

BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DE MONTESSUS

Recherche effective des racines réelles des séries hypergéométriques

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 101-108

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__101_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**RECHERCHE EFFECTIVE DES RACINES RÉELLES
DES SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES;**

PAR M. R. DE MONTESSUS (¹).

Soit à résoudre l'équation

$$0 = F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = 1 - \frac{\alpha\beta}{1\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} x^2 - \dots$$

La série $F(\alpha, \beta, \gamma, -x)$ converge si $-1 < x < 1$; elle prend une valeur positive si $x < 0$; nous avons donc simplement à calculer les racines comprises entre 0 et 1.

(¹) Cf. KLEIN, *Mathematische Annalen*, t. XXXVII. — HURWITZ, *Ibid.*, t. XXXVIII et XLIV. — HILBERT, *Journal de Crelle*, t. CHI. — STIELTJES, *Comptes rendus*, t. C. — R. DE MONTESSUS, *Ibid.*, 1909.

Rappelons quelques formules ⁽¹⁾ :

- (I) $\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x),$
- (II) $\alpha(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) + [\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x]F(\alpha, \beta, \gamma, x) - (\gamma - \alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma, x) = 0,$
- (III) $\gamma[\alpha - (\gamma - \beta)x]F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \alpha\gamma(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)x F(\alpha, \beta, \gamma+1, x) = 0,$
- (IV) $\gamma(\gamma-1)(x-1)F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) + \gamma[\gamma-1 - (2\gamma - \alpha - \beta - 1)x] \times F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\gamma - \alpha)(\gamma + \beta)x F(\alpha, \beta, \gamma+1, x) = 0,$
- (V) $F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = -\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x),$
- (VI) $F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\beta x}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x).$

Nous allons appliquer à l'équation proposée le théorème de Sturm, sous la forme généralisée qu'en donnent les Traités d'Algèbre moderne; il suffit de supposer que le premier membre de l'équation proposée est continu, ce qui a lieu ici, dans les limites de convergence de la série.

Nous aurons à faire diverses hypothèses sur l'ordre des grandeurs réciproques et sur les signes de α, β, γ .

HYPOTHÈSE I. — $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < \gamma$.

Ici, $1 > \frac{\alpha\beta}{1\gamma}$ et, *a fortiori*, x étant moindre que 1,

$$(1) \quad 1 > \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x;$$

considérons les deux termes consécutifs

$$u_{2n} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+2n-1)}{1.2.3\dots 2n\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+2n-1)} x^{2n},$$

$$u_{2n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2n-1)(\alpha+2n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+2n-1)(\beta+2n)}{1.2.3\dots 2n(2n+1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)}$$

(1) GAUSS, *Werke*, B. III : *Disquisitiones*, etc.

de la série; leur rapport a pour expression

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{(\alpha + 2n)(\beta + 2n)}{(1 + 2n)(\gamma + 2n)} x;$$

or, puisque

$$\frac{\alpha}{1} < 1, \quad \frac{\beta}{\gamma} < 1,$$

on a aussi

$$\frac{\alpha + 2n}{1 + 2n} < 1, \quad \frac{\beta + 2n}{\gamma + 2n} < 1 \quad (\alpha < 1, \beta < \gamma)$$

et, x étant moindre que 1,

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{\alpha + 2n}{1 + 2n} + \frac{\beta + 2n}{\gamma + 2n} x < 1,$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad u_{2n+1} < u_{2n};$$

la série pouvant s'écrire

$$F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{1\gamma} x\right) + (u_2 - u_1) + (u_4 - u_3) + \dots + (u_{2n} - u_{2n-1}) + \dots,$$

il résulte des inégalités (1) et (2) que l'équation

$$F(\alpha, \beta, \gamma, -x) = 0$$

n'a pas de racines réelles dans son domaine de convergence si $\alpha < 1$, $\beta < \gamma$; alors, quel que soit x , compris entre -1 et $+1$,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, -x) > 0.$$

HYPOTHÈSE II. — $0 < \alpha < 1$, $\beta > \gamma > 0$.

THÉORÈME. — *La suite*

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}, \\ F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x), \quad \dots, \quad F(\alpha, \beta, \gamma + p, x), \\ \gamma + p - 1 < \beta < \gamma + p \end{array} \right.$$

est une suite de Sturm, sous réserve de changer les signes de quelques-uns de ses termes.

Nous venons de voir que $F(\alpha, \beta, \gamma + p, x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle de convergence $(-1, +1)$ de la série.

