J. DRACH

Sur les systèmes complètement orthogonaux de l'espace euclidien à n dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 85-126

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__85_1>

SUR LES SYSTÈMES COMPLÈTEMENT ORTHOGONAUX DE L'ESPACE EUCLIDIEN A n DIMENSIONS;

PAR M. JULES DRACH.

La première Partie de ce travail est consacrée à une étude *directe*

---

série analogue à (14), où figure, au lieu de la quantité $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \mathcal{E}(\sqrt{2x})$, l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$.

de la généralité de la solution la plus étendue du système

$$\text{(A)} \qquad (i, k) = \mathrm{S}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0 \qquad (i \neq k = 1, \ldots, n)$$

qui définit les systèmes complètement orthogonaux de l'espace à n dimensions.

Une première détermination de cette généralité résulte de ce qu'on peut déduire des équations (A) et de leurs conséquences *une seule expression de toutes les dérivées des y par rapport aux x, exprimées à l'aide des seules dérivées*

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i\,\partial x_\lambda^{p-1}},$$

où $i \leqq \lambda$. Ces dernières, qui sont alors les *dérivées paramétriques* de MM. Méray et Riquier, peuvent seules être prises arbitrairement en un point $x_{i0}\,(i = 1, \ldots, n)$. Elles se groupent d'ailleurs immédiatement en fonctions arbitraires : on peut prendre arbitrairement les fonctions des deux variables x_i, x_λ auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\,(i < \lambda)$ quand on fixe toutes les variables sauf x_i et x_λ, et aussi les fonctions d'une seule variable auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ quand on y fixe toutes les variables sauf x_λ.

Une seconde détermination de la généralité possible de la solution la plus étendue du système (A) résulte de ce qu'en différentiant une seule fois on obtient les deux systèmes

$$(\alpha) \qquad (i, kl) = 0 \qquad (i \neq k \neq l),$$

$$(\beta) \qquad (i, ki) + (i^2, k) = 0.$$

On fixe aisément la généralité de la solution la plus étendue du système (α) : cette solution dépend de $n(n-1)$ fonctions arbitraires de deux variables.

On conclut seulement de là les équations du premier ordre

$$(i, k) = \mathrm{F}_{i,k}(x_i, x_k),$$

et l'on montre que, pour annuler ces fonctions $\mathrm{F}_{i,k}$, il est nécessaire et suffisant d'ajouter $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition qui lient deux à deux les $n(n-1)$ fonctions arbitraires obtenues.

On retrouve ainsi les résultats de la première détermination ([1]).

La seconde Partie du présent travail a pour but l'étude systématique des divers groupes d'équations qui se présentent quand on recherche les conditions pour qu'une relation

$$u = f(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

définisse une famille de surfaces appartenant à un système complètement orthogonal.

On rencontre d'abord les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations du *premier groupe* de M. Darboux.

Une étude préalable des conséquences des relations

$$\sum u_i v_i = 0, \qquad \sum v_i w_i = 0, \qquad \sum u_{ik} v_i w_k = 0,$$

qui définissent les rapports des w_i, v_i, etc., nous permet de classer les conditions d'intégrabilité des équations de ce premier groupe, qui sont en apparence en nombre $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$.

([1]) Ces deux démonstrations faisaient partie, ainsi d'ailleurs que la seconde Partie du travail actuel, d'un *Mémoire sur les systèmes orthogonaux de l'espace à n dimensions* qui a obtenu en 1899 une mention très honorable dans le Concours du prix Bordin.

Ce Mémoire donnait également de la question précédente trois autres solutions, le résultat étant obtenu comme application des méthodes générales dues à MM. Méray, Riquier et Delassus : 1° au système (A) qui définit les y au moyen des x; 2° au système qui définit les éléments β_{ik}, introduits par M. Darboux, au moyen des x; la troisième solution, presque immédiate, était basée sur la considération du *système auxiliaire*.

Tous ces résultats paraîtront sous peu, à part.

J'ajouterai encore qu'une autre partie du Mémoire considéré comprenait l'étude de la solution la plus générale de l'équation

$$ds^2 = \sum^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k = \mathrm{H}_1(\rho_1, \ldots, \rho_n)\, d\rho_1^2 + \ldots + \mathrm{H}_n(\rho_1, \ldots, \rho_n)\, d\rho_n^2.$$

On y démontrait que, *dans le cas où elle est la plus étendue,* elle comporte $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux variables, et l'on déterminait tous les cas où une solution de cette étendue existe. Ces cas comprenant évidemment celui de l'espace *euclidien,* on a ainsi une sixième détermination de la généralité possible de la solution de (A).

Ce dernier travail paraîtra également sous peu dans un autre recueil [*cf.* à ce sujet une Note (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1898)].

Elles se partagent en deux catégories d'égal nombre; les unes sont des *identités, les autres sont les équations du second groupe* de M. Darboux [1], qui expriment que *les lignes de courbure de chaque surface individuelle* $u =$ const. *sont coordonnées :*

$$\sum u_{ikl} v_i w_k t_l = 0.$$

Ces dernières équations sont donc *en général* des conséquences des premières. On fixe aisément les cas d'exception : ils résultent de ce que les conditions d'intégrabilité des équations du premier groupe sont des produits de deux facteurs, dont l'un dépend des racines de l'équation en λ qui définit les lignes de courbure de la surface $u =$ const.; ce n'est que si ce facteur est différent de zéro que le second $\sum u_{ikl} v_i w_k t_l$ s'annule nécessairement.

M. Darboux avait été amené à ajouter le *second groupe* par la considération *des surfaces parallèles* pour lesquelles le premier groupe disparaît. On montre aisément que dans ce cas tous les facteurs autres que les $\sum u_{ikl} v_i w_k t_l$ sont nuls; les équations du second groupe ne peuvent plus se déduire du premier. Le paradoxe apparent est ainsi expliqué.

I. — Généralité possible des systèmes complètement orthogonaux de l'espace euclidien a n dimensions.

1. *Première démonstration.* — Soit à étudier le système

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0,$$

où i et k sont deux nombres différents de la suite $1, 2, \ldots, n$.

Nous montrerons d'abord qu'*on peut résoudre ces équations* (A) *par rapport aux dérivées* $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$, *où* λ *est inférieur à* i.

---

[1] *Cf.* Darboux, *Sur les surfaces orthogonales* (*Annales de l'École Normale,* 1re série, t. III, 1866); Mémoire *sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale,* 2e série, t. VII, 1878); *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes,* Livre I, Chap. VI, p. 119.

Les équations (A) possèdent la solution évidente

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

nous ferons remarquer tout de suite que *toute fonction des y et de leurs dérivées qui ne s'annule pas pour cette solution ne peut s'annuler en vertu des équations* (A) *et de leurs conséquences.* Cette remarque nous sera très utile.

Écrivons maintenant les équations (A) dans l'ordre suivant :

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \ldots \qquad = 0,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_1}\frac{\partial y_3}{\partial x_3} + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_3} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial y_3}{\partial x_2}\frac{\partial y_3}{\partial x_3} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire en prenant successivement pour (i, k) les groupes $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$; $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$; ... qui conduisent respectivement à 1, 2, 3, ... équations.

La première équation est résoluble par rapport à $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}$, car le coefficient de cette dérivée devient égal à l'unité pour

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les deux suivantes ne renferment, avec la dérivée déjà calculée $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}$, que deux dérivées à calculer $\frac{\partial y_1}{\partial x_3}$ et $\frac{\partial y_2}{\partial x_3}$; le déterminant fonctionnel relatif à ces éléments se réduit pour

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

à sa diagonale principale et, par suite, à l'unité. Ces deux équations permettent donc de calculer les dérivées considérées.

Ce raisonnement se poursuit manifestement sans modification et la proposition annoncée est établie.

2. Considérons maintenant le système obtenu en différentiant une seule fois les équations (A); nous établirons qu'*il est résoluble par rapport aux dérivées* $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k}$ $(\lambda \neq i \neq k)$ *et aux déri-*

vées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda}$, *où* λ *est inférieur à* i, puisqu'il donne une seule expression pour chacune de ces dérivées.

Différentions d'abord l'équation

$$(i, k) = \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0$$

par rapport à une lettre x_h différente de x_i et de x_k; nous aurons

$$\mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} + \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_k \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} = 0.$$

Les équations de cette forme sont en nombre $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$; considérons toutes celles où les dérivations sont relatives aux trois lettres x_i, x_h, x_k; elles peuvent s'écrire symboliquement

$$\begin{gathered}(ih, k) + (i, hk) = 0,\\ (hk, i) + (h, ki) = 0,\\ (hi, k) + (k, ih) = 0,\end{gathered}$$

et donnent, par conséquent,

$$(ih, k) = 0,$$

c'est-à-dire, pour trois lettres différentes x_i, x_h, x_k,

$$(\alpha) \qquad \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0.$$

On a, d'autre part, en différentiant les équations (A) par rapport à l'une des lettres x_i, x_k qui y figurent, les équations

$$(\beta) \qquad \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} + \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} = 0.$$

Considérons, parmi les équations (α), celles où les indices i et h ont la même valeur; elles sont en nombre $(n-2)$ et déterminent d'une seule manière toutes les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h}$ $(\lambda \neq i, h)$ au moyen des deux dérivées $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i \partial x_h}$, $\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_h}$ et des dérivées premières. Montrons-le par exemple sur le cas $i = 1$, $h = 2$; le déterminant des coefficients des dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_1 \partial x_2}$ est manifestement le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(y_3, \ldots, y_n)}{\partial(x_3, \ldots, x_n)}$; il se réduit donc à l'unité quand on y fait $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et ne peut s'annuler en vertu des équations (A).

