

# BULLETIN DE LA S. M. F.

BARRÉ

## Sur une propriété des surfaces cerclées

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 36 (1908), p. 58-68

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1908\\_\\_36\\_\\_58\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__58_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SURFACES CERCLÉES;**

PAR M. BARRÉ.

Dans deux Communications insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, les 8 et 29 avril 1907, j'ai défini deux sortes de points centraux sur les surfaces engendrées par une hélice circulaire, savoir les points centraux de première espèce et ceux de seconde espèce, et j'ai fait observer que ces définitions s'appliquaient aux surfaces cerclées. Le Mémoire actuel a pour

objet le développement des indications contenues dans les Notes précitées au sujet de ces dernières surfaces.

1. *Définitions.* — J'appelle *point central de première espèce* sur une surface cerclée tout point d'intersection du cercle générateur avec la caractéristique de son plan. Le lieu de ces points constituera *la ligne de striction de première espèce* de la surface.

Ces points ont été étudiés par M. Demartres dans son Mémoire sur les surfaces cerclées (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1885). En chacun d'eux le plan du cercle touche la surface cerclée, ou encore le cercle générateur rencontre le cercle infiniment voisin.

J'appelle *point central de seconde espèce* sur une surface cerclée tout point pour lequel la distance du cercle générateur au cercle infiniment voisin est stationnaire; en d'autres termes, tout point pour lequel la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des cercles générateurs est nulle. Le lieu de ces points sera *la ligne de striction de seconde espèce*.

2. Ces définitions étant posées, convenons de laisser de côté les surfaces engendrées par des cercles imaginaires dont les plans enveloppent le cercle de l'infini; dans ces conditions, nous pouvons rapporter notre cercle à un système d'axes mobiles dont l'axe des  $x$  soit parallèle à la caractéristique de son plan, dont l'origine soit en son centre et dont l'axe des  $z$  soit perpendiculaire à son plan.

Désignons par  $u, v, w$  les composantes de la translation élémentaire du trièdre mobile suivant les trois axes, et par  $p, (q = 0)$  et  $r$  celles de sa rotation:  $u, v, w, p$  et  $r$  dépendent d'un même paramètre  $t$  dont dépend également le rayon  $\rho$  du cercle. Les équations de celui-ci dans notre système d'axes seront

$$(1) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = 0.$$

*a.* Les points centraux de première espèce (<sup>1</sup>) sont les intersections du cercle générateur avec la droite représentée dans son plan

---

(<sup>1</sup>) Pour établir ce résultat ainsi que le suivant, il suffit de faire  $k = 0$  dans les formules générales des Communications précitées. On pourra aussi se reporter au Mémoire de M. Demartres.

par l'équation

$$(2) \quad w + py = 0.$$

b. Les points centraux de seconde espèce sont les points communs au cercle générateur et à l'hyperbole équilatère passant en son centre et qui a pour équation

$$(3) \quad (ux + vy + \rho\rho')(vx - uy) + p\rho^2x(w + py) = 0.$$

Ayant rappelé ces résultats, nous allons résoudre quelques problèmes relatifs aux points centraux :

3. PROBLÈME I. — *Trouver les surfaces cerclées dont la ligne de striction de première espèce fait entièrement partie de celle de deuxième espèce.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour toute valeur du paramètre  $t$ , toute solution commune à l'équation (2) et à l'équation (4),

$$(4) \quad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

satisfasse à l'équation (3) ou encore à l'équation

$$(5) \quad (ux + vy + \rho\rho')(vx - uy) = 0.$$

Ceci peut arriver de quatre manières différentes :

1° La droite représentée par l'équation (2) coïncide avec la droite

$$ux + vy + \rho\rho' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait, pour toute valeur de  $t$ ,

$$(6) \quad u = 0, \quad vw = p\rho\rho'.$$

Ces relations fonctionnelles définissent les *enveloppes de sphères*. La ligne de striction de première espèce se réduit à l'arête de rebroussement de la surface. Celle de seconde espèce comprend, en outre, le lieu engendré par les deux points de la génératrice situés sur le diamètre perpendiculaire à la corde caractéristique du plan du cercle mobile.