On sait de plus (IV) que

$$(A) \quad (\gamma + h)(\gamma + h - 1)(x - 1)F(\alpha, \beta, \gamma + h - 1, x) \\ + (\gamma + h)[\gamma + h - 1 - (2\gamma - \alpha - \beta + 2h - 1)x]F(\alpha, \beta, \gamma + h, x) \\ + (\gamma - \alpha + h)(\gamma - \beta + h)x F(\alpha, \beta, \gamma + h + 1, x) = 0;$$

établissons maintenant une relation entre

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}, \quad F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x);$$

d'après la formule (I), on a

$$\frac{\gamma}{\alpha\beta} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x);$$

donc, en vertu de l'équation (V),

$$-\frac{x}{\gamma - 1} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = -\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma + 1)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x) \\ = F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x);$$

exprimant $F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x)$ à l'aide de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x)$, par la formule (IV), il viendra

$$(B) \quad \gamma(1 - x)F'(\alpha, \beta, \gamma, x) + \gamma(\gamma - \alpha - \beta)F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ - (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) = 0.$$

De cette relation, on déduit sans peine une relation entre

$$F'(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x);$$

on a, en effet, d'après la relation (IV),

$$(\gamma + 1)\gamma(1 - x)F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ = (\gamma + 1)[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x]F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) \\ + (\gamma - \alpha + 1)(\gamma - \beta + 1)x F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x);$$

portant cette valeur de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ dans (A), il viendra

$$(C) \quad (\gamma + 1)\gamma(1 - x)^2 F'(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ - [\alpha\beta - (\gamma - \alpha - \beta)\gamma^2 + (\gamma - \alpha - \beta)(\gamma + 1)(2\gamma - \alpha - \beta + 1)x] \\ \times F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x) + (\gamma - \alpha - \beta)(\gamma - \alpha + 1)(\gamma - \beta + 1)x \\ \times F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x) = 0.$$

En vertu des relations (A), (B) et (C), la suite $\{S_i\}$ est bien une suite de Sturm.

HYPOTHÈSE III. — $\alpha > 1$, $\beta > \gamma > 0$.

THÉORÈME. — La suite

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad \frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}, \\ F(\alpha-1, \beta, \gamma, x), \quad F(\alpha-2, \beta, \gamma, x), \quad \dots, \quad F(\alpha-i, \beta, \gamma, x), \\ F(\alpha-i, \beta, \gamma+1, x), \quad F(\alpha-i, \beta, \gamma+2, x), \quad \dots, \quad F(\alpha-i, \beta, \gamma+h, x), \\ 0 < \alpha-i < 1, \quad \gamma+h-1 < \beta < \gamma+h \end{array} \right.$$

est une suite de Sturm, sous réserve de changer les signes de quelques-uns de ses termes, ces changements résultant d'ailleurs du simple examen des termes de la suite (1).

Il nous suffit d'établir qu'il existe une relation de récurrence linéaire entre chacun des termes de cette suite.

Les formules (II) et (VI) donnent

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{x\beta} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) &= F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x), \\ \frac{\beta x}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) &= F(\alpha+1, \beta, \gamma) - F(\alpha, \beta, \gamma, x); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{x}{\alpha} F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha+1, \beta, \gamma) - F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

eu égard à la relation (II),

$$\begin{aligned} \alpha(x-1)F(\alpha+1, \beta, \gamma) \\ = [\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x]F(\alpha, \beta, \gamma, x) - (\gamma - \alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma, x); \end{aligned}$$

on en déduit

$$(D) \quad \begin{aligned} (x-1)x F'(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ - (\gamma - \alpha - \beta)F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\gamma - \alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma, x). \end{aligned}$$

Mais (II) donne

$$\begin{aligned} (\alpha-1)(x-1)F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= [\gamma - 2\alpha + 2 - (\beta - \alpha + 1)x] \\ &\quad \times F(\alpha-1, \beta, \gamma) + (\gamma - \alpha + 1)F(\alpha-2, \beta, \gamma, x). \end{aligned}$$

(1) On pourra voir à ce propos : R. DE MONTESSUS, *De l'usage pratique du théorème de Sturm* (N. A., 1909).

Substituons dans (D); il vient

$$(E) \quad (x-1)^2(\alpha-1)x \frac{dF}{dx} \\ = \{[(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1) - \beta(\gamma-2\alpha+2)] - \beta(\gamma-\beta-1)x\} \\ \times F(\alpha-1, \beta, \gamma, x) - (\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+1)F(\alpha-2, \beta, \gamma, x);$$

ensuite la formule (II) donne

$$(F) \quad (\alpha-2)(x-1)F(\alpha-1, \beta, \gamma) \\ = [\gamma-2\alpha+4 - (\beta-\alpha+2)x] \\ \times F(\alpha-2, \beta, \gamma, x) - (\gamma-\alpha+2)F(\alpha-3, \beta, \gamma, x),$$

et ainsi de suite. Si $\beta < \gamma$, nous arrêterons la suite à

$$F(\alpha-i, \beta, \gamma, x), \quad 0 < \alpha-i < 1;$$

sinon, nous prendrons (S_2) en entier.

