BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

La méthode de la coordonnée isotrope dans le problème de la déformation des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 217-243

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__217_0>

LA MÉTHODE DE LA COORDONNÉE ISOTROPE DANS LE PROBLÈME DE LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. L. Raffy.

Je me propose de présenter sous une forme propre aux applications et d'appliquer aux surfaces spirales une méthode dont il n'a été fait que peu d'usage pour l'étude de la déformation des surfaces : la méthode de la coordonnée isotrope. Dans son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier, 1867), Ossian Bonnet, pour former l'équation des surfaces qui admettent un élément linéaire donné, a pris comme variables les paramètres des lignes de longueur nulle et comme inconnue une fonction qui n'est autre que l'une des coordonnées isotropes des surfaces cherchées. Mais son analyse, peu symétrique, se prête malaisément aux applications (lui-même n'en a fait qu'une seule, relative aux surfaces minima), et l'on ne saurait en tirer parti dans le cas général où l'élément linéaire est exprimé au moyen de coordonnées curvilignes quelconques. Le procédé direct par lequel M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 261) a établi l'équation qui convient à ce cas ne montre pas ce qu'il faut faire, connaissant une solution de cette équation, pour déterminer la surface correspondante. Aussi avons-nous cru pouvoir revenir sur ce sujet, d'autant plus qu'il y avait à examiner une question que soulève l'emploi de la coordonnée isotrope. Bour a reconnu que l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont les coordonnées non isotropes d'une surface dont l'élément linéaire est donné admet toutes les solutions d'une équation du premier ordre, et le fait a été expliqué par M. Darboux. Il y avait donc lieu de rechercher si l'équation de Bonnet généralisée admet des solutions *illusoires* de la même espèce.

En modifiant à peine un raisonnement dû à M. Darboux, nous obtenons (§ I) l'équation de la déformation des surfaces pour une coordonnée quelconque, non isotrope ou isotrope, et nous prouvons à la fois l'existence de solutions illusoires dans les deux cas.

Nous établissons ensuite (§ II) l'équation de Bonnet, en introduisant une inconnue auxiliaire dont la signification est invariante. L'emploi de cette même inconnue auxiliaire conduit (§ III) à l'équation de déformation pour une coordonnée isotrope dans le cas des coordonnées curvilignes quelconques, par une analyse qui indique l'usage à faire des solutions (non illusoires) de cette équation pour déterminer les surfaces correspondantes : le problème s'achève par trois quadratures de différentielles exactes.

Comme application de ces principes, nous étudions (§ IV) deux types de solutions pour l'équation de déformation des surfaces spirales et nous obtenons ainsi, par un procédé régulier et uniforme, non seulement le théorème classique de Bour sur les hélicoïdes et la proposition de M. Maurice Lévy relative aux spirales, sous la forme précise que nous lui avions donnée (Darboux, *Théorie des surfaces,* t. IV, Note VI), mais aussi les déformations dépendant d'une fonction arbitraire qu'admettent les surfaces dont on connaît toutes les déformations et divers autres résultats qui paraissent nouveaux.

I. — L'équation de la déformation des surfaces et ses solutions illusoires.

1. M. Darboux a fait connaître (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 252) le moyen de former directement l'équation des surfaces qui admettent un élément linéaire donné

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

en partant des formules de Gauss. Si (x, y, z) sont les coordonnées rectangulaires d'une des surfaces cherchées, (a, b, c) les cosinus directeurs de la normale au point (x, y, z), et si

$$\mathrm{L}\,du^2 + 2\mathrm{M}\,du\,dv + \mathrm{N}\,dv^2$$

est la seconde forme quadratique fondamentale, on a, ainsi que l'a montré Gauss, les trois relations

$$\begin{aligned} x''_{u^2} - \mathrm{A}x'_u - \mathrm{A}_1 x'_v &= \mathrm{L}a, \\ x''_{uv} - \mathrm{B}x'_u - \mathrm{B}_1 x'_v &= \mathrm{M}a, \\ x''_{v^2} - \mathrm{C}x'_u - \mathrm{C}_1 x'_v &= \mathrm{N}a, \end{aligned}$$

les trois analogues en y, b et les trois analogues en z, c. Les six lettres A, A_1, B, B_1, C, C_1 désignent les symboles de Christoffel, qui ne dépendent que de E, F, G et de leurs dérivées premières.

Soient ξ une coordonnée quelconque et α le cosinus correspondant de la normale,

$$\xi = lx + my + nz, \qquad \alpha = la + mb + nc.$$

Désignons par ε la somme des carrés des constantes l, m, n,

$$\varepsilon = l^2 + m^2 + n^2.$$

Si ξ n'est pas une coordonnée isotrope, ε est égal à 1 ; si ξ est une coordonnée isotrope, ε est nul.

Des formules de Gauss, on déduit immédiatement

$$\begin{aligned}
\xi_{11} &= \xi''_{u^2} - A\xi'_u - A_1\xi'_v = L\alpha,\\
\xi_{12} &= \xi''_{uv} - B\xi'_u - B_1\xi'_v = M\alpha,\\
\xi_{22} &= \xi''_{v^2} - C\xi'_u - C_1\xi'_v = N\alpha.
\end{aligned}$$

Effectuant avec M. Darboux la combinaison

$$\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2 = (LN - M^2)\alpha^2,$$

et se rappelant l'expression de la courbure totale

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{H^2},$$

on trouve

$$\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2 = KH^2\alpha^2.$$

Mais les formules classiques

$$Ha = y'_u z'_v - z'_u y'_v, \qquad Hb = z'_u x'_v - x'_u z'_v, \qquad Hc = x'_u y'_v - y'_u x'_v$$

donnent visiblement

$$H^2\alpha^2 = \begin{vmatrix} l & x'_u & x'_v \\ m & y'_u & y'_v \\ n & z'_u & z'_v \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \varepsilon & \xi'_u & \xi'_v \\ \xi'_u & E & F \\ \xi'_v & F & G \end{vmatrix} = H^2(\varepsilon - \Delta\xi),$$

$\Delta\xi$ désignant le premier paramètre différentiel de ξ, savoir

$$\Delta\xi = \frac{G\xi_u'^2 - 2F\xi_u'\xi_v' + E\xi_v'^2}{EG - F^2}.$$

On arrive donc finalement à l'équation cherchée

$$\text{(D)} \qquad (\xi''_{u^2} - A\xi'_u - A_1\xi'_v)(\xi''_{v^2} - C\xi'_u - C_1\xi'_v) \\ - (\xi''_{uv} - B\xi'_u - B_1\xi'_v)^2 = KH^2(\varepsilon - \Delta\xi),$$

où l'on doit faire $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, suivant que ξ est ou n'est pas une coordonnée isotrope.