2° La droite représentée par l'équation (2) coïncide avec la

droite

$$v x - u y = 0.$$

Ceci entraîne les relations

$$(7) \quad v = w = 0.$$

On trouve ainsi *les surfaces engendrées par un cercle dont le plan reste osculateur au lieu de son centre.*

Ici la ligne de striction de première espèce est bien une ligne de points pour lesquels le plan tangent à la surface se confond avec le plan de la génératrice. Cette ligne est engendrée par les intersections du cercle mobile avec la tangente au lieu de son centre. La ligne de seconde espèce comprend, en outre, le lieu des points centraux situés sur la corde perpendiculaire à la tangente précédente et dont l'équation est

$$(p^2 \rho^2 - u^2)x - u \rho \rho' = 0.$$

Si cette corde est rejetée à l'infini, cette partie de la ligne de striction se réduit au cercle ombilical et, en laissant de côté cette ligne singulière, on peut dire que, dans ce cas, caractérisé par la relation

$$u^2 = p^2 \rho^2,$$

il y a coïncidence complète des deux lignes de striction. Nous verrons que ce n'est pas le seul cas où il en soit ainsi; nous reviendrons plus loin sur cette question.

3° L'équation (5) est une identité. On est conduit aux conditions nécessaires et suffisantes

$$(8) \quad u = v = 0.$$

On trouve ainsi *les surfaces engendrées par un cercle dont le plan se meut normalement au lieu de son centre.*

Si l'on excepte les surfaces canaux qui, d'ailleurs, rentrent dans la série, déjà mentionnée, des enveloppes de sphères, la ligne de striction de première espèce, comme dans le cas précédent, n'est pas une arête de rebroussement. La ligne de seconde espèce se complète par l'adjonction à la première du lieu des extrémités du diamètre perpendiculaire à la caractéristique du plan du cercle générateur.

4° Enfin, et c'est le cas le plus délicat, la droite (2) coupe le cercle en un point appartenant à la droite

$$(9) \quad \rho\rho' + ux + vy = 0,$$

et en un autre point appartenant à la droite

$$(10) \quad vx - uy = 0.$$

Si ces deux points sont distincts, ce qui arrivera toujours quand les droites (2), (9) et (10) ne seront pas concourantes, ces conditions sont suffisantes. Dans le cas contraire, il peut y avoir exception; le second point d'intersection du cercle et de la droite (2) ne coïncidera avec un point de seconde espèce que si cette droite coïncide avec l'une des droites (9) ou (10). Une étude directe s'imposera donc pour lever cette difficulté.

En exprimant que les équations (2), (4) et (9) ont une solution commune, on trouve aisément (1) la condition

$$(11) \quad (p^2\rho^2 - w^2)u^2 - (p\rho\rho' - vw)^2 = 0.$$

C'est la condition pour que le cercle mobile ait une enveloppe. Comme on le savait, d'après le théorème général VIII signalé dans les *Comptes rendus* du 20 mai 1907, on devait trouver cette solution. Le point correspondant décrit une enveloppe du cercle générateur.

En associant les équations (2), (4) et (10) on obtient la condition

$$(12) \quad p^2v^2\rho^2 = w^2(u^2 + v^2).$$

Sous la réserve que les droites (2), (9) et (10) ne soient pas concourantes, ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Développons la relation (11) et remplaçons-y  $w^2(u^2 + v^2)$  par sa valeur tirée de l'équation (12). On obtient l'équation

$$(13) \quad 2\rho'vw = p\rho(\rho'^2 - u^2 + v^2).$$

Tirant alors  $w$  de cette relation et substituant dans l'équa-

(1) Je laisse de côté le cas où  $p = 0$ , c'est-à-dire où le plan du cercle reste parallèle à lui-même. La discussion est alors très simplifiée. Je laisse au lecteur le soin de le faire, me bornant à en énoncer ci-après les résultats.