Les équations (α) *déterminent par suite d'une seule manière toutes les dérivées* $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \, \partial x_h}$ $(\lambda \neq i \neq h)$.

Supposons qu'on porte les expressions des dérivées que nous venons de calculer dans les équations (β); les seules dérivées du second ordre qui pourront encore figurer dans ces dernières ont la forme $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \, \partial x_\lambda}$; nous allons montrer que *les* $n(n-1)$ *équations obtenues sont résolubles par rapport aux dérivées* $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \, \partial x_\lambda}$, *où* λ *est inférieur à* i, *dérivées qui sont aussi en nombre* $n(n-1)$.

Posons d'abord, suivant la notation adoptée,

$$(ih, i) = \mathrm{S}_\lambda \frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \, \partial x_h} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i};$$

les équations (α), où figurent les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \, \partial x_h}$, permettront de calculer les (ih, i). On trouvera, sans difficulté,

$$(ih, i)\, \Delta_{i,h} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i \, \partial x_h} \theta^i_{i,h} + \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \, \partial x_h} \theta^i_{h,i},$$

en posant

$$\Delta_{i,h} = \Delta_{h,i} = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{h-1}, y_{h+1}, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)},$$

$$\theta^i_{i,h} = \frac{\partial(y_i, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{h-1}, y_{h+1}, \ldots, y_n)}{\partial(x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)},$$

$$\theta^i_{h,i} = \frac{\partial(y_h, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{h-1}, y_{h+1}, \ldots, y_n)}{\partial(x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)},$$

ou encore plus simplement

$$(ih, i) = \mu^i_{i,h} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i \, \partial x_h} + \mu^i_{h,i} \frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \, \partial x_h}$$

avec

$$\mu^i_{i,h} = \frac{\theta^i_{i,h}}{\Delta_{i,h}}.$$

Passons maintenant à l'examen des équations (β),

$$(\beta)\qquad (i^2, h) + (ih, i) = 0,$$

et groupons-les comme nous l'avons fait pour les équations (A), c'est-à-dire en prenant successivement pour (i, h) les combinaisons $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$; ....

Le premier groupe renferme les deux équations

$$(1^2, 2) + (12, 1) = 0,$$
$$(2^2, 1) + (21, 2) = 0,$$

qui s'écrivent aussi

$$(1^2, 2) + \mu^1_{1,2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\, \partial x_2} + \mu^1_{2,1} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\, \partial x_2} = 0,$$
$$(2^2, 1) + \mu^2_{1,2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\, \partial x_2} + \mu^2_{2,1} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\, \partial x_2} = 0;$$

sous cette forme on reconnaît qu'elles ne contiennent que deux des dérivées à calculer $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\, \partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}$. La première équation donne $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\, \partial x_2}$, puisque le coefficient de cette dérivée se réduit à l'unité pour $y_i = x_i\,(i = 1, \ldots, n)$, et la seconde donne ensuite $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}$.

Un raisonnement analogue peut se faire sur le second groupe, formé de quatre équations :

$$(1^2, 3) + (13, 1) = 0,$$
$$(2^2, 3) + (23, 2) = 0,$$
$$(3^2, 1) + (31, 3) = 0,$$
$$(3^2, 2) + (32, 3) = 0,$$

qui renferment les quatre dérivées nouvelles à calculer :

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\, \partial x_3},\quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2\, \partial x_3},\quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2},\quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2};$$

les deux premières ne renferment que deux dérivées nouvelles, et pour $y_i = x_i\,(i = 1, \ldots, n)$ le déterminant de leurs coefficients se réduit à sa diagonale principale formée d'éléments égaux à l'unité; les deux dernières équations donneront ensuite $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2}$ et $\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2}$, et la même remarque s'applique au déterminant de leurs coefficients.

Tout cela peut d'ailleurs se répéter *mutatis mutandis* pour les groupes suivants, chaque groupe

$$(1, h), \quad (2, h), \quad \ldots, \quad [(h-1), h]$$

donnant lieu aux deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{ll} (1^2, h) + (1h, 1) = 0, & (h^2, 1) + (h1, h) = 0, \\ (2^2, h) + (2h, 2) = 0, & (h^2, 2) + (h2, h) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [(h-1)^2, h] + [(h-1)h, (h-1)] = 0, & [h^2, (h-1)] + [h(h-1), h] = 0, \end{array}$$

auxquels s'appliquent les mêmes remarques.

La proposition annoncée est donc établie.

3. Nous venons de voir que les équations du second ordre (α) et (β) déduites du système (A) sont résolubles par rapport à toutes les dérivées du second ordre, sauf les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda}$, pour lesquelles i est inférieur ou égal à λ; nous allons montrer qu'en passant au troisième ordre on pourra calculer toutes les dérivées troisièmes des y sauf les dérivées

$$\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^3}, \quad \frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^2 \partial x_\lambda}, \quad \frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda^2},$$

pour lesquelles i est inférieur ou égal à λ. *Ce résultat établi pourra s'étendre alors à tous les ordres de dérivation.*

Différentions, par conséquent, les équations du second ordre

$$(\alpha) \qquad (ih, k) = 0,$$

$$(\beta) \qquad (ii, k) + (ik, i) = 0$$

une fois encore.

Les équations (α) donnent d'abord

$$(a) \qquad (ihl, k) + (ih, kl) = 0 \qquad (i \neq h \neq k \neq l),$$

$$(b) \qquad (ih^2, k) + (ih, kh) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

$$(c) \qquad (ihk, k) + (ih, k^2) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

et nous en déduirons immédiatement toutes les dérivées des y relatives à trois lettres différentes. En joignant, en effet, $(n-3)$

des équations (a) à trois équations du groupe (c), on a le Tableau

$$\begin{aligned}
&(ihl, k) + (ih, kl) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n \text{ sauf } i, h, l),\\
&(ihl, i) + (hl, i^2) = 0,\\
&(ihl, h) + (il, h^2) = 0,\\
&(ihl, l) + (ih, l^2) = 0,
\end{aligned}$$

et le déterminant des dérivées $\dfrac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l}$ se réduit à l'unité pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$, tous les éléments de sa diagonale principale devenant égaux à l'unité et tous les autres s'annulant.

Différentions maintenant, de toutes les manières possibles, les équations (β); elles donneront

$$\begin{aligned}
&(a') \quad (i^2 h, k) + (i^2, kh) + (ikh, i) + (ik, ih) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),\\
&(b') \quad (i^2 k, k) + (i^2, k^2) + (ik^2, i) + (ik, ik) = 0 \qquad (i \neq k),\\
&(c') \qquad\qquad (i^3, k) + 2(i^2, ki) + (i^2 k, i) = 0 \qquad (i \neq k).
\end{aligned}$$

Les équations (a') sont satisfaites en vertu des équations (b) et (c); il ne reste donc à examiner que les équations (b') et (c') avec celles du groupe (b) déjà formé.

Considérons les équations du groupe (b),

$$(b) \qquad (ik^2, h) + (ik, kh) = 0,$$

où i et k ont la même valeur; elles sont en nombre $(n - 2)$ et déterminent les dérivées $\dfrac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k^2} (\lambda \neq i \neq k)$ au moyen des deux dérivées troisièmes

$$\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_i \partial x_k^2}, \quad \frac{\partial^3 y_k}{\partial x_i \partial x_k^2}$$

et de dérivées d'ordre inférieur. [Le déterminant des inconnues se réduit toujours à l'unité pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$.]

Passons aux groupes (b') et (c'). Nous remarquerons que les équations (b') sont symétriques par rapport aux indices i et k, tandis qu'il n'en est pas de même des équations (c'), et nous formerons un premier groupe des équations

$$(b'') \qquad \left\{ \begin{aligned} &(i^2 k, k) + (ik^2, i) + (i^2, k^2) + (ik, ik) = 0,\\ &(k^3, i) + 2(k^2, ik) + (k^2 i, k) = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on supposera *k inférieur à i.*

Les équations de ce groupe (b'') *seront résolubles par rapport à toutes les dérivées* $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^2 \partial x_\lambda}$, $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_\lambda^2}$, *où* λ *est inférieur à* i.

Prenons successivement pour (k, i) les combinaisons $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$; $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$; ....

La première combinaison donne deux équations qui renferment les deux éléments *nouveaux* [1] $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_2 \partial x_1^2}$, $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}$; la deuxième équation ne renferme que $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_2 \partial x_1^2}$ avec le coefficient $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ et la première permet ensuite de calculer $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}$, le coefficient de cette inconnue étant toujours $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$.

Cette remarque s'applique à toutes les combinaisons : la combinaison (i, k) ne renferme que deux éléments à calculer $\frac{\partial^3 y_k}{\partial x_i^2 \partial x_k}$, $\frac{\partial^3 y_k}{\partial x_i \partial x_k^2}$ et le déterminant des coefficients se réduit à l'unité pour

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Le groupe (b'') épuise les équations (b') et la moitié seulement des équations (c'); il reste donc à envisager un groupe (c'') formé des équations

$$(k^3, i) + 2(k^2, ki) + (k^2 i, k) = 0,$$

pour lesquelles *k est supérieur à i.* Nous allons montrer qu'*on peut les résoudre par rapport aux dérivées* $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^3}$, *où* λ *est inférieur à* i.

