions holomorphes des quantités $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ et l'équation $P_n(x) = 0$ a toutes ses racines dans le cercle de rayon ξ. Si l'on suppose que les coefficients a de la fonction $f(x)$ sont fonctions holomorphes d'une variable t, les $(n+1)$ premiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ s'annulant avec t, on pourra assigner un nombre positif τ, tel que, t ayant un module inférieur à τ, on ait

$$x^n - f(x) = e^{g_0+G(x)} P_n(x)$$

pour les valeurs de x de module inférieur à un certain nombre positif ξ, ce qui constitue une démonstration élémentaire d'un théorème de Weierstrass [*Mémoire sur la théorie infinitésimale des équations et les fonctions implicites* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1895)].

4. Considérons une fonction entière de genre 0, ayant pour zéros les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ dont les modules $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ forment une suite non décroissante

$$\mathfrak{F}(x) = \left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_k}\right)\cdots.$$

Supposons $z_n < z_{n+1}$. On a

$$\mathfrak{F}(x) = (-1)^n \frac{x^n}{x_1 x_2 \ldots x_n} Q,$$

$$Q = \left(1-\frac{x_1}{x}\right)\left(1-\frac{x_2}{x}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\left(1+\frac{x}{x_{n+1}}\right)\cdots;$$

le coefficient d'une puissance de x dans Q a un module au plus égal au coefficient de la même puissance de z dans le produit

$$\left(1+\frac{z_1}{z}\right)\cdots\left(1+\frac{z_n}{z}\right)\left(1+\frac{z}{z_{n+1}}\right)\left(1+\frac{z}{z_{n+2}}\right)\cdots,$$

et l'équation majorante de $x_n Q = 0$ a deux racines positives si pour une valeur de z comprise entre z_n et z_{n+1} ce produit est inférieur à 2, ou

$$l(2) > \frac{z_1}{z} + \ldots + \frac{z_n}{z} + \frac{z}{z_{n+1}} + \frac{z}{z_{n+2}} + \ldots;$$

en prenant $z = \sqrt{z_n z_{n+1}}$, il vient

$$(1) \qquad l(2) \geqq \sqrt{\frac{z_n}{z_{n+1}}}\left[\frac{z_1 + \ldots + z_n}{z_n} + z_{n+1}\left(\frac{1}{z_{n+1}} + \ldots\right)\right].$$

Si $\mathcal{F}(x)$ est algébrique et de degré m, le crochet est plus petit que m. Désignons par $\mathcal{F}_\mu(x)$ la fonction ayant pour zéros $x_1^\mu, \ldots, x_k^\mu$; l'équation majorante de degré n de l'équation $\mathcal{F}_\mu(x) = 0$ aura deux racines positives pour les valeurs de μ satisfaisant à l'inégalité

$$l(2) \geqq m\left(\frac{z_n}{z_{n+1}}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Dans le cas où $\mathcal{F}(x)$ n'est pas algébrique, cette dernière condition devient

$$l(2) \geqq A\,n\left(\frac{z_n}{z_{n+1}}\right)^{\frac{\mu}{2}},$$

A étant une quantité indépendante de n et de μ; et il semble bien que μ est de l'ordre de grandeur de n, quand n augmente indéfiniment, à moins que $\mathcal{F}(x)$ soit d'ordre 0, c'est-à-dire la série

$$\frac{1}{z_1^\rho} + \frac{1}{z_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{z_k^\rho} + \ldots,$$

convergente pour toute valeur positive de ρ.

Lorsque les équations majorantes de tous les degrés d'une équation ont des racines positives, ce qui suppose l'équation complète, toutes les racines de l'équation sont séparées et peuvent s'exprimer en fonctions holomorphes des coefficients.

Il en est ainsi pour l'équation

$$0 = 1 + \frac{x}{q} + \frac{a_2}{q^4}x^2 + \ldots + \frac{a_n x^n}{q^{n^2}} + \ldots,$$

où le module de a_n, A_n, est égal au produit $C_1^{n-1} C_2^{n-2} \ldots C_{n-1}$, les quantités C étant comprises entre o et 1, et $q > \sqrt{5}$. En effet, si dans

$$\frac{1}{X^n} + \frac{1}{qX^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-i}}{q^{(n-i)^2}X^i} + \ldots - \frac{A_n}{q^{n^2}} + \ldots + \frac{A_{n+i}}{q^{(n+i)^2}}X^i + \ldots$$

on remplace X par $\sqrt{\frac{A_{n-1}}{A_{n+1}}}q^{2n}$, en observant que

$$\frac{A_{n-i}}{q^{(n-i)^2}X^i} + \frac{A_{n+1}}{q^{(n+i)^2}}X^i < \frac{2A_n}{q^{n^2+i^2}},$$

on voit qu'on obtient une quantité négative si

$$1 > 2\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^4} + \ldots + \frac{1}{q^{i^2}} + \ldots\right),$$

inégalité satisfaite si $q > \sqrt{5}$.