2. On sait que, dans ce dernier cas, l'équation de déformation est vérifiée par toute solution ξ de l'équation $\Delta\xi = 1$. Le fait a été constaté par Bour et expliqué par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 255) : toute fonction ξ qui satisfait à l'équation $\Delta\xi = 1$, étant égalée à une constante arbitraire, définit les trajectoires orthogonales d'une famille de lignes géodésiques, mais ne fournit pas une surface admettant l'élément linéaire donné. Nous dirons que c'est une *solution illusoire.*

Un fait analogue se produit lorsque ξ est une coordonnée isotrope : ainsi que nous le montrerons dans un instant, *toute solution de l'équation* $\Delta\xi = 0$ *vérifie l'équation de déformation.* Pour l'interpréter, égalons ξ à une constante arbitraire; nous aurons

$$\xi'_u\, du + \xi'_v\, dv = 0.$$

Or, cette équation, rapprochée de l'équation $\Delta\xi = 0$, ou

$$E\xi_v'^2 - 2F\xi'_u\xi'_v + G\xi_u'^2 = 0,$$

donne immédiatement $ds^2 = 0$. Ainsi, l'équation $\xi =$ const. représente une famille de lignes de longueur nulle, qui sont des géodésiques particulières et peuvent être considérées comme étant leurs propres trajectoires orthogonales. Elles constituent une *solution illusoire* de l'équation de déformation. Nous verrons au paragraphe suivant que ces solutions sont les seules qui satisfassent à l'équation (D) sans fournir une surface admettant l'élément linéaire donné.

Pour vérifier l'existence des solutions illusoires, tant dans le cas $\varepsilon = 1$ que dans le cas $\varepsilon = 0$, calculons les deux dérivées partielles de $\Delta\xi$. On trouve ainsi

$$\frac{\partial \Delta\xi}{\partial u} = \frac{2}{H^2}[(G\xi'_u - F\xi'_v)\xi_{11} + (E\xi'_v - F\xi'_u)\xi_{12}],$$
$$\frac{\partial \Delta\xi}{\partial v} = \frac{2}{H^2}[(G\xi'_u - F\xi'_v)\xi_{12} + (E\xi'_v - F\xi'_u)\xi_{22}],$$

et l'on voit que, si $\Delta\xi$ est constant, les deux seconds membres doivent être nuls. Or, ils sont linéaires et homogènes par rapport aux deux binomes $G\xi'_u - F\xi'_v$ et $F\xi'_u - E\xi'_v$. Si ces binomes sont nuls à la fois, ξ se réduit à une constante, ce qui exige $\varepsilon = 0$ puisque $\Delta\xi$ est nul; alors les expressions ξ_{11}, ξ_{12}, ξ_{22} sont nulles et l'équation (D) est vérifiée. Pour que les deux binomes ne soient pas nuls, il faut et il suffit que le déterminant $\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2$ soit nul, ce qui prouve bien que toute solution de l'équation $\Delta\xi = \varepsilon$ appartient à l'équation (D), que ε soit égal à 1 ou qu'il soit égal à zéro.

3. *Remarque.* — Le procédé direct par lequel a été obtenue ci-dessus l'équation de déformation (D) ne montre pas ce qu'il faut faire, connaissant une solution (non illusoire) de cette équation, pour déterminer la surface correspondante.

Dans le cas de la coordonnée non isotrope, l'équation (D) exprime, comme l'a fait voir M. Darboux, que l'expression

$$ds^2 - d\xi^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - (\xi'_u\,du + \xi'_v\,dv)^2$$

est un produit de deux différentielles. Pour la mettre sous cette forme, il faut effectuer une quadrature de différentielle exacte; et l'on obtient les deux autres coordonnées de la surface en intégrant les deux différentielles exactes ainsi calculées.

Il n'en va plus du tout ainsi lorsque la coordonnée ξ est isotrope. C'est pourquoi nous allons former à nouveau l'équation (D), d'abord dans le cas particulier traité par O. Bonnet, puis dans le cas général où les surfaces sont rapportées à des coordonnées curvilignes quelconques.

II. — La méthode de la coordonnée isotrope pour les surfaces rapportées a leurs lignes de longueur nulle.

4. Donnons-nous, avec O. Bonnet (*loc. cit.*), l'élément linéaire

$$ds^2 = 4\,\varphi^2(u, v)\,du\,dv. \tag{1}$$

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une surface admettant cet élément linéaire. Introduisons les coordonnées isotropes

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = x - iy, \tag{2}$$

dont les différentielles seront

$$d\xi = p\,du + q\,dv, \qquad d\eta = p_1\,du + q_1\,dv,$$

et identifions ds^2 avec

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi\,d\eta + dz^2.$$

Nous obtenons ainsi les trois relations

$$\frac{\partial z}{\partial u} = i\sqrt{pp_1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = i\sqrt{qq_1}, \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q}} - \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}} = \frac{2\varphi}{\sqrt{pq}}. \tag{4}$$

Pour la symétrie des calculs, nous poserons

$$\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}} = \frac{2\omega}{\sqrt{pq}}. \tag{5}$$

Remarquons que les seconds membres des équations (4) et (5) sont des invariants. Si l'on désigne, en effet, par $\Delta\xi$ le premier paramètre différentiel de ξ relatif à la forme (1) et par $\Delta(\xi, \eta)$ le paramètre mixte de ξ et η, on a

$$\Delta\xi = \frac{pq}{\varphi^2}, \qquad \Delta(\xi, \eta) = \frac{pq_1 + qp_1}{2\varphi^2},$$

et l'on voit déjà que le second membre de l'équation (4) est un invariant. De plus, en élevant au carré les équations (4) et (5), on trouve

$$(4') \qquad \frac{pq_1 + qp_1}{pq} - 2\frac{\sqrt{p_1 q_1}}{\sqrt{pq}} = \frac{2\Delta(\xi, \eta)}{\Delta\xi} - 2\frac{\sqrt{p_1 q_1}}{\sqrt{pq}} = \frac{4}{\Delta\xi},$$

$$(5') \qquad \frac{pq_1 + qp_1}{pq} + 2\frac{\sqrt{p_1 q_1}}{\sqrt{pq}} = \frac{2\Delta(\xi, \eta)}{\Delta\xi} + 2\frac{\sqrt{p_1 q_1}}{\sqrt{pq}} = \frac{4\omega^2}{pq}.$$

On déduit immédiatement de là

$$(6) \qquad \frac{\omega^2}{pq} + \frac{1}{\Delta\xi} = \frac{\Delta(\xi, \eta)}{\Delta\xi}, \qquad \frac{\omega}{\sqrt{pq}} = \frac{\sqrt{\Delta(\xi, \eta) - 1}}{\sqrt{\Delta\xi}},$$

ce qui achève de justifier notre assertion.