Le raisonnement est analogue à celui que nous avons fait pour les dérivées premières. On prend successivement pour (i, k) les combinaisons $(1, 2)$; $(1, 3)$, $(2, 3)$. La première combinaison $(1, 2)$ ne renferme que $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_2^3}$, dont le coefficient est $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$. Les deux combinaisons $(1, 3)$ et $(2, 3)$ renferment les inconnues $\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_3^3}$, $\frac{\partial^3 y_2}{\partial x_3^3}$, et le déterminant des coefficients de ces inconnues se réduit à

---

[1] On a vu plus haut que toutes les dérivées $\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i^2 \partial x_k}$ $(\lambda \neq i \neq k)$ s'expriment avec les dérivées du second et du premier ordre.

l'unité pour $y_i = x_i (i = 1, \ldots, n)$. D'une manière générale, les combinaisons

$$(1, i), \quad (2, i), \quad \ldots, \quad [(i-1), i]$$

renferment les éléments nouveaux

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial x_i^3}, \quad \frac{\partial^3 y_2}{\partial x_i^3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^3 y_{i-1}}{\partial x_i^3}$$

et le déterminant de leurs coefficients est simplement le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_{i-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1})}.$$

Cela suffit à établir la proposition annoncée.

4. *Si l'on différentie jusqu'à l'ordre* $(p+2)$ *les équations* (A), *on pourra calculer, en fonction des dérivées*

$$\frac{\partial^{p+2} y_\lambda}{\partial x_i^{p+2}}, \quad \frac{\partial^{p+2} y_\lambda}{\partial x_i^{p+1}\, \partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{p+2} y_\lambda}{\partial x_i\, \partial x_\lambda^{p+1}},$$

où i est inférieur ou égal à λ, toutes les autres dérivées d'ordre $p+2$; on obtiendra une seule expression pour chacune de ces dérivées.

Supposons le théorème établi pour les ordres p et $p+1$ (nous venons de l'établir pour les ordres 2 et 3); montrons qu'il est encore vrai pour l'ordre $p+2$.

Nous désignerons d'une manière générale par A_p l'ensemble de toutes les dérivées d'ordre p, à l'exclusion des dérivées

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^{p-1}\, \partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i\, \partial x_\lambda^{p-1}},$$

où i est au plus égal à λ. Si l'une des dérivées de A_{p+2} s'obtient de deux manières différentes en différentiant les dérivées de A_{p+1}, ces dernières ne peuvent différer que par une des variables de différentiation; les deux dérivées de A_p qui les ont fournies ne différeront donc que par deux variables de différentiation au plus. Nous mettrons dans toute dérivée A_{p+2} quatre lettres en évidence, qui seront les indices de quatre variables, choisies d'une manière convenable, sur lesquelles il nous suffira de raisonner.

Ces dérivées de A_{p+2} peuvent renfermer, pour une fonction y_λ, quatre, trois, deux ou une au moins des variables x_i *différentes* de x_λ; il y a lieu d'étudier successivement les différents cas qui se présentent.

1° Considérons une dérivée de A_{p+2} où figurent quatre lettres différentes et supposons qu'on l'ait obtenue de deux manières en différentiant respectivement, par rapport à x_i et x_h (1), deux dérivées de A_{p+1}; les deux expressions de cette dérivée pourront s'écrire, suivant leur origine, sous la forme

$$i(hkl\mathrm{J}), \quad h(ikl\mathrm{J}),$$

où l'on a mis en évidence les indices k, l des deux autres lettres et la partie J commune qu'il est inutile de développer.

La dérivée $(hkl\mathrm{J})$ appartient à A_{p+1} et n'a qu'une seule expression; on peut donc prendre pour cette expression $h(kl\mathrm{J})$, puisque $(kl\mathrm{J})$ appartient à A_p.

De même $(ikl\mathrm{J})$ appartient à A_{p+1} et n'a qu'une seule expression; on prendra pour cette expression $i(kl\mathrm{J})$, puisque $(kl\mathrm{J})$ appartient à A_p.

Les deux expressions de $(ihkl\mathrm{J})$ sont alors

$$ih(kl\mathrm{J}) \quad \text{et} \quad hi(kl\mathrm{J});$$

on les obtient en dérivant deux fois *une même dérivée* de A_p; elles sont donc identiques.

2° Considérons maintenant une dérivée de A_{p+2} où figurent seulement trois lettres différentes; elle aura l'un des types

$$(ihk^2\mathrm{J}), \quad (ihk\lambda\,\mathrm{J}).$$

Supposons qu'une dérivée du premier type s'obtienne de deux manières différentes :

$$i(hk^2\mathrm{J}), \quad h(ik^2\mathrm{J});$$

elle s'obtiendra aussi sous la forme

$$k(ihk\mathrm{J}),$$

(1) Nous supposons expressément que les lettres i et h sont différentes de λ; le cas où l'une d'elles est λ sera traité plus loin.

puisque $(ihk\mathrm{J})$ appartient à A_{p+1}. Comparons les dérivées $(hk^2\mathrm{J})$ et $(ihk\mathrm{J})$ qui appartiennent à A_{p+1} ; elles n'ont qu'une seule expression pour laquelle on pourra prendre respectivement

$$k(hk\mathrm{J}) \quad \text{et} \quad i(hk\mathrm{J}),$$

puisque $(hk\mathrm{J})$ appartient à A_p. Les deux expressions de $i(hk^2\mathrm{J})$ et $k(ihk\mathrm{J})$ sont donc identiques. Il en est de même des expressions $h(ik^2\mathrm{J})$ et $k(ihk\mathrm{J})$ et enfin des expressions $i(hk^2\mathrm{J})$ et $h(ik^2\mathrm{J})$.

Passons aux dérivées du second type et considérons deux expressions

$$i(hk\lambda\mathrm{J}) \quad \text{et} \quad h(ik\lambda\mathrm{J})$$

de l'une d'elles. La dérivée $(hk\lambda\mathrm{J})$ appartient à A_{p+1} ; elle n'a donc qu'une seule expression qu'on peut écrire $\lambda(hk\mathrm{J})$ puisque $(hk\mathrm{J})$ appartient à A_p, et l'on a, par suite,

$$i(hk\lambda\mathrm{J}) \equiv i\lambda(hk\mathrm{J}).$$

On aura de même

$$h(ik\lambda\mathrm{J}) \equiv h\lambda(ik\mathrm{J}).$$

Mais aux deux expressions signalées de la dérivée de A_{p+2} il faut ajouter l'expression

$$\lambda(ihk\mathrm{J})$$

puisque $(ihk\mathrm{J})$ est une dérivée de A_{p+1}, expression qu'on peut écrire indifféremment

$$\lambda i(hk\mathrm{J}) \quad \text{ou} \quad \lambda h(ik\mathrm{J}).$$

Il suffit de comparer ces deux dernières formes aux formes

$$i\lambda(hk\mathrm{J}) \quad \text{et} \quad h\lambda(ik\mathrm{J})$$

pour reconnaître que toutes les expressions obtenues pour $(ihk\lambda\mathrm{J})$ sont identiques.

3° Examinons les dérivées A_{p+2}, où ne figurent que deux lettres différentes de x_λ ; elles ont l'un des types

$$(i^3h\mathrm{J}), \quad (i^2h^2\mathrm{J}), \quad (i^2h\lambda\mathrm{J}), \quad (ih\lambda^2\mathrm{J}),$$

Si une dérivée du premier type a deux expressions

$$i(i^2h\mathrm{J}), \quad h(i^3\mathrm{J}),$$

on conclut de la seconde que i est supérieur à λ et, par suite, que (i^2J) appartient à A_p : les deux expressions considérées peuvent donc s'écrire

$$ih(i^2J), \quad hi(i^2J).$$

Si une dérivée du second type a deux expressions

$$i(ih^2J), \quad h(i^2hJ),$$

la dérivée (ih^2J) appartient à A_{p+1} et peut s'écrire $h(ihJ)$, puisque (ihJ) appartient à A_p; de même (i^2hJ) s'écrira $i(ihJ)$ et les deux expressions considérées seront encore

$$ih(ihJ) \quad \text{et} \quad hi(ihJ).$$

Si une dérivée du troisième type a deux expressions

$$i(ih\lambda J) \quad \text{et} \quad h(i^2\lambda J),$$

elle en aura une troisième

$$\lambda(i^2hJ),$$

puisque (i^2hJ) appartient à A_{p+1}. La première et la troisième s'écriront manifestement

$$i\lambda(ihJ) \quad \text{et} \quad \lambda i(ihJ),$$

puisque (ihJ) appartient à A_p; elles sont donc identiques. Comparons la première à la seconde; puisque $(i^2\lambda J)$ appartient à A_{p+1}, c'est qu'on a $i > \lambda$; donc la dérivée $(i\lambda J)$ appartient à A_p et les deux expressions considérées s'écrivent

$$ih(i\lambda J) \quad \text{et} \quad hi(i\lambda J).$$

Les trois expressions de $(i^2h\lambda J)$ sont donc identiques.