tion (12), on obtient successivement

$$4 \nu^4 \rho'^2 = (u^2 + \nu^2)(\rho'^2 - u^2 + \nu^2)^2$$

ou

$$4 \rho'^2 \nu^4 = (u^2 + \nu^2)[(u^2 + \nu^2 - \rho'^2) - 2\nu^2]^2$$

ou

$$(12 \text{ bis}) \quad (u^2 + \nu^2 - \rho'^2)[(u^2 + \nu^2)(u^2 + \nu^2 - \rho'^2) - 4u^2\nu^2] = 0.$$

Réservant la solution

$$u^2 + \nu^2 - \rho'^2 = 0,$$

on obtient *les surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle défini par les relations*

$$(14) \quad \begin{cases} 2\rho'\nu w = p\rho(\rho'^2 + \nu^2 - u^2), \\ (u^2 + \nu^2)(u^2 + \nu^2 - \rho'^2) = 4u^2\nu^2. \end{cases}$$

Ce mouvement n'est pas simple et la classe de surfaces ainsi définie ne paraît pas jouir de propriétés particulièrement intéressantes, sauf celle qui fait l'objet de cette étude. Je ne m'arrêterai pas à la définir autrement : toutefois je montrerai qu'elle constitue bien une solution du problème; autrement dit, que l'on ne se trouve pas dans le cas d'exception signalé.

La condition de concours des trois droites (2), (9) et (10) est

$$(15) \quad w(u^2 + \nu^2) = p\nu\rho\rho',$$

qui, rapprochée de l'équation (12), donne la relation (1)

$$(16) \quad p\nu\rho = w\rho'.$$

Or la coexistence des conditions (16) et (13) conduit à la relation

$$(17) \quad u^2 + \nu^2 = \rho'^2.$$

C'est la solution réservée de l'équation (12 bis). Elle présente le caractère exceptionnel signalé et demande une étude directe sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Cherchons si, parmi les surfaces définies par les équations (14),

(1) On laisse de côté l'hypothèse  $\nu = 0$ , qui conduit à une solution rentrant dans la solution générale.

il n'y en a pas qui présentent ce caractère. En rapprochant l'équation (17) de la seconde des équations (14), on trouve la condition

$$u^2 v^2 = 0.$$

L'hypothèse  $v = 0$  rapprochée de la relation (16) donne  $\rho' = 0$ ; d'où, par suite,  $u = 0$ . On trouve ainsi *les surfaces canaux* déjà rencontrées. On sait qu'elles n'ont rien d'exceptionnel au point de vue de la question actuelle.

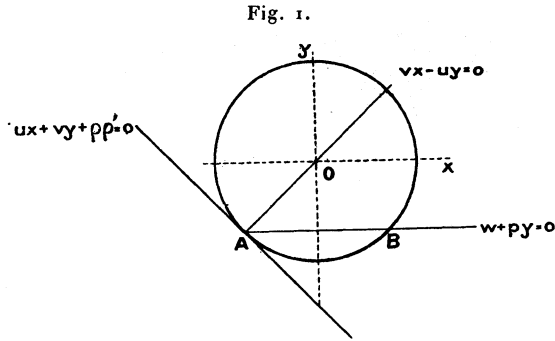
L'hypothèse  $u = 0$  conduirait de même aux relations

$$v = \rho' \varepsilon, \quad w = p \rho \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

qui définissent *les surfaces engendrées par le cercle osculateur d'une courbe*, surfaces appartenant à la classe des enveloppes de sphères sans caractère exceptionnel.

Il nous reste à examiner le cas exceptionnel. L'interprétation géométrique en est facile.

La droite (10) est un diamètre (AO) du cercle générateur; la droite (9) est la tangente à une extrémité A de ce diamètre,



extrémité par laquelle passe la droite (2) qui coupe le cercle en un second point B. Ce point B est différent de A et, par suite, est bien un point exceptionnel, sauf quand AO est parallèle ou perpendiculaire à la caractéristique. Dans ces deux cas particuliers, on retombe sur les surfaces qui viennent d'être étudiées (surfaces canaux et lieux de cercles osculateurs).