Résolvant les équations (4) et (5), nous obtenons

$$\sqrt{p_1} = \frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}}, \qquad \sqrt{q_1} = \frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}};$$

d'où résulte

$$(7) \qquad d\eta = \left(\frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}}\right)^2 du + \left(\frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}}\right)^2 dv,$$

$$(8) \qquad -i\,dz = \sqrt{p}\,\frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}}\,du + \sqrt{q}\,\frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}}\,dv.$$

Les conditions d'intégrabilité de $d\eta$ et de dz donnent respectivement

$$(9) \qquad \frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}} = \frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}},$$

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{p}\,\frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{q}\,\frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}}\right).$$

Or, si l'on pose

$$dp = r\,du + s\,dv, \qquad dq = s\,du + t\,dv,$$

la dernière équation se réduit à

$$(10') \qquad \sqrt{p}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}} - \frac{\varphi s}{2\sqrt{pq}} = \sqrt{q}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}} + \frac{\varphi s}{2\sqrt{pq}}.$$

La résolution du système formé par les équations (9) et (10′) donne

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\omega + \varphi}{\sqrt{p}} = \frac{\omega - \varphi}{2\sqrt{q}}\,\frac{s}{\sqrt{pq}}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\omega - \varphi}{\sqrt{q}} = \frac{\omega + \varphi}{2\sqrt{p}}\,\frac{s}{\sqrt{pq}};$$

effectuant et groupant les termes, on trouve

$$(12)\qquad -\frac{\partial}{\partial u}\frac{\omega}{\sqrt{pq}} = \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\varphi\sqrt{q}}{\sqrt{p}}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\omega}{\sqrt{pq}} = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\varphi\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

De là résulte la condition d'intégrabilité

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\varphi\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\varphi\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\right) = 0,$$

d'où les dérivées troisièmes de ξ disparaissent d'elles-mêmes; il reste, tout calcul fait,

$$(14)\qquad \varphi(rt - s^2) - 2\varphi'_v rq - 2\varphi'_u tp + 4\varphi''_{uv} pq = 0,$$

ce qui est l'équation d'Ossian Bonnet.

5. Connaissant une solution ξ de cette équation, on aura ω, d'après les relations (12), par une quadrature de différentielle exacte,

$$(15)\qquad \frac{\omega}{\sqrt{pq}} = \int -\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial u}\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\,du + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\varphi\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\,dv = \psi(u, v) + h;$$

puis, en vertu des relations (7) et (8),

$$(16)\qquad \eta = \int p\left(\psi - \frac{\varphi}{\sqrt{pq}} + h\right)^2 du + q\left(\psi + \frac{\varphi}{\sqrt{pq}} + h\right)^2 dv,$$

$$(17)\qquad -iz = \int p\left(\psi - \frac{\varphi}{\sqrt{pq}} + h\right) du + q\left(\psi + \frac{\varphi}{\sqrt{pq}} + h\right) dv.$$

La constante arbitraire h n'influe que sur la position de la surface par rapport aux axes. Soient, en effet, η_0 et z_0 les expressions qu'on obtient en faisant $h = 0$; il vient

$$\eta = \eta_0 - 2ihz_0 + h^2\xi, \qquad -iz = -iz_0 + h\xi;$$

d'où l'on déduit aisément

$$\xi\eta + z^2 = \xi\eta_0 + z_0^2.$$

On peut donc, dans les formules (15), (16) et (17), négliger la constante h. Cette constante étant négligée, ainsi que celles qui s'ajoutent à η et à z, si l'on multiplie ξ par une constante C, on voit que η se trouve divisé par C et z n'est pas changé, de sorte que l'introduction de C revient à une rotation de la surface autour de l'axe des z. Enfin, on voit que la *connaissance de l'élément linéaire et de la coordonnée isotrope* ξ *détermine complètement la forme de la surface.*

Remarque. — Il résulte de l'analyse par laquelle nous avons obtenu l'équation (14) que si, à une solution ξ de cette équation, on associe les fonctions η et z qui s'en déduisent par les relations (16) et (17), on satisfait bien à l'identité

$$d\xi\, d\eta + dz^2 = 4\varphi^2\, du\, dv.$$

Mais cette analyse tombe en défaut quand l'une des dérivées p et q s'évanouit, c'est-à-dire quand ξ est une solution de l'équation $\Delta\xi = 0$. D'autre part, les solutions des équations $p = 0$ et $q = 0$ appartiennent à l'équation (14), comme on le voit ici sans invoquer la démonstration faite au n° 2. Or, si l'on suppose, par exemple, $q = 0$ ou ξ fonction de u seulement, la seconde des équations (3) montre que z ne dépend aussi que de u, de sorte que la surface correspondante est un cylindre à génératrices isotropes. Si donc l'élément linéaire proposé n'est pas celui d'une développable, les solutions de l'équation $\Delta\xi = 0$ seront des *solutions illusoires,* contrairement à une affirmation trop absolue que j'avais émise à ce sujet (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 1905, p. 410).

III. — La méthode de la coordonnée isotrope pour les surfaces rapportées a un réseau quelconque.

6. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une surface admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{1}$$

Soit posé encore

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi\ = x + iy, & \eta\ = x - iy, \\ d\xi = p\, du + q\, dv, & d\eta = p_1\, du + q_1\, dv. \end{array}\right. \tag{2}$$

Identifions ds^2 avec

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\xi\, d\eta + dz^2.$$

Nous obtenons les trois relations

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E} - pp_1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G} - qq_1},$$

$$(4) \qquad \sqrt{\mathrm{E} - pp_1}\,\sqrt{\mathrm{G} - qq_1} = \mathrm{F} - \frac{pq_1 + qp_1}{2}.$$

La dernière, rendue rationnelle, devient

$$(4') \qquad \mathrm{H}^2[1 - \Delta(\xi, \eta)] = \frac{(pq_1 - qp_1)^2}{4}$$

si l'on introduit le paramètre mixte

$$(5) \qquad \Delta(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{G}pp_1 - \mathrm{F}(pq_1 + qp_1) + \mathrm{E}qq_1}{\mathrm{H}^2},$$

que nous prendrons comme inconnue auxiliaire. Nous pouvons alors tirer p_1 et q_1 des deux dernières équations, ainsi écrites :

$$qp_1 - pq_1 = 2\mathrm{H}\sqrt{1 - \Delta(\xi, \eta)},$$
$$(\mathrm{G}p - \mathrm{F}q)p_1 + (\mathrm{E}q - \mathrm{F}p)q_1 = \mathrm{H}^2\Delta(\xi, \eta).$$

En posant

$$(6) \qquad \Delta\xi = \frac{\mathrm{G}p^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{E}q^2}{\mathrm{H}^2},$$

$$(7) \qquad \gamma = \frac{\mathrm{G}p - \mathrm{F}q}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\xi}}, \qquad \varepsilon = \frac{\mathrm{E}q - \mathrm{F}p}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\xi}},$$

$$(8) \qquad \theta = \frac{\sqrt{1 - \Delta(\xi, \eta)}}{\sqrt{\Delta\xi}},$$

et convenant de prendre la même détermination du radical $\sqrt{\Delta\xi}$ dans les trois relations (7) et (8), on met p_1 et q_1 sous les formes suivantes :

$$p_1 = \frac{p}{\Delta\xi} - \theta^2 p + 2\theta\varepsilon, \qquad q_1 = \frac{q}{\Delta\xi} - \theta^2 q - 2\theta\gamma.$$

Substituant ces expressions dans les relations (3), on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \pm(\theta p - \varepsilon), \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \pm(\theta q + \gamma).$$