Passons au quatrième type : avec les expressions $i(h\lambda^2J)$ et $h(i\lambda^2J)$, on a aussi dans A_{p+2} l'expression

$$\lambda(ih\lambda J),$$

puisque $(ih\lambda J)$ appartient à A_p. L'expression $(h\lambda^2J)$ appartenant à A_{p+1}, on a $h > \lambda$ et, par conséquent, $(h\lambda J)$ appartient à A_p; les expressions $i(h\lambda^2J)$ et $\lambda(ih\lambda J)$ peuvent donc s'écrire

$$i\lambda(h\lambda J) \quad \text{et} \quad \lambda i(h\lambda J),$$

c'est-à-dire sont identiques. Les lettres i et h jouant le même rôle, la deuxième et la troisième expression de la dérivée considérée sont aussi identiques.

4° Il nous reste à examiner les dérivées A_{p+2} qui ne renferment qu'une seule variable x_i différente de x_λ; elles ont les types

$$(i^4 J), \quad (i^3\lambda J), \quad (i^2\lambda^2 J), \quad (i\lambda^3 J),$$

où i est supérieur à λ.

Or, il est clair qu'elles ne peuvent s'obtenir qu'en dérivant par rapport à x_i une dérivée A_{p+1}, puisque nous avons écarté le cas où l'une des variables de différentiation serait x_λ.

Pour achever la démonstration, il faut maintenant considérer une dérivée A_{p+2} ayant deux expressions

$$i(\lambda J) \quad \text{et} \quad \lambda(iJ).$$

Mais il suffit de jeter un coup d'œil sur les divers types de dérivées A_{p+1} pour reconnaître que, *si* (λJ) *est un* A_{p+1}, *la dérivée* (J) *est toujours un* A_p. Les deux expressions considérées sont donc

$$i\lambda(J) \quad \text{et} \quad \lambda i(J),$$

et, par suite, elles sont identiques.

5. Nous avons donc établi que les seules dérivées paramétriques pour tous les ordres de dérivation sont les dérivées

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i\,\partial x_\lambda^{p-1}},$$

pour lesquelles $i \leqq \lambda$. Ce sont manifestement toutes les dérivées par rapport à x_i et à x_λ de la dérivée $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ $(i \leqq \lambda)$.

On les obtient toutes et chacune d'elles une fois seulement en se donnant arbitrairement :

1° *Les fonctions des deux variables* x_i, x_λ *auxquelles se réduisent les dérivées* $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ $(i < \lambda)$ *quand on y fixe les valeurs initiales des autres variables;*

2° *Les fonctions d'une seule variable* x_λ *auxquelles se ré-*

duisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ *quand on y fixe les valeurs initiales de toutes les variables sauf* x_λ.

C'est ce que nous entendons en disant que la solution générale du système comprend $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux variables et n fonctions arbitraires d'une seule variable.

6. *Seconde démonstration.* — Nous avons vu tout à l'heure qu'on déduit du système

$$\text{(A)} \qquad (i, k) = \mathbf{S}_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0,$$

par une première différentiation, les systèmes du second ordre

$$(\alpha) \qquad (i, kl) = 0 \qquad (i \neq k \neq l),$$

$$(\beta) \qquad \begin{cases} (i, ki) + (i^2, k) = 0, \\ (i, k^2) + (ik, k) = 0. \end{cases}$$

Les équations (α) déterminent toutes les dérivées $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k} (\lambda \neq i \neq k)$ à l'aide des dérivées du second ordre restantes et des dérivées du premier ordre. Considérons *isolément* ces équations (α); nous allons montrer qu'elles forment un système complètement intégrable qui permet de calculer toutes les dérivées des expressions $\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_k}$ $(\lambda \neq i \neq k)$ et celles-là seulement.

On a vu qu'une différentiation des équations (α) donne les trois groupes d'équations

$$(a) \qquad (ihl, k) + (ih, kl) = 0 \qquad (i \neq h \neq k \neq l),$$

$$(b) \qquad (ih^2, k) + (ih, kh) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

$$(c) \qquad (ihk, k) + (ih, k^2) = 0 \qquad (i \neq h \neq k),$$

dont on peut déduire toutes les dérivées

$$\frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l}, \quad \frac{\partial^3 y_\lambda}{\partial x_i \partial x_h^2} \qquad (\lambda \neq i \neq h \neq l).$$

La proposition est donc établie pour le troisième ordre.

Supposons-la vraie pour les ordres p et $(p+1)$ et montrons qu'elle subsiste pour l'ordre $(p+2)$, c'est-à-dire établissons que les diverses expressions d'une même dérivée d'ordre $(p+2)$ qui appartient à l'ensemble considéré sont nécessairement identiques.

Les dérivées dont il s'agit forment un ensemble B, caractérisé par ce fait que *deux variables au moins x_i, x_h différentes de x_λ figurent dans les variables de différentiation de toute fonction y_λ.*

Soient $\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $\frac{\partial I}{\partial x_h}$ deux expressions d'une même dérivée de B_{p+2}, où l'on suppose $(i \neq h \neq \lambda)$; je dis que H doit contenir une variable de différentiation x_l différente de x_i et x_h ou la variable x_λ prise deux fois au moins. En effet, si H, qui appartient à B_{p+1}, ne renferme que x_h et x_i, la dérivée I qui appartient à B_{p+1} aussi ne renfermera plus que x_i, ce qui est contradictoire.

On peut donc écrire, puisque les dérivées de B_{p+1} n'ont qu'une seule expression,

$$H = \frac{\partial^2 J}{\partial x_h \, \partial x_l}, \qquad I = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \, \partial x_l},$$

l pouvant être ou non égal à h.

Supposons d'abord $(l \neq i \neq h)$; si J est une dérivée prise par rapport à une variable autre que x_l, $\frac{\partial J}{\partial x_l}$ appartient à B_p et les deux expressions

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial x_h}$$

peuvent s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_h}\left(\frac{\partial J}{\partial x_l}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_h \, \partial x_i}\left(\frac{\partial J}{\partial x_l}\right).$$

Si J ne renferme que la variable de différentiation x_l, cette variable y figure au moins une fois, puisque 2 est la valeur minimum de p : en écrivant

$$J = \frac{\partial L}{\partial x_l},$$

on aura

$$H = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_h \, \partial x_l}\right), \qquad I = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_l}\right)$$

et les expressions considérées de la dérivée B_{p+2} sont

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_h \, \partial x_l}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_h \, \partial x_l}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_l}\right)$$

qu'on peut manifestement écrire aussi

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_h\,\partial x_l}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_h}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\,\partial x_l}\right),$$

formes sous lesquelles elles sont les dérivées par rapport à x_l d'une même dérivée B_{p+1}.

Supposons maintenant $l = h$, c'est-à-dire

$$H = \frac{\partial^2 J}{\partial x_h^2}, \qquad I = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i\,\partial x_h};$$

puisque H appartient à B_{p+1}, c'est que J est une dérivée prise une fois au moins par rapport à une variable distincte de x_h et x_λ, et il en résulte que $\frac{\partial J}{\partial x_h}$ appartient à B_p. On a donc, comme plus haut,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_h}\left(\frac{\partial J}{\partial x_h}\right), \qquad \frac{\partial I}{\partial x_h} = \frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_i}\left(\frac{\partial J}{\partial x_h}\right).$$

La proposition annoncée est établie dans tous les cas.

7. Nous pouvons conclure, des remarques que nous venons de faire, que toutes les dérivées d'un ordre quelconque p des y s'expriment d'une seule manière à l'aide des dérivées

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_\lambda^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_\lambda^{p-1}\,\partial x_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_\lambda\,\partial x_i^{p-1}}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p} \qquad (\lambda \neq i),$$

qui sont, par conséquent, les ***dérivées paramétriques***.

On peut donc satisfaire aux équations du second ordre (α) en prenant arbitrairement :

1° Toutes les fonctions des deux variables x_i, x_λ auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ lorsqu'on y fixe pour toutes les variables, sauf x_i et x_λ, des valeurs arbitraires x_{h0} ($h \neq i, \lambda$);

2° Toutes les fonctions d'une seule variable auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ quand on y donne à toutes les variables, sauf x_λ, les valeurs arbitraires x_{h0} ($h \neq \lambda$).

Il est clair, en effet, qu'on obtient ainsi une valeur et une seule pour chacune des dérivées paramétriques et, par suite, une valeur et une seule pour toutes les dérivées des fonctions inconnues y_λ.

La solution obtenue est *la plus étendue,* puisque les dérivées paramétriques n'y sont liées, en un point $x_{h0} (h = 1, \ldots, n)$ de situation générale, par aucune relation.

La solution générale du système (α) *dépend donc de* $n(n-1)$ *fonctions arbitraires de deux variables et de* n *fonctions arbitraires d'une variable.*

Nous ferons maintenant observer que les équations (α) n'entraînent pas les équations (A), mais seulement les relations

$$(\mathrm{A}') \qquad (i, k) = \mathrm{F}_{ik}(x_i, x_k),$$

où les F_{ik} sont des fonctions arbitraires des deux variables dont elles dépendent. Il résulte de là que, si l'on remplace dans les équations (A) les y_λ par les solutions les plus générales du système (α), ces premiers membres deviennent simplement des fonctions des deux variables x_i, x_k correspondantes. Les expressions $\mathrm{S}_\lambda \dfrac{\partial y_\lambda}{\partial x_i} \dfrac{\partial y_\lambda}{\partial x_k}$, où l'on remplace les y_λ par les solutions les plus générales du système (α), ne dépendent donc qu'en apparence des variables autres que x_i et x_k, et elles ne changeront pas si l'on fixe dans chacune d'elles toutes les variables sauf, x_i et x_k.