Pour l'équation

$$0 = 1 + \frac{x}{q} + \frac{1}{2}a_n\frac{x^2}{q^4} + \ldots + \frac{a_n}{1.2\ldots n}\frac{x^n}{q^{n^2}} + \ldots,$$

où a_n a la même expression que précédemment, et q est compris entre $\sqrt[4]{5}$ et $\sqrt{5}$, formons la transformée en $y = -x^2$. Le coefficient de y_n est

$$\frac{a_n^2 b_n}{(1.2\ldots n)^2 q^{2n^2}},$$

où

$$b_n = 1 - \frac{2n}{n+1}\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{q^2} + \ldots$$

a un module compris entre

$$1 + 2\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^8} + \ldots + \frac{1}{q^{2i^2}} + \ldots\right)$$

et

$$1 - 2\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^8} + \ldots + \frac{1}{q^{2i^2}} + \ldots\right);$$

on retombe sur le cas précédent si

$$1 > C_n^2 \frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{b_{n-1}b_{n+1}}{b_n^2}.$$

5. Le module de Q, pour $|x| = z = \sqrt{z_n z_{n+1}}$, est supérieur à

$$\left(1 - \frac{z_1}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right)\cdots\left(1 - \frac{z_n}{z}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{n+1}}\right)\cdots$$

et le logarithme de ce module à

$$\left[\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{z_n}+z_{n+1}\left(\frac{1}{z_{n+1}}+\frac{1}{z_{n+2}}+\ldots\right)\right]l\left(1-\sqrt{\frac{z_n}{z_{n+1}}}\right).$$

Ce logarithme est négatif et en général dépasse infiniment en valeur absolue la partie réelle de $l\dfrac{x^n}{x_1x_2\ldots x_n}$ lorsque n est infini. Mais le module de Q varie avec les arguments de x, x_1, ..., x_k, ..., tandis que le module de $\dfrac{x^n}{x_1x_2\ldots x_n}$ en est indépendant ; et dans certains cas, on peut donner aux arguments des zéros x_1, x_2, ..., x_k, ... des valeurs telles que le rapport des logarithmes des modules de Q et de $\dfrac{x^n}{x_1x_2\ldots x_n}$ soit inférieur à l'unité en valeur absolue quel que soit l'argument de x, et pour une infinité de cercles $\sqrt{z_nz_{n+1}}$.

Par exemple, posons $x_n=n^\mu e^{na\pi i}$, a étant racine d'une équation du second degré à coefficients entiers ou plus généralement défini par une fraction continue dans laquelle les quotients incomplets sont tous inférieurs à un nombre donné. On aura

$$\mathrm{K}a=\mathrm{K}_1+\varepsilon,$$

K et K_1 étant des nombres entiers et

$$1>|\varepsilon|>\frac{b}{\mathrm{K}},$$

b quantité positive indépendante de K. Pour K_1 pair et K quelconque entier positif ou négatif, on a

$$\left|\frac{1}{e^{ka\pi i}-1}\right|=\frac{1}{\left|2\sin\dfrac{\varepsilon\pi}{2}\right|}\leqq b_1\mathrm{K},$$

b_1 nombre positif indépendant de K. Il en résulte

$$\left|\frac{x_1^k+\ldots+x_n^k}{x_n^k}+x_{n+1}^k\left(\frac{1}{x_{n+1}^k}+\frac{1}{x_{n+2}^k}+\ldots\right)\right|<\mathrm{BK},$$

B étant un nombre indépendant de K et de n, en s'appuyant sur l'inégalité

$$|a_0+a_1q+\ldots+a_jq^j+\ldots+a_mq^m|<\frac{2a_0}{|1-q|},$$

les quantités a étant positives et allant en décroissant, q une quantité imaginaire de module égal à 1. Par suite,

$$|lQ| < B\frac{1}{1-\sqrt{\frac{z_n}{z_{n+1}}}} = B\frac{1}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-\mu}{2}}}.$$

Or, $l\frac{z^n}{z_1 z_2 \ldots z_n} > \mu n$; il suffira donc de satisfaire à l'inégalité

$$\mu\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\mu(\mu+2)}{8}\frac{1}{n}+\ldots\right) > B,$$

ou plus simplement

$$\mu^2 > 4B.$$

Ainsi, pour $\mu > 2\sqrt{B}$, la fonction $\prod_n \left(1-\frac{x}{n^\mu e^{na\pi i}}\right)$ est du même ordre de grandeur que $z^{\frac{1}{\mu}}$ quel que soit l'argument de x, quantité de module égal à z, et cela pour une infinité de valeurs de z.

M. Maillet a demandé un exemple d'une telle fonction : *Intermédiaire*, 1904, page 8, question 2716.