Mais, comme le premier membre de l'équation (4) est le produit des deux dérivées z'_u et z'_v, on reconnaît que les signes supérieurs vont ensemble. Nous pouvons, en faisant abstraction d'une symétrie par rapport au plan des xy, négliger les signes inférieurs. Nous avons donc

$$(9) \qquad d\eta = \left(\frac{p}{\Delta\xi} - \theta^2 p + 2\theta\varepsilon\right) du + \left(\frac{q}{\Delta\xi} - \theta^2 q - 2\theta\gamma\right) dv,$$

$$(10) \qquad dz = (\theta p - \varepsilon)\, du + (\theta q + \gamma)\, dv.$$

La condition d'intégrabilité de dz donne

$$(11) \qquad p\theta'_v - q\theta'_u = \gamma'_u + \varepsilon'_v.$$

Pour abréger les calculs, remarquons qu'on a

$$d\eta = \left(\frac{p}{\Delta\xi} + \theta^2 p - 2\theta\frac{\partial z}{\partial u}\right) du + \left(\frac{q}{\Delta\xi} - \theta^2 q - 2\theta\frac{\partial z}{\partial v}\right) dv;$$

si l'on écrit alors la condition d'intégrabilité de $d\eta$, en ayant égard aux expressions de z'_u et de z'_v, on trouve simplement

$$(12) \qquad \varepsilon\theta'_v + \gamma\theta'_u = \frac{q}{2}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\Delta\xi} - \frac{p}{2}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\Delta\xi}.$$

Résolvons les équations (11) et (12) par rapport aux dérivées de θ, en remarquant que, d'après les relations (6) et (7), on a identiquement

$$p\gamma + q\varepsilon = \mathrm{H}\sqrt{\Delta\xi}.$$

Nous trouvons ainsi

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta'_u &= \frac{1}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\xi}}\left[\frac{p}{2}\left(q\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\Delta\xi} - p\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\Delta\xi}\right) - \varepsilon(\gamma'_u + \varepsilon'_v)\right], \\ \theta'_v &= \frac{1}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\xi}}\left[\frac{q}{2}\left(q\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\Delta\xi} - p\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\Delta\xi}\right) + \gamma(\gamma'_u + \varepsilon'_v)\right]. \end{aligned} \right.$$

Il n'y a plus qu'à écrire la condition d'intégrabilité de $d\theta$ pour arriver à l'équation du second ordre à laquelle doit satisfaire la coordonnée isotrope ξ et que nous avons obtenue directement ci-dessus (n° 1) sous la forme

$$(14) \qquad \begin{aligned} &(\xi''_{u^2} - \mathrm{A}\xi'_u - \mathrm{A}_1\xi'_v)(\xi''_{v^2} - \mathrm{C}\xi'_u - \mathrm{C}_1\xi'_v) \\ &\qquad - (\xi''_{uv} - \mathrm{B}\xi'_u - \mathrm{B}_1\xi'_v)^2 + \mathrm{K}\mathrm{H}^2\Delta\xi = 0. \end{aligned}$$

Connaissant une solution ξ de cette équation pour laquelle $\Delta\xi$ ne soit pas nul, on aura les deux dérivées partielles de θ par les formules (13); on obtiendra donc θ par une quadrature de différentielle exacte. Il en sera de même de chacune des coordonnées η et z, en vertu des équations (9) et (10). Ainsi *le problème s'achève, comme dans le cas de la coordonnée non isotrope, par trois quadratures de différentielles exactes.*

Remarque. — La fonction auxiliaire que nous avons employée dans le cas des surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle était, d'après l'équation (6) du paragraphe précédent,

$$\frac{\omega}{\sqrt{pq}} = \frac{\sqrt{\Delta(\xi, \eta) - 1}}{\sqrt{\Delta\xi}}.$$

Si l'on se reporte à l'équation (8) du présent paragraphe, par laquelle est définie la fonction auxiliaire θ, on voit que le rapport de ces deux fonctions est égal à l'unité imaginaire i.

IV. — Quelques déformations des surfaces spirales et des surfaces de révolution.

7. L'équation d'Ossian Bonnet étant homogène par rapport à ξ et à ses dérivées, il est naturel de l'appliquer aux éléments linéaires homogènes, c'est-à-dire aux éléments linéaires des surfaces spirales et des surfaces de révolution. Il m'a paru avantageux de prendre ces éléments linéaires sous la forme

$$(1) \qquad ds^2 = 4e^{2m(u-v)} f^2(u+v)\, du\, dv,$$

qui convient pour $m = 0$ aux surfaces de révolution, pour $m \neq 0$ aux spirales. On voit d'ailleurs que, m étant différent de zéro, il suffit de remplacer u et v par des quantités proportionnelles pour être en droit d'attribuer à m telle valeur constante qu'on voudra.

Avec ces notations, on a

$$(2) \qquad \begin{gathered} \varphi = e^{m(u-v)} f(u+v), \\ \varphi'_u = e^{m(u-v)}(f' + mf), \qquad \varphi'_v = e^{m(u-v)}(f' - mf), \\ \varphi''_{uv} = e^{m(u-v)}(f'' - m^2 f), \end{gathered}$$

les accents désignant les dérivées prises par rapport à l'argument

$$w = u + v.$$

L'équation de déformation devient alors

$$(3)\quad f(rt - s^2) - 2(f' - mf)rq - 2(f' + mf)tp + 4(f'' - m^2 f)pq = 0.$$

Nous allons étudier celles de ses solutions qui sont de la forme

$$(4)\qquad \xi = e^{k(u-v)}\varpi(w),$$

ϖ étant une fonction inconnue de w, et k une constante. Cette expression de ξ donne

$$\begin{gathered} p = e^{k(u-v)}(\varpi' + k\varpi), \qquad q = e^{k(u-v)}(\varpi' - k\varpi), \\ r = e^{k(u-v)}(\varpi'' + 2k\varpi' + k^2\varpi), \\ s = e^{k(u-v)}(\varpi'' - k^2\varpi), \\ t = e^{k(u-v)}(\varpi'' - 2k\varpi' + k^2\varpi). \end{gathered}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), on trouve

$$(5)\qquad \begin{aligned} &k(k-m)f(\varpi\varpi' - \varpi'^2) - f'\varpi'(\varpi'' - k^2\varpi) \\ &\quad + [f'' + m(k-m)f](\varpi'^2 - k^2\varpi^2) = 0. \end{aligned}$$

8. Occupons-nous d'abord du cas particulier où la constante k est nulle. Pour $k = 0$, la fonction ξ n'est autre que $\varpi(w)$ et l'équation (5) se réduit à

$$(6)\qquad \frac{\xi''}{\xi'} = \frac{f''}{f'} - m^2\frac{f}{f'}.$$

Si donc on pose

$$(7)\qquad \log W(w) = m^2\int\frac{f}{f'}\,dw,$$

on en tire

$$(8)\qquad \xi' = \frac{f'}{W},$$

abstraction faite d'un facteur constant qui correspond (n° 5) à une simple rotation autour de l'axe des z.