Après cette opération, $\dfrac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ se réduit dans l'expression (i, k) à une simple fonction de x_i et x_k, dépendant des données initiales indiquées plus haut; les équations (A) n'entraînent donc que $\dfrac{n(n-1)}{2}$ relations entre ces données initiales, relations qu'on obtient en égalant à zéro les fonctions F_{ik}. Examinons d'un peu plus près ces relations.

Désignons, pour fixer les idées, par $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$ la fonction des deux variables x_i, x_λ à laquelle se réduit $\dfrac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ quand on y fixe pour toutes les variables, sauf x_i et x_λ, les valeurs arbitraires $x_{k0} (k \neq i, \lambda)$; cette fonction arbitraire est une des données initiales de la solution générale de (α). Désignons de même par $\psi_\lambda(x_\lambda)$ la fonction de x_λ à laquelle se réduit $\dfrac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ quand on y fixe pour toutes les variables, sauf x_λ, les mêmes valeurs initiales; cette fonction arbitraire est encore une des données initiales de la solution générale de (α).

L'équation $(i, k) = 0$, quand on y fixe pour toutes les variables, sauf x_i et x_k, les mêmes valeurs initiales, prendra la forme

$$\begin{gathered}\varphi_{1i}(x_i, x_{10})\,\varphi_{1k}(x_k, x_{10}) + \ldots + \psi_i(x_i)\,\varphi_{ik}(x_k, x_i) + \ldots \\ + \varphi_{ki}(x_i, x_k)\,\psi_k(x_k) + \ldots + \varphi_{ni}(x_i, x_{n0})\,\varphi_{nk}(x_k, x_{n0}) = 0;\end{gathered}$$

elle ne renferme que deux fonctions de *deux variables* qui sont les données initiales arbitraires $\varphi_{ik}(x_k, x_i)$, $\varphi_{ki}(x_i, x_k)$. Il en résulte que ces équations *fonctionnelles* en nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ détermineront $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions de deux variables à l'aide des autres; par exemple toutes les fonctions $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$, où i est inférieur à λ, à l'aide des fonctions $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$, où i est supérieur à λ.

On le reconnaît aisément en prenant pour les $\varphi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda)$ la forme particulière

$$(x_\lambda - x_{\lambda 0})\,\Phi_{\lambda i}(x_i, x_\lambda),$$

où $\Phi_{\lambda i}$ est une fonction *holomorphe arbitraire;* ce choix des données initiales réduit les équations fonctionnelles $(i, k) = 0$ à la forme simple

$$\psi_i(x_i)(x_i - x_{i0})\,\Phi_{ik}(x_k, x_i) + \psi_k(x_k)(x_k - x_{k0})\,\Phi_{ki}(x_i, x_k) = 0,$$

qui détermine $\Phi_{ik}(x_k, x_i)$ lorsque k est inférieur à i.

Nous avons donc établi que *les données initiales ne peuvent plus dépendre que de* $\frac{n(n-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de deux variables et de n fonctions arbitraires d'une variable.* C'est bien le résultat déjà obtenu par une autre voie.

II. — Étude des équations qui expriment que les surfaces $u =$ const. font partie d'un système complètement orthogonal.

8. Si les fonctions u, v, w, ... des n variables indépendantes définissent n familles de surfaces deux à deux orthogonales de l'espèce à n dimensions, elles doivent satisfaire aux $\frac{n(n-1)}{2}$ rela-

tions

$$(a)\qquad \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \qquad (u \neq v = w, \ldots).$$

M. Darboux [1] en conclut, par un procédé régulier, une suite d'équations du premier ordre par rapport aux fonctions v, w, ..., dont les deux premiers types sont

$$(b)\qquad \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k} = 0$$

et

$$(c)\qquad \sum_{i,k}\left(\sum_l u_l\,u_{ikl} - 2\sum_h u_{ih}\,u_{kh}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k} = 0.$$

C'est en observant que les équations (a) et (b) déterminent les rapports des dérivées des fonctions v, w, ... qu'on obtient, en portant ces rapports dans les équations (c), les équations qui constituent le *premier groupe* d'équations du troisième ordre auxquelles doit satisfaire la fonction $u(x_1, \ldots, x_n)$.

Nous nous proposons d'étudier les conséquences de ces équations du premier groupe *prises isolément*. Nous les regardons alors comme obtenues en éliminant les quantités $v_1, \ldots, v_n$; $w_1, \ldots, w_n$; ... dans les relations

$$\sum u_i v_i = 0, \qquad \sum u_{ik} v_i w_k = 0, \qquad \sum A_{ik} v_i w_k = 0,$$

où l'on a posé $A_{ik} = \sum_l u_l u_{ikl} - 2\sum_k u_{ih} u_{kh}$ sans rien supposer sur ces quantités $v_1, \ldots, v_n$; $w_1, \ldots, w_n$; ....

9. Désignons donc par $v_1, \ldots, v_n$; $w_1, \ldots, w_n$; ... les $(n-1)$ systèmes de solutions des équations

$$(1)\qquad \sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$(2)\qquad u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = 0,$$

---

[1] *Cf.* par exemple *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes,* Liv. I, Chap. I, p. 15.

qui correspondent aux racines λ_v, λ_w, ... de l'équation

$$(3) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} u_{11}-\lambda & u_{12} & \dots & u_{1n} & u_1 \\ u_{21} & u_{22}-\lambda & \dots & u_{2n} & u_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn}-\lambda & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

racines que nous supposerons distinctes. Ces éléments v_i, w_h, ... vérifieront les équations

$$\sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0;$$

un calcul facile permet de l'établir en partant des équations (1) et (2) : on déduit en effet des équations (1)

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_k w_i = \lambda_v \sum_i v_i w_i + \mu_v \sum_i u_i w_i,$$

et, par conséquent, en tenant compte des équations (2),

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_k w_i = \lambda_v \sum_i v_i w_i;$$

on aurait de même

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = \lambda_w \sum_i v_i w_i.$$

On peut donc en conclure, si $\lambda_v - \lambda_w \neq 0$, les relations

$$\sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0.$$

Nous supposerons que les fonctions $v_1, \dots, v_n$; $w_1, \dots, w_n$; ..., dont les rapports mutuels sont déterminés par les équations (1) et (2), satisfont aux équations

$$(4) \qquad \sum_{i,k} v_i w_k (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = 0,$$

qui sont au nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, c'est-à-dire que *la fonction u satisfait aux équations du troisième ordre qui constituent le premier groupe d'équations de M. Darboux.*

Nous nous proposons de rechercher quelles conséquences on en peut déduire à l'égard des surfaces

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

10. Différentions l'équation (4) par rapport à x_m, nous aurons

$$\begin{aligned}\sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) \\ + \sum_{i,k} v_i w_k [(u_1 u_{ikm1} + \ldots) + (u_{m1} u_{ik1} + \ldots) - 2(u_{k1} u_{im1} + \ldots) \\ - 2(u_{i1} u_{km1} + \ldots)] = 0;\end{aligned}$$

multiplions alors par t_m les deux membres de cette équation et faisons la somme des équations analogues relatives aux diverses valeurs de l'indice $m (m = 1, \ldots, n)$, nous obtiendrons la nouvelle relation

$$\begin{aligned}\sum_{i,k,m} v_i w_k t_m \{(u_1 u_{ikm1} + \ldots) - 2[(u_{m1} u_{ik1} + \ldots) + (u_{i1} u_{km1} + \ldots) \\ + (u_{k1} u_{im1} + \ldots)]\} + 3 \sum_{i,k,m} v_i w_k t_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots) \\ + \sum_{i,k,m} t_m \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = 0,\end{aligned}$$

où nous avons mis en évidence une partie *symétrique* par rapport aux trois systèmes distincts de solutions v, w, t, *partie qui, seule, renferme les dérivées du quatrième ordre de la fonction u.*

Les équations (4) entraînent donc toutes les équations du troisième ordre qu'on obtient en écrivant que la partie non symétrique du premier membre des relations précédentes ne varie pas par une permutation quelconque des solutions v, w, t. Chaque combinaison de trois lettres distinctes v, w, t donne deux de ces relations, que nous écrivons

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_{i,k,m} t_m \dfrac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) + 3\sum_{i,k,m} v_i w_k t_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots) \\ = \sum_{i,k,m} v_m \dfrac{\partial}{\partial x_m}(t_i w_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) + 3\sum_{i,k,m} t_i w_k v_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots) \\ = \sum_{i,k,m} w_m \dfrac{\partial}{\partial x_m}(v_i t_k)(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) + 3\sum_{i,k,m} v_i t_k w_m (u_{m1} u_{ik1} + \ldots). \end{cases}$$

Ces équations, au nombre de $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$, sont-elles nouvelles, ou bien sont-elles des conséquences algébriques des équations (4)? C'est ce que nous allons examiner.