#### 4. PROBLÈME II. — Déterminer les surfaces dont la ligne de



*striction de seconde espèce fait complètement partie de celle de première espèce.*

L'intersection de l'hyperbole et du cercle doit se réduire aux deux points d'intersection de ce cercle et de la droite (2) dont l'équation n'est pas une identité.

Cela ne peut arriver que si l'hyperbole touche le cercle en deux points qui sont précisément sur la droite (2). Sans développer de calculs et en ne considérant que les éléments réels, on voit que le fait ne peut se produire ici, l'hyperbole passant au centre du cercle, à moins toutefois que cette hyperbole ne se décompose. Dans tous les cas, d'ailleurs, tous les points d'intersection de la droite (2) et du cercle seront sur l'hyperbole. Donc *les surfaces cherchées seront à coïncidence complète.*

5. PROBLÈME III. — *Déterminer les surfaces cerclées dont les deux lignes de striction coïncident complètement.*

L'hyperbole déterminant les points de seconde espèce doit se réduire à deux droites : l'une d'elles sera nécessairement la droite (2), sans quoi la coïncidence complète n'existerait pas.

Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante ; car les deux points d'intersection du cercle et de l'autre droite, perpendiculaire à la droite (2), n'appartiennent pas en général à celle-ci. Cela n'arrivera que si cette deuxième droite est tangente à la circonférence, la droite (2) étant le diamètre de son point de contact.

Si l'on fait abstraction d'une branche de ligne de striction confondue avec le cercle de l'infini, on pourra encore ajouter un cas : celui où la seconde droite est la droite de l'infini du plan de la génératrice.

*Premier cas.* — La droite (2) est un diamètre, donc  $w = 0$ . La droite  $y = 0$  doit faire partie de l'hyperbole (3) ; or ceci exige soit  $v = 0$ , soit  $u = \rho' = 0$ . Mais alors la seconde droite dont se compose l'hyperbole est le diamètre  $x = 0$  qui ne réalise pas les conditions imposées (tangence à l'extrémité de  $y = 0$ ).

La double hypothèse

$$w = 0, \quad v = 0$$

nous donne une surface engendrée par un cercle dont le plan reste

osculateur au lieu de son centre. La seconde droite à laquelle se réduit l'hyperbole est représentée par l'équation, déjà trouvée,

$$(18) \quad (p^2 \rho^2 - u^2)x - u\rho\rho' = 0;$$

elle sera tangente à une extrémité du diamètre  $y = 0$  si la droite (18) est à une distance du centre égale en valeur absolue à  $\rho$ , ce qui donne la condition

$$u\rho' = \pm (p^2 \rho^2 - u^2).$$

Si l'on prend comme variable l'arc du lieu des centres, cette relation devient

$$(19) \quad \frac{d\rho}{ds} = \pm \left( \frac{\rho^2}{\tau^2} - 1 \right),$$

$\tau$  désignant le rayon de torsion du lieu des centres.

*Deuxième cas.* — La seconde droite est la droite de l'infini. Ceci exige la disparition des termes du second degré dans l'équation de l'hyperbole, d'où

$$(20) \quad p^2 \rho^2 + v^2 - u^2 = 0,$$

$$(21) \quad uv = 0.$$

Si l'on fait abstraction des génératrices imaginaires, on peut, sans aller plus loin, négliger la solution  $u = 0$ . Il nous restera les conditions

$$v = 0, \quad p\rho = \pm u.$$

Enfin la condition pour que la droite (2) fasse partie de l'hyperbole donne immédiatement

$$w = 0.$$

Nous écrirons ces conditions en ne conservant qu'un seul signe

$$v = w = 0, \quad \rho = \tau.$$

On remarquera que, si  $\tau$  est une constante, il en sera de même de  $\rho$  et l'équation de l'hyperbole se réduira à une identité. Ces résultats sont résumés dans la proposition suivante :

*Les seules surfaces cerclées dont les lignes de striction des deux espèces coïncident complètement sont celles qu'engendre*

un cercle dont le plan est osculateur au lieu des centres et dont le rayon  $\rho$  égale le rayon de torsion  $\tau$  de ce lieu, ou bien est lié à  $\tau$  par la relation différentielle

$$\frac{d\rho}{ds} = \pm \frac{\rho^2 - \tau^2}{\tau^2},$$

où  $s$  désigne l'arc du lieu du centre.