Si $m = 0$, hypothèse qui convient aux surfaces de révolution, W peut être pris égal à l'unité et ξ égal à f; on ne néglige ainsi qu'un déplacement. Mais, si l'on pose

$$(9)\qquad \xi = f(w),$$

la formule (15) du n° 5 donne

$$\psi = v - u + h.$$

Appliquant ensuite les formules (16) et (17) du n° 5, avec $h = 0$, on obtient successivement

$$\eta = (v-u)^2 f + \int \frac{f^2}{f'}\,dw, \tag{10}$$

$$-iz = (v-u)f. \tag{11}$$

Des relations (9), (11) et (12) on déduit

$$\xi\eta + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = f\int \frac{f^2}{f'}\,dw = \chi(\xi).$$

La surface obtenue est donc une des surfaces définies par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \chi(x+iy) \tag{12}$$

et qui ont été considérées par M. Demoulin (*Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique;* collection in-8°, t. LVIII, 1898); sous le nom de *surfaces quasi de révolution.* En conséquence, *tout élément linéaire de surface de révolution*

$$ds^2 = 4f^2(u+v)\,du\,dv \tag{13}$$

convient à une surface quasi de révolution, *représentée par les formules*

$$\left\{\begin{aligned} x + iy &= f(u+v),\\ x - iy &= (u-v)^2 f + \int \frac{f^2}{f'}\,d(u+v),\\ z &= -i(u-v)f. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

9. Revenons à la relation (8) et supposons que la constante m ne soit pas nulle, c'est-à-dire que l'élément linéaire (1) convienne à des spirales proprement dites. Appliquant alors la formule (15) du n° 5, on obtient

$$\psi(u,v) = -\frac{W}{m}e^{m(u-v)} + h.$$

Appliquant ensuite les formules (16) et (17) du n° 5, on trouve

$$\eta = \frac{Wf}{m^2} e^{2m(u-v)},$$

$$iz = \frac{f}{m} e^{m(u-v)}.$$

On déduit immédiatement de là

$$\eta = -\frac{Wz^2}{f}.$$

Or, l'équation (8), intégrée, donne

$$(8') \qquad \xi = \int \frac{f'(w)}{W(w)} dw.$$

De la comparaison de ces valeurs de ξ et de η résulte

$$(15) \qquad \frac{x^2+y^2}{z^2} = \chi(x+iy).$$

Les surfaces ainsi définies sont coupées par les plans isotropes $x+iy = \text{const.}$ suivant des paraboles, propriété qui leur est commune avec les surfaces quasi de révolution. Ce sont des *spirales particulières*. Une spirale quelconque étant, en effet, représentée par les formules

$$x = \alpha e^{\lambda\beta} \cos\beta, \qquad y = \alpha e^{\lambda\beta} \sin\beta, \qquad z = e^{\lambda\beta} A(\alpha),$$

si l'on fait $\lambda = -i$, on trouve immédiatement

$$x+iy = \alpha, \qquad x^2+y^2 = z^2 \frac{\alpha^2}{A^2(\alpha)},$$

ce qui donne bien, par élimination de α, la formule (15).

Les surfaces que nous venons de trouver sont entièrement déterminées de forme par leur élément linéaire (1), où l'on peut assigner à m telle valeur non nulle qu'on voudra, $m = -i$ par exemple, ce qui donne

$$(1') \qquad ds^2 = e^{-2i(u-v)} f^2(u+v)\, du\, dv,$$

et par la relation (6), qui devient alors

$$(6') \qquad \frac{\xi''}{\xi'} = \frac{f''}{f'} + \frac{f}{f'};$$

les deux constantes dont dépend l'intégrale générale de cette équation ne sont, en effet, que des constantes de positions. Nous allons identifier ces surfaces avec des spirales que nous avons signalées autrefois (*Comptes rendus*, t. CXII, 1891, p. 1421).

A cet effet, et pour préparer ce qui suivra, nous représenterons une surface spirale par les formules

$$(16) \qquad x = e^{\theta}\rho\cos(\omega + h\theta), \qquad y = e^{\theta}\rho\sin(\omega + h\theta), \qquad z = e^{\theta}\zeta,$$

où ρ, ω et ζ sont des fonctions d'un paramètre w, et d'où résulte

$$(17) \qquad \xi = x + iy = \rho e^{i\omega} e^{(1+ih)\theta}.$$

L'élément linéaire peut s'écrire

$$(18) \qquad ds^2 = e^{2\theta} f^2(w)(dw^2 + d\theta^2).$$

Si l'on établit entre les trois fonctions ζ, ρ et ω les équations

$$(19) \qquad \zeta\zeta' + \rho\rho' + h\rho^2\omega' = 0,$$

$$(20) \qquad \zeta'^2 + \rho'^2 + \rho^2\omega'^2 = f^2,$$

$$(21) \qquad \zeta^2 + (h^2 + 1)\rho^2 = f^2.$$

Effectuant le changement de variables

$$w + i\theta = 2u, \qquad w = u + v,$$

$$w - i\theta = 2v, \qquad i\theta = u - v,$$

qui amène l'élément linéaire (18) à la forme (1'), on voit que w a la signification que nous lui avons toujours donnée et que la coordonnée isotrope ξ a pour expression

$$(22) \qquad \xi = \rho e^{i\omega} e^{(h-i)(u-v)}.$$

Si donc on suppose $h = i$, elle se réduit à une fonction de w, savoir

$$(22') \qquad \xi = \rho e^{i\omega}.$$

Nous voulons identifier l'expression $\xi'' : \xi'$ déduite de cette relation avec le second membre de l'équation (6'). Nous avons ici

$$\frac{\xi''}{\xi'} = i\omega' + \frac{d}{dw}\log(\rho' + i\omega'\rho).$$

Or, quand $h = i$, l'équation (21) donne $\zeta = f$. L'équation (19) devient

$$(19') \qquad \rho' + i\omega'\rho = -\frac{ff'}{\rho}$$

et l'équation (20) donne alors

$$(20') \qquad \frac{\rho' - i\omega'\rho}{\rho} = -\frac{f}{f'} + \frac{f'}{f}.$$

En égard à l'équation (19'), il vient

$$\frac{\xi''}{\xi'} = -\frac{\rho' - i\omega'\rho}{\rho} + \frac{f''}{f'} + \frac{f'}{f};$$

et, en vertu de la relation (20'), le second membre est identique à celui de l'équation (6').

Ajoutons que l'élimination de ϖ' entre les deux relations (19') et (20') conduit à l'équation

$$(23) \qquad 2ff'\rho\rho' + (f^2 - f'^2)\rho^2 + f^2f'^2 = 0,$$

qui est linéaire par rapport à ρ^2, de sorte que ρ s'obtient par quadratures et dépend d'une constante arbitraire. La constante qui s'ajoute à ω n'étant qu'une constante de position, il semblerait qu'on doive trouver une série simplement infinie de spirales particulières ($h = i$) admettant l'élément linéaire (1'). L'analyse précédente montre que la constante dont dépend ρ n'est, elle aussi, qu'une constante de position; il n'y a donc qu'une seule spirale particulière répondant à la question.