11. Il est nécessaire tout d'abord d'établir un certain nombre de conséquences des relations

$$\sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0 \qquad (v \neq w);$$

qui déterminent les rapports des v_i, w_i, ...

Différentions par rapport à x_m l'équation

$$\sum_i u_i v_i = 0,$$

nous aurons

$$\sum_i u_{im} v_i + \sum_i u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

et, ensuite, en multipliant par t_m et sommant convenablement,

$$\sum_{i,m} u_{im} v_i t_m + \sum_{i,m} u_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

on peut conclure, en tenant compte de la relation

$$\sum_{i,m} u_{im} v_i t_m = 0,$$

la relation

$$\sum_{i,m} u_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

que nous écrirons

$$(a_1) \qquad \sum_i u_i \delta_t v_i = 0,$$

en posant

$$\delta_t \alpha = t_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + \ldots + t_n \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}.$$

Il est bien entendu qu'*on n'a pas ici* $\delta_t \alpha = \delta_\alpha t$.

L'équation $\sum_i v_i w_i = 0$ donnera de même

$$\sum_i v_i \frac{\partial w_i}{\partial x_m} + \sum_i w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

puis

$$\sum_{i,m} v_i t_m \frac{\partial w_i}{\partial x_m} + \sum_{i,m} w_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a_2) \qquad \sum_i v_i \delta_t w_i + \sum_i w_i \delta_t v_i = 0.$$

Partons maintenant de la relation

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0;$$

on en déduira par le même procédé

$$\sum_{i,k} u_{ikm} v_i w_k + \sum_{i,k} u_{ik} \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k) = 0,$$

puis

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m + \sum_{i,k,m} u_{ik} t_m \frac{\partial}{\partial x_m}(v_i w_k) = 0,$$

que nous écrirons

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m + \sum_{i,k} u_{ik} \delta_t (v_i w_k) = 0,$$

ou encore

$$(a_3) \qquad \sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m + \sum_i \delta_w u_i \delta_t v_i + \sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k = 0.$$

On déduira, en particulier, de ces dernières relations, en observant que $\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m$ est symétrique par rapport aux trois systèmes de solutions v, w, t, les deux relations

$$(a_4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_i \delta_w u_i \delta_t v_i + \sum_i \delta_v u_i \delta_t w_i \\ &= \sum_i \delta_w u_i \delta_v t_i + \sum_i \delta_t u_i \delta_v w_i \\ &= \sum_i \delta_v u_i \delta_w t_i + \sum_i \delta_t u_i \delta_w v_i. \end{aligned}\right.$$

Enfin, on déduira immédiatement de

$$\sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0$$

la relation

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k u_m + \sum_{i,k,m} u_{ik} u_m \frac{\partial(v_i w_k)}{\partial x_m} = 0,$$

que nous écrirons

$$(a_5)\qquad \sum_{i,k} v_i w_k \delta_u u_{ik} + \sum_i \delta_w u_i \delta_u v_i + \sum_k \delta_v u_k \delta_u w_k = 0.$$

12. Les relations dont nous aurons besoin ensuite renfermeront explicitement les diverses racines λ_v, λ_w, ... de l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0;$$

nous obtiendrons ces relations en partant du système

$$\sum_i u_i v_i = 0,$$

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

On peut, en effet, en conclure par différentiation

$$\sum_k u_{ikm} v_k + \sum_k u_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} = \lambda_v \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + v_i \frac{\partial \lambda_v}{\partial x_m} + \mu_v u_{im} + u_i \frac{\partial \mu_v}{\partial x_m},$$

puis

$$\sum_{i,k} u_{ikm} v_k w_i + \sum_{i,k} u_{ik} w_i \frac{\partial v_k}{\partial x_m} = \lambda_v \sum_i w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \mu_v \sum_i u_{im} w_i,$$

et enfin

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_k w_i t_m + \sum_{i,k,m} u_{ik} w_i t_m \frac{\partial v_k}{\partial x_m} = \lambda_v \sum_{i,m} w_i t_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m},$$

que nous écrirons

$$(a_6) \qquad \sum_{i,k,m} u_{ikm} v_k w_i t_m + \sum_k \delta_w u_k \delta_t v_k = \lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i.$$

Nous déduirons de la comparaison de cette relation avec l'expression déjà obtenue pour

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_k w_i t_m \qquad [cf.\ (a_3)]$$

la nouvelle relation

$$\sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k = -\lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i.$$

On a de même

$$\sum_k \delta_w u_k \delta_t v_k = -\lambda_w \sum_i v_i \delta_t w_i,$$

et par conséquent aussi, d'après (a_2),

$$(a_7) \qquad \lambda_w \sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k + \lambda_v \sum_k \delta_w u_k \delta_t v_k = 0.$$

Portons les expressions que nous venons d'obtenir pour $\sum_k \delta_v u_k \delta_t w_k$ et pour $\sum_k \delta_w u_k \delta_t u_k$ dans les relations (a_4), nous aurons

$$\begin{aligned} &\lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i + \lambda_w \sum_i v_i \delta_t w_i \\ &= \lambda_t \sum_i w_i \delta_v t_i + \lambda_w \sum_i t_i \delta_v w_i \\ &= \lambda_v \sum t_i \delta_w v_i + \lambda_t \sum_i v_i \delta_w t_i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(a_8)\qquad (\lambda_v - \lambda_w)\sum_i w_i \delta_t v_i = (\lambda_t - \lambda_w)\sum_i w_i \delta_v t_i = (\lambda_v - \lambda_t)\sum_i t_i \delta_w v_i = \Omega.$$

La valeur commune Ω de ces trois quantités est d'ailleurs, d'après (a_3) ou (a_6), la somme symétrique

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m.$$

Nous obtiendrons de même façon la relation

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} w_i v_k u_m + \sum_{i,k,m} u_{ik} w_i u_m \frac{\partial v_k}{\partial x_m}$$
$$= \lambda_v \sum_{i,m} w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_m} u_m + \mu_v \sum_{i,m} u_{im} w_i u_m,$$

que l'on peut écrire

$$\sum_{i,k} w_i v_k \delta_u u_{ik} + \sum_k \delta_w u_k \delta_u v_k = \lambda_v \sum_i w_i \delta_u v_i + \mu_v \sum_i w_i \delta_u u_i.$$

Comme, d'autre part,

$$\sum_i u_{im} w_i = \lambda_w w_m + \mu_w u_m,$$

on aura

$$\sum_{i,m} u_{im} w_i u_m = \mu_w \sum_m u_m^2 = \mu_w \delta_u u,$$

et il restera simplement

$$\sum_{i,k} w_i v_k \delta_u u_{ik} + \sum_k \delta_w u_k \delta_u v_k = \lambda_v \sum_i w_i \delta_u v_i + \mu_v \mu_w \delta_u u,$$

et si nous comparons cette relation avec (a_5) nous en conclurons

$$(a_9)\qquad -\sum_k \delta_v u_k \delta_u w_k = \lambda_v \sum_i w_i \delta_u v_i + \mu_v \mu_w \delta_u u.$$

13. Ces relations auxiliaires établies, nous revenons à l'examen des équations (5). Nous commencerons par les écrire sous la forme abrégée

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{i,k}(\delta_u u_{ik}-2\delta_{u_i}u_k)[w_k(\delta_t v_i-\delta_v t_i)+v_i\delta_t w_k-t_i\delta_v w_k]\\&\qquad\qquad\qquad+3\sum_{i,k,l}w_k u_{ikl}(v_i\delta_t u_l-t_i\delta_v u_l)=0,\end{aligned}\right.$$

en posant, comme plus haut,

$$\delta_\alpha\beta=\alpha_1\frac{\partial\beta}{\partial x_1}+\ldots+\alpha_n\frac{\partial\beta}{\partial x_n}.$$

Les équations

$$(1)\qquad \sum u_{ik}v_k=\lambda_v v_i+\mu_v u_i,$$

qui servent de définition aux λ et aux μ, donnent immédiatement

$$\delta_t u_l=\lambda_t t_l+\mu_t u_l,$$
$$\delta_v u_l=\lambda_v v_l+\mu_v u_l,$$

et la seconde partie du premier membre de l'équation (6) prend la nouvelle forme

$$\begin{aligned}&3(\lambda_t-\lambda_v)\sum_{i,k,l}u_{ikl}v_i w_k t_l\\&+3\mu_t\sum_{i,k}v_i w_k(\delta_u u_{ik}-2\delta_{u_i}u_k)\\&-3\mu_v\sum_{i,k}t_i w_k(\delta_u u_{ik}-2\delta_{u_i}u_k),\end{aligned}$$

quand on y remplace $\delta_t u_l$ et $\delta_v u_l$ par leurs expressions à l'aide des λ et μ; on voit qu'*en raison des relations du premier groupe*

$$\sum_{i,k}v_i w_k(\delta_u u_{ik}-2\delta_{u_i}u_k)=0,$$

elle se réduit au seul terme

$$3(\lambda_t-\lambda_v)\sum_{i,k,l}u_{ikl}v_i w_k t_l.$$

L'équation (6) s'écrit donc, après avoir divisé ses deux membres par $(\lambda_t - \lambda_v)$, supposé différent de zéro,

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l \\ \displaystyle + \frac{1}{\lambda_t - \lambda_v} \sum_{i,k} (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[w_k(\delta_t v_i - \delta_v t_i) + v_i \delta_t w_k - t_i \delta_v w_k] = 0. \end{cases}$$