Le cas où le lieu du centre est à torsion constante est particulièrement intéressant. La première série de surfaces ( $\rho = \tau$ ) présente un caractère exceptionnel : *la coïncidence n'est plus complète*, car la ligne de striction de première espèce est bien déterminée et celle de seconde indéterminée. Ce résultat s'explique facilement si l'on remarque que ces surfaces sont précisément celles pour lesquelles les trajectoires orthogonales des cercles générateurs sont des géodésiques, surfaces signalées par M. Demartres dans le Mémoire déjà cité (*Annales de l'École Normale*, 1885, p. 151).

6. *Remarque.* — Dans les problèmes précédents, on a laissé de côté le cas où le plan du cercle générateur reste parallèle à un plan fixe. On trouve alors les résultats suivants :

1° *La ligne de striction de première espèce est rejetée à l'infini* (sauf le cas où, le cercle restant dans un plan fixe, cette ligne est alors indéterminée).

2° *La ligne de striction de seconde espèce se compose de quatre branches.* Deux d'entre elles sont engendrées par des points diamétralement opposés du cercle générateur, situés sur un diamètre dont la projection orthogonale sur le plan d'un des cercles mobiles est la tangente à la projection du lieu des centres. Dans chaque position du cercle mobile, les deux autres points centraux sont sur une corde perpendiculaire à ce diamètre.

3° *Si la projection orthogonale du cercle générateur sur un plan parallèle au sien est, dans chacune de ses positions, le cercle osculateur d'une courbe (c) du plan de projection, la ligne de striction de seconde espèce se réduit à deux branches, dont une triple.* Cette dernière est la courbe qui se projette suivant la courbe (c). L'autre branche est le lieu des points diamétralement opposés aux points de la branche triple.

Un exemple très simple de ce cas est celui où  $(c)$  se réduit à un point : alors le cercle mobile rencontre une droite fixe  $(\Delta)$  perpendiculaire à la direction de son plan et son centre décrit une droite rencontrant  $(\Delta)$ . La surface correspondante est un cône du second degré dont une génératrice  $(\Delta)$  est perpendiculaire à un plan de section cyclique : cette génératrice est la branche triple dont il vient d'être question.

7. Pour terminer cet exposé, j'appliquerai aux surfaces cerclées la définition du paramètre de distribution que j'ai donnée <sup>(1)</sup> pour les surfaces engendrées par une hélice circulaire.

*Définition.* — Désignant par  $V$  l'angle du plan tangent avec le plan du cercle générateur, nous appellerons *paramètre de distribution* en un point d'une génératrice l'expression

$$\frac{\partial \operatorname{tang} V}{\partial \varphi}.$$

Cette expression ne conserve une valeur constante sur chaque génératrice que dans le cas des enveloppes de sphères, et dans ce cas sa valeur est nulle. On a en effet

$$(22) \quad \operatorname{tang} V = \frac{w + p \rho \sin \varphi}{u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho'}.$$

Si le paramètre de distribution conserve même valeur sur chaque génératrice, il existe une fonction  $f(t)$  telle que l'on ait

$$\frac{\partial \operatorname{tang} V}{\partial \varphi} = f(t)$$

ou

$$(23) \quad \operatorname{tang} V = \varphi f(t).$$

La comparaison des formules (22) et (23) entraîne  $f(t) = 0$ . Donc l'angle  $V$  sera constant le long de chaque génératrice, propriété caractéristique d'une enveloppe de sphères.

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, 21 mai 1907, p. 1097.