10. Reportons-nous à l'équation (5) et supposons maintenant la constante $k \neq 0$. Examinons d'abord le cas des surfaces de révolution. Pour $m = 0$, l'équation (5) se réduit à

$$(24) \qquad k^2 f(\varpi\varpi'' - \varpi'^2) - f'\varpi'(\varpi'' - k^2\varpi) + f''(\varpi'^2 - k^2\varpi^2) = 0.$$

On aperçoit immédiatement qu'elle admet, quel que soit k, la solution

$$(25) \qquad \varpi = f.$$

Or, cette équation est, relativement à la fonction f, qui est donnée, une équation linéaire et homogène du second ordre. Considérons, pour un instant, f comme une fonction inconnue : l'équation (24), dont nous connaissons la solution particulière $f = \varpi$, admet l'intégrale intermédiaire

$$(26) \qquad \frac{\varpi' f - \varpi f'}{\sqrt{\varpi'^2 - k^2 \varpi^2}} = \text{const.} = \frac{ik\lambda}{2},$$

d'où l'on tire

$$(27) \qquad \frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{4ff' - ik\lambda\sqrt{k^2(4f^2 - k^2\lambda^2) - 4f'^2}}{4f^2 - k^2\lambda^2}.$$

La fonction $\xi = \varpi$ est donc déterminée par une quadrature, à un facteur constant près, qui correspond (n° 5) à une rotation autour de l'axe des z. Elle dépend de deux constantes essentielles k et λ.

Nous allons montrer que cette expression de ξ donne les hélicoïdes de Bour. Considérons, en effet, l'hélicoïde défini par les formules

$$(28) \qquad x = \alpha \cos\beta, \qquad y = \alpha \sin\beta, \qquad z = \mathrm{A}(\alpha) + \lambda\beta,$$

d'où résulte

$$\xi = x + iy = \alpha e^{i\beta}.$$

Son élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = (\mathrm{A}'^2 + 1)\,d\alpha^2 + 2\lambda \mathrm{A}'\,d\alpha\,d\beta + (\alpha^2 + \lambda^2)\,d\beta^2.$$

En vue de le ramener à la forme

$$ds^2 = 4f^2(w)\,du\,dv \qquad (w = u + v),$$

nous poserons, k étant une constante arbitraire,

$$\frac{\sqrt{\mathrm{A}'^2\alpha^2 + \alpha^2 + \lambda^2}}{\alpha^2 + \lambda^2}\,d\alpha + i\left(d\beta + \frac{\lambda \mathrm{A}'\,d\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}\right) = 2k\,du,$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{A}'^2\alpha^2 + \alpha^2 + \lambda^2}}{\alpha^2 + \lambda^2}\,d\alpha - i\left(d\beta + \frac{\lambda \mathrm{A}'\,d\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}\right) = 2k\,dv,$$

ce qui revient à

$$(29) \qquad \frac{\sqrt{\mathrm{A}'^2\alpha^2 + \alpha^2 + \lambda^2}}{\alpha^2 + \lambda^2}\,d\alpha = k\,dw,$$

$$(30) \qquad i\,d\beta + i\frac{\lambda \mathrm{A}'\,d\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} = k\,d(u - v).$$

En outre, nous devons établir entre α et w la relation

$$k^2(\alpha^2+\lambda^2) = 4f^2. \tag{31}$$

L'expression de ξ devient alors

$$\xi = \alpha e^{i\beta} = e^{k(u-v)}\varpi(w)$$

et l'on en conclut

$$\frac{d\xi}{\xi} = i\,d\beta + \frac{d\alpha}{\alpha} = k\,d(u-v) + \frac{\varpi'}{\varpi}\,dw.$$

De là et de l'équation (30) résulte

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{d\alpha}{\alpha} - i\frac{\lambda A'\,d\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}. \tag{32}$$

Mais la relation (29) donne

$$\left(\frac{A'\,d\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}\right)^2 = \frac{k^2\,dw^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2+\lambda^2}\left(\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

et de la formule (31) on tire

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{4ff'\,dw}{4f^2-k^2\lambda^2}.$$

Substituant ces deux derniers résultats dans l'équation (32), on retrouve précisément la formule (27). Ainsi les surfaces considérées ont même coordonnée isotrope ξ et même élément linéaire que les hélicoïdes (28) : dès lors, d'après ce que nous avons vu (n° 5), elles leur sont identiques. La valeur particulière $\lambda = 0$ correspond à la solution (25) et aux surfaces de révolution.

Remarque. — Si l'on introduit la dérivée logarithmique $\mathfrak{I}$ de la fonction ϖ, ce qui revient à poser

$$\xi = e^{k(u-v)}\varpi(w) = e^{k(u-v)}e^{\int \mathfrak{I}(w)\,dw} \tag{33}$$

l'équation (5) s'abaisse au premier ordre et devient

$$\begin{aligned}[f'\mathfrak{I} - k(k-m)f]\mathfrak{I}'\\ + [f'\mathfrak{I} - f'' - m(k-m)f](\mathfrak{I}^2 - k^2) = 0.\end{aligned} \tag{34}$$

Elle appartient à un type qui a donné lieu à de nombreux travaux et qui n'est intégrable que dans des cas très particuliers. Pour $m = 0$, nous avons la transformée de l'équation (24), savoir

$$(34') \qquad (f'\mathfrak{J} - k^2 f)\mathfrak{J}' + (f'\mathfrak{J} - f'')(\mathfrak{J}^2 - k^2) = 0.$$

Bien que ses coefficients dépendent d'une fonction f et d'une constante k, arbitraires toutes les deux, son intégrale générale est fournie par la formule (26).

11. Considérons enfin l'équation générale (5), où k et m seront supposés différents de zéro, et mettons-la sous la forme (34), qui lui est strictement équivalente.

Nous savons (n° 7) qu'on y peut donner à m, supposé différent de zéro, telle valeur qu'on veut : nous prendrons $m = -i$ et nous poserons $k = h - i$. Il vient ainsi

$$(35) \quad [f'\mathfrak{J} - h(h-i)f]\mathfrak{J}' + (f'\mathfrak{J} + ihf - f'')[\mathfrak{J}^2 - (h-i)^2] = 0.$$

Nous allons montrer que l'intégrale générale de cette équation donne la série doublement infinie (à cause de h) des surfaces spirales qui admettent l'élément linéaire

$$(1') \qquad ds^2 = e^{-2i(u-v)} f^2(w)\, du\, dv \qquad (w = u + v).$$

Reportons-nous, à cet effet, aux formules (16) et suivantes. Nous avons trouvé

$$(22) \qquad \xi = \rho\, e^{i\omega}\, e^{(h-i)(u-v)},$$

ce qui, par comparaison avec les égalités (33), donne

$$(36) \qquad \frac{\varpi'}{\varpi} = \mathfrak{J} = \frac{\rho'}{\rho} + i\omega'.$$

Or, la fonction ρ et ω sont liées à la fonction ζ par trois équations que nous rappelons ici :

$$(19) \qquad \zeta\zeta' + \rho\rho' + h\rho^2\omega' = 0,$$

$$(20) \qquad \zeta'^2 + \rho'^2 + \rho^2\omega'^2 = f^2,$$

$$(21) \qquad \zeta^2 + (h^2+1)\rho^2 = f^2.$$

De la dernière on tire

$$(21') \qquad \rho^2 = \frac{f^2 - \zeta^2}{h^2+1}.$$

La première donne alors

$$\omega' = -\frac{ff' + h^2\zeta\zeta'}{h(f^2 - \zeta^2)}. \tag{19'}$$

Tout revient donc à la détermination de ζ. Or, si l'on substitue dans l'équation (20) cette valeur de ω', ainsi que celle de ρ et de ρ', après réduction et suppression du facteur $(h^2 + 1)f^2$, commun à tous les termes, on trouve simplement

$$h^2(\zeta'^2 + \zeta^2) = h^2 f^2 - f'^2. \tag{37}$$

C'est, aux notations près, l'équation dont j'ai fait dépendre la déformation des surfaces spirales dans la Note précitée.