Nous remarquons immédiatement que son premier terme renferme symétriquement les trois systèmes de solutions v_i, v_k, v_l; les deux équations (5) que nous avons formées pour les trois systèmes différents v, w, t se ramènent donc à l'équation précédente et à celle qu'on peut déduire en permutant deux lettres t et w ou v et w qui n'y figurent pas symétriquement. En éliminant la partie symétrique en v, w, t, on aura les équations du nouveau type

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle (\lambda_t - \lambda_w) \sum_{i,k} (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[w_k(\delta_t v_i - \delta_v t_i) + v_i \delta_t w_k - t_i \delta_v w_k] \\ \displaystyle = (\lambda_t - \lambda_v) \sum_{i,k} (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[v_k(\delta_t w_i - \delta_w t_i) + w_i \delta_t v_k - t_i \delta_w v_k], \end{cases}$$

qui s'écrivent encore, en groupant convenablement les termes, eu égard à l'arbitraire qui subsiste dans les indices sous le signe $\sum$,

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle \sum_{i,k} w_k(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[(\lambda_v - \lambda_w)\delta_t v_i - (\lambda_t - \lambda_w)\delta_v t_i] \\ \displaystyle + \sum_{i,k} v_k(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[(\lambda_t - \lambda_v)\delta_w t_i - (\lambda_w - \lambda_v)\delta_t w_i] \\ \displaystyle + \sum_{i,k} t_k(\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k)[(\lambda_w - \lambda_t)\delta_v w_i - (\lambda_v - \lambda_t)\delta_w v_i] = 0. \end{cases}$$

Ainsi, *chaque combinaison de trois lettres distinctes* v, w, t *donne une équation du type* (7) *et une équation du type* (9).

14. Nous allons d'abord transformer ces dernières.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$U_{ik} = \delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k,$$

ce qui permet d'écrire les équations du premier groupe sous la forme

$$\sum_{i,k} U_{ik} v_i w_k = 0.$$

Les relations

$$\sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0$$

nous donneront évidemment

$$\sum_k U_{ik} v_k = L_v v_i + M_v u_i,$$

en désignant par L_v, L_w, ... les racines d'une équation d'ordre $(n-1)$ facile à former [on déduit simplement cette équation de l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

en y remplaçant u_{ik} par U_{ik}], racines toutes inégales d'ailleurs dans le cas général.

Portons ces valeurs de

$$\sum_k U_{ik} w_k, \quad \sum_k U_{ik} v_k, \quad \sum_k U_{ik} t_k$$

dans l'équation (9), elle deviendra

$$(10) \qquad \sum_i (L_w w_i + M_w u_i)[(\lambda_v - \lambda_w)\delta_t v_i - (\lambda_t - \lambda_w)\delta_v t_i] + \ldots = 0.$$

Mais nous avons établi plus haut les relations

$$(a_1) \qquad \sum_i u_i \delta_t v_i = 0,$$

$$(a_8) \qquad (\lambda_v - \lambda_w)\sum_i w_i \delta_t v_i = (\lambda_t - \lambda_w)\sum_i w_i \delta_v t_i = (\lambda_v - \lambda_t)\sum_i t_i \delta_w v_i,$$

en partant des relations

$$\sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0,$$

qui définissent les rapports des v_i, w_k, ... Il en résulte que les coefficients des éléments L_w, M_w, ... dans le premier membre de (10) sont tous nuls.

Les relations (10) *sont donc identiquement satisfaites.*

Il reste simplement à étudier les relations (7), qui sont en nombre $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$; nous nous servirons, pour les transformer, des relations

$$(a_6) \qquad \sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m = \lambda_v \sum_i w_i \delta_t v_i + \lambda_w \sum_i v_i \delta_t w_i,$$

qui s'écrivent, en tenant compte des

$$(a_2) \qquad \sum_i w_i \delta_t v_i + \sum_i v_i \delta_t w_i = 0,$$

sous la forme

$$\sum_{i,k,m} u_{ikm} v_i w_k t_m = (\lambda_v - \lambda_w) \sum_i w_i \delta_t v_i,$$

et aussi des relations

$$\sum_k U_{ik} v_k = L_v v_i + M_v u_i,$$

que nous venons d'établir.

Si, après avoir multiplié l'équation (7) par $(\lambda_t - \lambda_v)$, nous remplaçons respectivement

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i v_k t_l$$

et les sommes telles que $\sum_k U_{ik} w_k$ par leurs expressions données par les relations qu'on vient de rappeler, cette équation (7) prendra la forme

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 3(\lambda_t - \lambda_v)(\lambda_v - \lambda_w) \sum_i w_i \delta_t v_i \\ & + L_w \sum_i w_i (\delta_t v_i - \delta_v t_i) + M_w \sum_i u_i (\delta_t v_i - \delta_v t_i) \\ & + L_v \sum_k v_k \delta_t w_k \qquad + M_v \sum_k u_k \delta_t w_k \\ & - L_t \sum_k t_k \delta_v w_k \qquad - M_t \sum_k u_k \delta_v w_k \qquad = 0. \end{aligned} \right.$$

Elle se réduit immédiatement en vertu des relations (a_1) et (a_2) à

$$[3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)+L_w-L_v]\sum_i w_i\delta_t v_i+(L_w-L_t)\sum_i t_i\delta_v w_i=0,$$

et les relations (a_8), qui donnent

$$(\lambda_v-\lambda_w)\sum_i w_i\delta_t v_i=(\lambda_w-\lambda_t)\sum_i t_i\delta_v w_i,$$

permettent de l'écrire définitivement sous la forme simple

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i w_i\delta_t v_i[3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)(\lambda_w-\lambda_t)\\&\qquad+L_w(\lambda_v-\lambda_t)+L_t(\lambda_w-\lambda_v)+L_v(\lambda_t-\lambda_w)]=0,\end{aligned}\right.$$

où la symétrie qu'elle présente est mise en évidence.

On en conclura donc, *sauf les cas, évidemment exceptionnels, où les racines des deux équations en* λ *et* L *sont liées par les* $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ *relations*

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}0&=3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)(\lambda_w-\lambda_t)\\&\quad+L_w(\lambda_v-\lambda_t)+L_t(\lambda_w-\lambda_v)+L_v(\lambda_t-\lambda_w),\end{aligned}\right.$$

ou par quelques-unes d'entre elles, les relations

$$(14)\qquad \sum w_i\delta_t v_i=0,$$

où w, t, v sont trois lettres différentes.

Mais ces relations (14) sont précisément, ainsi qu'il résulte de l'identité rappelée plus haut,

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl}v_i w_k t_l=(\lambda_v-\lambda_w)\sum_i w_i\delta_t v_i,$$

les relations

$$(15)\qquad \sum_{i,k,l} u_{ikl}v_i w_k t_l=0,$$

qui expriment, d'après M. Darboux ([1]), que les lignes de courbure

---

([1]) Cf. *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, § 77, p. 136.

de chacune des surfaces $u =$ const. sont *coordonnées*. Nous avons donc établi, *dans le cas général, que les équations en nombre* $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ *qui constituent le second groupe d'équations envisagé par M. Darboux sont des conditions d'intégrabilité des équations du premier groupe.*

15. Considérons maintenant le système des équations, en nombre $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$,

$$(15) \qquad \sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l = 0,$$

où les rapports des v_i, w_k, t_l, ... sont définis par les relations

$$(\alpha) \qquad \sum_i u_i v_i = 0, \qquad \sum_i v_i w_i = 0, \qquad \sum_{i,k} u_{ik} v_i w_k = 0,$$

et proposons-nous d'en étudier directement les conséquences.

Nous avons vu que les relations qui déterminent les rapports des v_i, w_k, t_l, ... permettent à elles seules d'écrire

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l = (\lambda_v - \lambda_w) \sum_i w_i \delta_t v_i;$$

on peut donc conclure des relations (15) les équations

$$\sum_i w_i \delta_t v_i = 0.$$

On a, d'autre part, en vertu de ces mêmes relations (α),

$$(a_1) \qquad \sum_i u_i \delta_t v_i = 0.$$

Des relations

$$\sum_i \alpha_i \delta_t v_i = 0,$$

où α_i représente une des $(n-2)$ quantités w_i, ..., u_i (autres que v_i et t_i), on peut déduire immédiatement

$$(16) \qquad \delta_t v_i = A_v^{tv} v_i + A_t^{tv} t_i \qquad (i = 1, \ldots n),$$

en désignant par A_v^{tv} et A_t^{tv} deux coefficients convenables. Il suffit d'observer pour cela qu'on connaît deux systèmes de solutions linéairement indépendantes $X_i = t_i$ et $X_i = v_i$ pour les relations

$$\sum_i \alpha_i X_i = 0,$$

et que les déterminants d'ordre $(n-2)$ formés avec les coefficients de $(n-2)$ des X_i dans ces relations ne peuvent être nuls à la fois, puisque les $(n-2)$ directions définies par les systèmes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux à deux orthogonales.

Ces relations (16) sont extrêmement importantes; en voici une conséquence immédiate.