Il nous faut alors de nouvelles relations de récurrence.

D'après l'équation (III) nous avons

$$\gamma[\alpha-i-(\gamma-\beta)x]F(\alpha-i, \beta, \gamma, x) - (\alpha-i)\gamma(1-x) \\ \times F(\alpha-i+1, \beta, \gamma, x) + (\gamma-\alpha+i)(\gamma-\beta)x F(\alpha-i, \beta, \gamma+1, x) = 0$$

et, d'après la relation (IV),

$$(G) \quad (\gamma+p)(\gamma+p-1)(x-1)F(\alpha-i, \beta, \gamma+p-1, x) \\ + (\gamma+p)[\gamma+p-1 - (2\gamma+2p-\alpha+i-\beta-1)x] \\ \times F(\alpha-i, \beta, \gamma+p, x) + (\gamma+p-\alpha+i)(\gamma+p-\beta)x \\ \times F(\alpha-i, \beta, \gamma+p+1, x) = 0,$$

la proposition est démontrée.

HYPOTHÈSE IV. — L'un au moins des nombres α, β, γ est négatif.

Nous avons la formule bien connue

$$(x-x^2) \frac{d^2 F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx^2} \\ + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} - \alpha\beta F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 0$$

et, par dérivation,

$$(x-x^2) \frac{d^3 F}{dx^3} + [1 + \gamma - (\alpha + \beta + 3)x] \frac{d^2 F}{dx^2} - (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) \frac{dF}{dx} = 0, \\ \dots\dots\dots$$

Nous prendrons

$$(\sigma) \quad F, \quad \frac{dF}{dx}, \quad \frac{d^2F}{dx^2}, \quad \frac{d^3F}{dx^3}, \quad \dots, \quad \frac{d^n F}{dx^n}$$

comme premiers termes d'une suite de Sturm; nous nous arrêtons à l'indice n , défini comme suit.

On a

$$(I) \quad \frac{dF}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d^2F}{dx^2} &= \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2 F(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma + 1, x), \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{d^n F}{dx^n} &= \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, x); \end{aligned}$$

et nous choisirons n de manière qu'on ait

$$\alpha + n > 0, \quad \beta + n > 0, \quad \gamma + n > 0;$$

nous prolongerons alors la suite (σ) comme il suit :

1° Si $\alpha + n > 1$, nous lui adjoindrons

$$(\sigma_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha + n - 1, \beta + n, \gamma + n, x), \\ F(\alpha + n - 2, \beta + n, \gamma + n, x), \\ \dots\dots\dots, \\ F(\alpha + n - p, \beta + n, \gamma + n, x), \\ 0 < \alpha + n - p < 1; \end{array} \right.$$

dans le cas où $p + n$ est $< \gamma + n$, (σ) , (σ_1) est une suite de Sturm complète, car $F(\alpha + n - p, \beta + n, \gamma + n, x)$ ne change pas de signe quand x varie de -1 à $+1$. Si $\beta + n > \gamma + n$, il faudra prolonger (σ_1) par la suite

$$(\sigma_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha + n - p, \beta + n, \gamma + n + 1, x), \\ F(\alpha + n - p, \beta + n, \gamma + n + 2, x), \\ \dots\dots\dots, \\ F(\alpha + n - p, \beta + n, \gamma + n + q, x), \\ \gamma + n + q - 1 < \beta + n < \gamma + n + q \end{array} \right.$$

et la suite (σ_1) , (σ_2) , (σ_3) sera une suite de Sturm complète.

2° Si $\alpha + n < 1$, mais $\beta + n > \gamma + n$, nous adjoindrons à (σ)

la suite

$$(\sigma_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n + 1, x), \\ F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n + 2, x), \\ \dots\dots\dots, \\ F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n + k, x), \\ \gamma + n + k - 1 < \beta + n < \gamma + n + k, \end{array} \right.$$

et (σ) , (σ_3) sera une suite de Sturm complète.

3° Enfin, si $\alpha + n < 1$, $\beta + n < \gamma + n$, la série

$$F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, x)$$

ne change pas de signe quand x varie de -1 à $+1$, et (σ) est une suite de Sturm complète pour $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Nous avons écrit les relations de récurrence liant les termes de (σ) . Les relations de récurrence qui lient (σ) à (σ_1) ou à (σ_3) s'écrivent sans peine; celles qui lient (σ_1) à (σ_2) également.

Les suites de Sturm indiquées résolvent le problème du calcul effectif des racines de la série hypergéométrique.