Si, d'autre part, on porte dans la relation (36) les valeurs (21') et (19'), on obtient

$$\mathfrak{I} = \frac{h - i}{h} \frac{ff' - ih\zeta\zeta'}{f^2 - \zeta^2}. \tag{38}$$

Nous avons ainsi exprimé $\mathfrak{I}$ au moyen de la fonction ζ, qui est l'intégrale générale de l'équation (37), et de sa dérivée ζ'. Or, si l'on élimine ζ entre les deux équations (37) et (38), on retrouve précisément [1] l'équation (35), ce qui justifie notre assertion.

Toutefois, l'analyse précédente implique essentiellement

$$h^2 + 1 \neq 0.$$

Voyons donc ce qui arrive quand $h^2 + 1$ est nul. Il n'y a pas lieu de faire $h = i$, ce qui entraîne $k = 0$, hypothèse examinée au n° 9 et maintenant exclue. Pour $h = -i$, l'équation (35) devient

$$(f'\mathfrak{I} + 2f)\mathfrak{I}' + (f'\mathfrak{I} + f - f'')(\mathfrak{I}^2 + 4) = 0. \tag{39}$$

---

(1) On n'a qu'à tirer ζ' de l'équation (38) et à la porter dans l'équation (37). Celle-ci, après suppression du facteur $\zeta^2 - f^2$, donne

$$\zeta^2 = \frac{[hf\mathfrak{I} - (h - i)f']^2}{h^2[\mathfrak{I}^2 - (h - i)^2]}.$$

Il n'y a plus qu'à former $\zeta\zeta'$ et à substituer dans l'équation (38). Une fois supprimé le facteur $hf\mathfrak{I} - (h - i)f$, on a l'équation (35) elle-même.

On vérifie sans peine qu'elle admet la solution

$$\vartheta = \frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{f'}{f} - \frac{f}{f'},$$

d'où résulte

$$\xi = e^{-2i(u-v)} f e^{-\int \frac{f}{f'} dw}$$

On a, d'autre part,

$$\varphi = e^{-i(u-v)} f.$$

Si l'on substitue ces deux expressions de ξ et de φ dans la formule (15) du n° 5, on trouve, tous calculs faits,

$$\psi = \frac{-ie^{i(u-v)} f'^2}{f^2 + f'^2} e^{\int \frac{f}{f'} dw}.$$

On en déduit

$$p\left(\psi - \frac{\varphi}{\sqrt{pq}}\right)^2 = q\left(\psi + \frac{\varphi}{\sqrt{pq}}\right)^2,$$

ce qui prouve, en vertu de la formule (16) du n° 5, que la coordonnée isotrope $\eta = x - iy$ ne dépend que de $u + v$. Dès lors, on est ramené au cas particulier qui fait l'objet du n° 9 et l'on trouve les spirales particulières qui y sont définies, car le changement de i en $-i$ est sans importance. Mais la solution que nous venons de considérer n'est qu'une intégrale particulière de l'équation (39), dont l'intégration présente les mêmes difficultés que celle de l'équation (35).

12. En vue d'obtenir d'autres résultats, nous substituerons dans l'équation de déformation

$$(3) \quad f(rt - s^2) - 2(f' - mf)rq - 2(f' + mf)tp + 4(f'' - m^2 f)pq = 0$$

une fonction $\xi(\tau)$ ayant pour argument

$$\tau = \mu(u - v) + \int \vartheta(w)\, dw,$$

où μ est une constante et ϑ une fonction à déterminer. On trouve ainsi, après suppression du facteur $\xi'(\tau)$, commun à tous les termes,

$$(40)\qquad [\mu^2 f \mathfrak{I}' - (f'\mathfrak{I} - m\mu f)(\mathfrak{I}^2 - \mu^2)]\,\xi''(\tau)$$
$$+ [(f'' - m^2 f)(\mathfrak{I}^2 - \mu^2) - (f'\mathfrak{I} + m\mu f)\mathfrak{I}']\,\xi'(\tau) = 0.$$

Remarquons qu'en supposant $\mu = 0$, on serait ramené à un problème qui a été traité aux n^{os} 8 et 9. Nous ferons donc dorénavant $\mu = 1$ et nous distinguerons deux cas, suivant que l'équation (40) se réduit à une identité, ou qu'elle détermine le rapport $\xi'' : \xi'$.

13. Premier cas : *L'équation* (40) *est une identité.* — Les coefficients de ξ'' et de ξ' sont nuls : d'où les deux équations

$$(41)\qquad \left\{ \begin{aligned} f\mathfrak{I}' - (f'\mathfrak{I} - mf)(\mathfrak{I}^2 - 1) &= 0, \\ (f'\mathfrak{I} + mf)\mathfrak{I}' - (f'' - m^2 f)(\mathfrak{I}^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right.$$

On ne peut supposer $\mathfrak{I}' = 0$, $\mathfrak{I} = \pm 1$, parce que τ, et par suite ξ, ne dépendrait que de u ou de v; or, c'est là une solution illusoire (n^o 5, *Remarque*).

Il faut donc égaler à zéro le déterminant des inconnues $\mathfrak{I}'$ et $\mathfrak{I}^2 - 1$, ce qui donne

$$\mathfrak{I}^2 = \frac{ff''}{f'^2}.$$

Dès lors, les deux équations (41) n'en font qu'une, et, si l'on pose

$$(42)\qquad \sigma = \frac{f}{f'},$$

d'où résulte

$$(43)\qquad \mathfrak{I} = \sqrt{1 - \sigma'},$$

en substituant dans la première des équations (41), on trouve

$$\sigma\mathfrak{I}' + \sigma'\mathfrak{I} - m\sigma\sigma' = 0.$$

Par une intégration immédiate on déduit de là

$$(43')\qquad 2\sigma\mathfrak{I} - m\sigma^2 = 2\sqrt{c} \qquad (c = \text{const.})$$

ou bien

$$2\sigma\sqrt{1 - \sigma'} - m\sigma^2 = 2\sqrt{c};$$

d'où finalement

$$(44)\qquad \frac{4\sigma^2\,d\sigma}{(m\sigma^2+2\sigma+2\sqrt{c})(m\sigma^2-2\sigma+2\sqrt{c})}+dw=0,$$

ce qu'on peut écrire

$$(45)\qquad dw=\frac{\sigma\,d\sigma}{m\sigma^2+2\sigma+2\sqrt{c}}-\frac{\sigma\,d\sigma}{m\sigma^2-2\sigma+2\sqrt{c}}.$$

Si $m=0$, l'élément linéaire convient à des surfaces de révolution et l'on a simplement

$$(44')\qquad dw=\frac{\sigma^2\,d\sigma}{\sigma^2-c}.$$

Or, si l'on pose

$$u+v=w,\qquad u-v=i\beta,$$

l'élément linéaire $4f^2(w)\,du\,dv$ devient

$$ds^2=4e^{2\int\frac{dw}{\sigma}}du\,dv=e^{2\int\frac{dw}{\sigma}}(dw^2+d\beta^2).$$

Eu égard à la relation $(44')$, on trouve

$$(46)\qquad ds^2=(\sigma^2-c)\,d\beta^2+\sigma^2\left(d\sqrt{\sigma^2-c}\right)^2.$$

Si la constante c se réduit à zéro, on a l'élément linéaire

$$(47)\qquad ds^2=\sigma^2(d\beta^2+d\sigma^2)$$

des développées des surfaces minima. Si la constante c n'est pas nulle, on pose

$$\sigma^2-c=\frac{r^2}{c},\qquad \beta=\sqrt{c}\,\theta,$$

et l'on arrive à l'élément linéaire

$$(48)\qquad ds^2=r^2\,d\theta^2+\left(\frac{r^2}{c^2}+1\right)dr^2$$

du paraboloïde de révolution dont le paramètre est c.