Considérons les deux équations linéaires aux dérivées partielles

$$V(f) = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \delta_v f = 0, \qquad T(f) = \sum_i t_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \delta_t f = 0;$$

elles formeront un système complet, puisque l'on a

$$[V, T] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\delta_v t_i - \delta_t v_i)$$

et que

$$\delta_v t_i - \delta_t v_i = (A_v^{vt} - A_v^{tv})v_i + (A_t^{vt} - A_t^{tv})t_i;$$

elles ont par conséquent $(n-2)$ solutions communes. On conclut de là en raisonnant de proche en proche que le système formé des $(n-2)$ équations

$$\delta_v f = 0, \qquad \delta_t f = 0, \qquad \ldots$$

(d'où l'on a exclu $\delta_u f$ et $\delta_w f$) est complet et admet deux solutions distinctes. On sait que la fonction u est l'une de ces solutions, soit w l'autre; on pourra évidemment écrire, puisque l'on a

$$\sum v_i w_i = 0, \qquad \sum t_i w_i = 0, \qquad \ldots$$

et que les w_i ne sont définis qu'à un facteur près,

$$w_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} + N_w \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Pour que les w_i soient les dérivées d'une même fonction, il faudrait donc en outre

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_k} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathrm{N}_w}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathrm{N}_w}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}_w = \mathrm{F}_w(u).$$

La relation

$$\sum u_i w_i = 0$$

donne d'ailleurs la valeur de N_w, puisqu'elle peut s'écrire

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} + \mathrm{N}_w \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

Si l'on veut que les w_i, v_i, t_i, ..., dont les rapports sont donnés par les relations (α), soient, en tenant compte des équations (15) qui expriment que les surfaces $u =$ const. ont leurs lignes de courbure coordonnées, les dérivées de fonctions W, V, T, ..., *il faut donc ajouter au système* (15) *les* ($n - 1$) *équations nouvelles*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{N}_w}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \mathrm{N}_w}{\partial x_i} = 0,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{N}_w = -\frac{\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}}{\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2},$$

la fonction w étant complètement définie par un système complet à deux solutions distinctes u et w, dont les coefficients sont précisément les w_i, t_i, ... connus au moyen des dérivées premières et secondes de u.

16. Revenons aux formules établies par M. Darboux (*Syst. orth.*, n^{os} 72, 73); nous y remarquons l'identité

$$\binom{u,\, v}{u}\binom{u,\, w}{u} = \delta_u u \binom{w,\, v}{u,\, u},$$

qui s'écrit, lorsqu'on ordonne par rapport aux puissances des v_i, w_k,

$$(\alpha)\qquad \sum_{i,k} v_i w_k(\delta_u u\, \delta_{u_i} u_k - \delta_u u_i\, \delta_u u_k) = 0,$$

et *qui permet de ramener les équations du premier groupe à la forme*

$$\sum_{i,k} v_i w_k \mathrm{H}_{ik} = 0,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{\mathrm{H}^2} = \delta_u u = \sum_i u_i^2.$$

Cette identité (α) est déduite par M. Darboux d'une relation plus générale où l'on a dû supposer les v_i, w_i, ... proportionnels aux dérivées d'une même fonction, c'est-à-dire n'est établie que dans l'hypothèse où les surfaces $u=$const. font partie d'un système complètement orthogonal, mais *il est manifeste qu'elle subsiste dans tous les cas.*

Nous avons en effet, dans tous les cas,

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i,$$

et par conséquent,

$$\sum_{i,k} u_{ik} u_i v_k = \mu_v \sum_i u_i^2 = \mu_v \delta_u u;$$

on aura de même

$$\sum_{i,k} u_{ik} u_i w_k = \mu_w \delta_u u,$$

et, par suite, en multipliant membre à membre,

$$\left(\begin{matrix} u,\ v \\ u \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} u,\ w \\ u \end{matrix}\right) = \mu_v \mu_w (\delta_u u)^2.$$

Mais, d'autre part, les relations

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i + \mu_v u_i, \qquad \sum_k u_{ik} w_k = \lambda_w w_i + \mu_w u_i$$

donnent, quand on les multiplie membre à membre et qu'on fait la sommation par rapport à i,

$$\binom{v,\ w}{u,\ u} = \sum_i \delta_v u_i \delta_w u_i = \lambda_v \lambda_w \sum_i v_i w_i + \lambda_v \mu_w \sum_i v_i u_i + \lambda_w \mu_v \sum_i w_i u_i + \mu_v \mu_w \sum_i u_i^2,$$

c'est-à-dire simplement

$$\binom{v,\ w}{u,\ u} = \mu_v \mu_w \delta_u u.$$

On a donc bien, dans tous les cas, comme nous l'avons annoncé,

$$\binom{u,\ v}{u}\binom{u,\ w}{u} = \delta_u u \binom{v,\ w}{u,\ u}.$$

Cette remarque nous sera utile pour l'examen du cas particulier où les surfaces $u =$ const. forment une famille de surfaces *parallèles,* c'est-à-dire satisfont à l'équation

$$\delta_u u = 1.$$

Si l'on suppose que les surfaces $u =$ const. sont parallèles, on aura les égalités successives

$$\sum_i u_i^2 = 1, \qquad \sum_i u_i u_{ik} = 0,$$

$$\sum_i u_i u_{ikl} + \sum_i u_{il} u_{ik} = 0,$$

et, par conséquent, on peut conclure des relations

$$\sum_{i,k} u_{ik} u_i v_k = \mu_v \sum_i u_i^2$$

que *tous les coefficients* μ_v, μ_w, ... *sont nuls.* On sait qu'alors aussi toutes les équations du premier groupe de M. Darboux, qui peuvent s'écrire

$$\sum_{i,k} v_i w_k \mathrm{H}_{ik} = 0,$$

sont vérifiées et qu'il n'en est pas de même des équations du second groupe,

$$\sum_{i,k,l} u_{ikl} v_i w_k t_l = 0,$$

qui expriment que les lignes de courbure de chacune des surfaces $u =$ const. sont *coordonnées*.

Comment expliquer ce fait?

Nous avons, dans le cas qui nous occupe,

$$\sum_k u_{ik} v_k = \lambda_v v_i$$

et aussi

$$\sum_k U_{ik} v_k = L_v v_i + M_v u_i.$$

Mais ici, d'après une égalité écrite plus haut,

$$U_{ik} = (\delta_u u_{ik} - 2\delta_{u_i} u_k) = -3\delta_{u_i} u_k = -3\sum_j u_{ij} u_{kj};$$

il en résulte donc

$$\sum_k U_{ik} v_k = -3\sum_{j,k} u_{ij} u_{kj} v_k,$$

ou encore

$$\sum_k U_{ik} v_k = -3\sum_j u_{ij} \lambda_v v_j = -3\lambda_v^2 v_i.$$

On a par suite

$$-3\lambda_v^2 v_i = L_v v_i + M_v u_i,$$

et il est facile de montrer que M_v *est nul :* cela résulte de la suite d'égalités

$$\sum_{i,k} U_{ik} u_i v_k = -3\lambda_v^2 \sum_i u_i v_i = 0 = L_v \sum_i u_i v_i + M_v \sum_i u_i^2.$$

Les fonctions $L_1, \ldots, L_{n-1}$ sont donc telles que

$$L_v = -3\lambda_v^2,$$

et *cela suffit à expliquer le paradoxe apparent.*

On connaît en effet l'identité algébrique

$$(a-b)(b-c)(c-a)+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0,$$

et il suffira de remplacer L_v, L_w, L_t, ... par leurs valeurs dans les équations (12),

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i w_i\delta_t v_i[3(\lambda_t-\lambda_v)(\lambda_v-\lambda_w)(\lambda_w-\lambda_t)\\&\qquad+L_w(\lambda_v-\lambda_t)+L_t(\lambda_w-\lambda_v)+L_v(\lambda_t-\lambda_w)]=0,\end{aligned}\right.$$

pour reconnaître que *tous les seconds facteurs sont identiquement nuls.*

On ne peut donc pas conclure, *dans ce cas particulier,* des conditions d'intégrabilité des équations du premier groupe, les relations

$$\sum_i w_i\delta_t v_i=0$$

qui constituent le second groupe d'équations de M. Darboux, c'est-à-dire que les équations du premier groupe ne sont pas suffisantes pour que les surfaces

$$u(x_1, \ldots, x_n)=\text{const.}$$

fassent partie d'un système complètement orthogonal.

17. Les résultats analytiques que nous venons d'obtenir conduisent à quelques questions qu'il serait intéressant d'élucider; nous nous bornerons ici à les énoncer.

On a établi que les équations qui constituent le premier groupe de M. Darboux forment un système différentiel *décomposable,* en ce sens qu'on obtient les conditions d'intégrabilité de ces équations en égalant à zéro un produit de deux facteurs, ce qui donne lieu à des conclusions différentes suivant qu'on annule l'un ou l'autre de ces facteurs. Il en résulte que le système initial conduit à un très grand nombre de systèmes distincts : les extrêmes, qu'on obtient en annulant tous les facteurs de même type, sont compatibles et nous connaissons la signification géométrique de l'un d'eux, relatif aux systèmes complètement orthogonaux. Quelle est celle de l'autre? Combien y a-t-il de systèmes compatibles distincts? Comment les obtient-on? Quelle est leur signification géométrique?

Quelle est également la signification géométrique de l'équation en L, analogue à celle qui détermine les directions principales sur une variété

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

que nous avons rencontrée?