Supposons maintenant $m \neq 0$. Nous aurons l'élément linéaire

$$ds^2 = 4 e^{2m(u-v)+2\int \frac{dw}{\sigma}} du\, dv, \tag{49}$$

où l'on doit remplacer dw par son expression (45). Rapportons-le aux courbes

$$u - v + \int \mathfrak{S}(w)\, dw = \tau = \text{const.}$$

et à leurs trajectoires orthogonales dont l'équation est

$$u - v + \int \frac{dw}{\mathfrak{S}(w)} = \rho = \text{const.}$$

Il prend la forme

$$ds^2 = \Theta^2 e^{2m\rho}\left(d\rho^2 - \frac{d\tau^2}{\mathfrak{S}^2}\right),$$

si l'on pose

$$\log \Theta = \int \left(\frac{d\mathfrak{S}}{d\sigma} + \frac{\mathfrak{S}}{\sigma} - m\right) \frac{dw}{\mathfrak{S}}.$$

Or, en vertu de la relation (43'), l'élément différentiel est nul ; donc Θ est une constante, à laquelle on peut attribuer telle valeur que l'on veut, m par exemple. Il vient alors

$$ds^2 = (de^{m\rho})^2 - \frac{m^2 e^{2m\rho}}{\mathfrak{S}^2} d\tau^2.$$

Mais les relations qui définissent τ et ρ, rapprochées des formules (43) et (43'), donnent

$$d(\rho - \tau) = \frac{1 - \mathfrak{S}^2}{\mathfrak{S}} dw = \frac{d\sigma}{\mathfrak{S}} = \frac{2\sigma\, d\sigma}{m\sigma^2 + 2\sqrt{c}}.$$

On en conclut

$$m\sigma^2 + 2\sqrt{c} = \mu e^{m(\rho-\tau)} \qquad (\mu = \text{const.}).$$

On connaît donc σ^2, par suite aussi $\mathfrak{S}^2$, en fonction de $\rho - \tau$, et il vient

$$ds^2 = (de^{m\rho})^2 - \frac{4}{m\mu^2}\left[\mu e^{m(\rho-\tau)} - 2\sqrt{c}\right](de^{m\tau})^2.$$

Une dernière substitution

$$e^{m\rho} = \alpha, \qquad e^{m\tau} = -\frac{m\mu}{4}\beta$$

donne finalement

$$(49') \qquad ds^2 = d\alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{m\sqrt{c}}{2}\right) d\beta^2.$$

M. Goursat a démontré (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. V) qu'on peut, pour une infinité de valeurs de la constante qui figure dans cet élément linéaire, obtenir par quadratures *toutes* les surfaces qui l'admettent et, en particulier, celles qui sont des surfaces spirales.

Les éléments linéaires (47), (48) et (49') conviennent à des surfaces réglées à plan directeur isotrope ($x + iy = 0$), et les déformations dépendant d'une fonction arbitraire que nous rencontrons ici sont celles dans lesquelles ces surfaces restent réglées.

14. Second cas : *L'équation* (40) *n'est pas une identité.* — Puisque μ est supposé différent de zéro, la fonction ξ dépend de $u - v$. Or, l'équation (40), quand elle ne se réduit pas à une identité, donne pour le rapport $\xi'' : \xi'$ une valeur indépendante de $u - v$. Il faut donc que ce rapport se réduise à une constante k. Si cette constante n'est pas nulle, on est ramené au problème qui a été traité au n° **10**. Il ne nous reste donc à examiner que l'hypothèse $\xi'' = 0$, en vertu de laquelle l'équation (40), où l'on fait $\mu = 1$, se réduit à

$$(50) \qquad (f'\mathfrak{I} + mf)\mathfrak{I}' - (f'' - m^2 f)(\mathfrak{I}^2 - 1) = 0.$$

D'après une remarque antérieure (n° **5**), au lieu de prendre pour ξ une fonction linéaire de τ, on peut prendre $\xi = \tau$, c'est-à-dire

$$\xi = u - v + \int \mathfrak{I}\, dw;$$

on ne néglige ainsi qu'un déplacement de la surface. Tout revient donc à déterminer $\mathfrak{I}$. Or, l'intégration de l'équation (50) ne semble pas possible quand m est différent de zéro. Au contraire, quand $m = 0$, on en tire immédiatement

$$(51) \qquad \mathfrak{I}^2 - 1 = n^2 f'^2 \qquad (n = \text{const.});$$

par suite, on a

$$\xi = u - v + \int \sqrt{1 + n^2 f'^2(w)\, dw}. \tag{52}$$

La constante d'intégration n doit être supposée différente de zéro, sans quoi ξ, ne dépendant que de u ou que de v, serait une solution illusoire.

Si l'on substitue l'expression (52) de ξ dans la formule (15) du n° 5, on trouve, tous calculs faits,

$$\psi(u, v) = -\frac{u - v + W}{n},$$

en posant

$$W = \int \frac{ff''\, dw}{f'^2 \sqrt{1 + n^2 f'^2}}. \tag{53}$$

Appliquant alors les formules (16) et (17) du n° 5, avec $h = 0$, on trouve successivement

$$\begin{aligned} n^2 \eta = \frac{(u-v)^3}{3} &+ \left(W + \mathfrak{I} \frac{f}{f'}\right)(u - v)^2 \\ &+ \left(W^2 + 2W\mathfrak{I}\frac{f}{f'} + \frac{f^2}{f'^2}\right)(u - v) \\ &+ \int \left(\mathfrak{I} W^2 + 2W \frac{f}{f'} + \mathfrak{I}\frac{f^2}{f'^2}\right) dw, \end{aligned} \tag{54}$$

$$niz = \frac{(u-v)^2}{2} + \left(W + \mathfrak{I}\frac{f}{f'}\right)(u - v) + \int \left(\mathfrak{I} W + \frac{f}{f'}\right) dw. \tag{55}$$

Les équations (52), (54) et (55), où $\mathfrak{I}$ et W sont définis par les relations (51) et (53), représentent, à cause de la constante n qui y figure, une série simplement infinie de surfaces admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = 4 f^2(w)\, du\, dv \qquad (w = u + v)$$

d'une surface de révolution quelconque. Ces surfaces sont engendrées par des cubiques gauches ($w = \text{const.}$).