BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DE MONTCHEUIL

Détermination des surfaces qui admettent une surface moyenne donnée

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 40-58

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__40_1>

DÉTERMINATION DES SURFACES QUI ADMETTENT UNE SURFACE MOYENNE DONNÉE;

PAR M. DE MONTCHEUIL.

Nous nous proposons, dans cette étude, de fixer la nature de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème, de rappeler en les complétant et les coordonnant quelques-uns des résultats acquis, et enfin de déterminer une nouvelle catégorie de solutions. Nous essayerons, en effet, de déterminer l'équation qui définit les surfaces admettant un cylindre pour surface moyenne.

I. — Formation de l'équation aux dérivées partielles.

Soient X, Y, Z les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque d'une des surfaces cherchées ; x, y, z celles de la surface moyenne supposée donnée ; ρ la demi-somme des rayons de courbure de la première surface.

Cette surface est l'enveloppe du plan

$$(1)\qquad (u+u_1)X+i(u_1-u)Y+(uu_1-1)Z+\xi=0,$$

ξ désignant une fonction quelconque des variables u, u_1. Si l'on effectue le calcul, on trouve pour expressions des valeurs de x, y, z, ρ (¹)

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}[(u+u_1)s-p-q], & z &= \frac{1}{2}[(uu_1-1)s-up-u_1q+\xi],\\ y &= \frac{1}{2}[(u_1-u)s-p+q], & \rho &= \frac{1}{2}[(uu_1-1)s-up-u_1q+\xi].\end{aligned}\right.$$

Portons ces expressions de x, y, z dans l'équation donnée de la surface moyenne, et nous obtiendrons une relation en ξ, p, q, s, u, u_1 ; p, q, r, s, t désignant les dérivées premières et secondes de ξ en u et u_1.

Cette équation peut s'écrire

$$\Phi(\xi, p, q, s, u, u_1)=0.$$

En la supposant résolue par rapport à s, il vient

$$s-f(u, u_1, \xi, p, q)=0 \quad (²).$$

Ainsi donc, dans le cas général, l'équation cherchée est une équation de Monge et d'Ampère, dont les deux systèmes de caractéristiques peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} du &= 0, & du_1 &= 0,\\ dp-f\,du_1 &= 0, & dq-f\,du &= 0,\\ d\xi-p\,du-q\,du_1 &= 0, & d\xi-p\,du-q\,du_1 &= 0.\end{aligned}$$

(¹) Thèse de Doctorat, p. 8, Gauthier-Villars, 1902.

(²) Goursat, *Équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 50.

On satisfait au premier système, par exemple, en posant

$$u = \text{const.}, \qquad u_1 = \text{const.}, \qquad \xi = \text{const.}, \qquad p = \text{const.}$$

La multiplicité caractéristique formée de ces éléments représente une véritable intégrale, mais qui conduit à un résultat illusoire. On peut alors effectuer la transformation de Legendre définie par les formules

$$u = p', \qquad u_1 = q', \qquad p = u', \qquad q = u'_1, \qquad \xi = p'u' + q'u'_1 - \xi';$$

et l'on trouve

$$s' + (s'^2 - r't')f(p', q', p'u' + q'u'_1 - \xi', u', u'_1) = 0.$$

Cette nouvelle équation admet bien toutes les intégrales de l'équation $q' =$ const. qui sont de véritables intégrales.

On pourra donc chercher à résoudre cette équation selon le procédé classique par la méthode des caractéristiques.

Mais nous préférons élargir le problème et le présenter sous un aspect nouveau qui nous suggérera des solutions plus étendues que celles développées jusqu'ici.

Rotation d'une surface dans l'espace à quatre dimensions [1]. — La symétrie des quatre expressions définies par le système (2) nous engage à les considérer comme les quatre coordonnées d'un point dans l'espace E_4.

Cette symétrie s'accuse davantage lorsque l'on différentie le système (2) par rapport à u, puis le système des dérivées obtenues, par rapport à u_1. On trouve alors

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u_1}}{u + u_1} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial u_1}}{i(u_1 - u)} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial u_1}}{uu_1 - 1} = \frac{\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial u_1}}{uu_1 + 1} = \frac{\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial u_1}}{2}.$$

On voit que les quatre premiers numérateurs s'annulent à la fois et que, par conséquent, dans cette hypothèse, les quatre coordonnées x, y, z, ρ sont à la fois définies par une même équation à invariants égaux. Si l'on tient compte de la signification des paramètres u et u_1, on pourra énoncer cette proposition :

Lorsque l'une quelconque des coordonnées de la surface

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXXI, 1903.

moyenne ou encore la demi-somme des rayons de courbure d'une surface est représentée par la somme de deux fonctions respectives des deux paramètres des génératrices rectilignes de la représentation sphérique de cette dernière surface, il en est de même des trois autres quantités.

On peut dire encore :

Quand une combinaison linéaire quelconque des quatre coordonnées x, y, z, ρ de l'espace E_4 est représentée par la somme de deux fonctions respectives des deux paramètres précédemment définis, il en est de même de toutes les combinaisons linéaires de ces même quantités.

Si l'on considère les coordonnées de l'espace E_4 comme représentées par les quatre quantités x, y, z, $-i\rho$, l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0$$

entraîne les relations

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left[\frac{\partial(i\rho)}{\partial u}\right]^2 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2 + \left[\frac{\partial(i\rho)}{\partial u_1}\right]^2 = 0.$$

Par une analogie naturelle, ces deux relations peuvent être considérées comme définissant les courbes minima de l'espace E_4, et les coordonnées x, y, z, $-i\rho$ de ce même espace peuvent être considérées comme décrivant la surface minima de l'espace E_4 qu'on obtiendra en intégrant l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

On constate que, lorsque cette équation est satisfaite, les quantités $x, y, z, -i\rho$ définies par le système (2) sont liées dans l'espace E_4 par un très grand nombre de relations analogues à celles qui relient les coordonnées x, y, z des surfaces minima dans l'espace E_3. Les surfaces qui admettent un plan pour surface moyenne et les surfaces imaginaires de Monge rentrent dans cette classe et fournissent, par conséquent, autant de surfaces minima de l'espace E_4 [1].

Cette extension à l'espace E_4 de la notion des surfaces et des courbes minima de l'espace E_3 ne contredit en rien une généralisation analogue de cette même notion exposée par Cayley et, après lui, par M. Darboux [2]. Le point de vue est différent, mais toujours inspiré par la multiplicité des analogies.

Mais poussons plus loin l'analogie des fonctions x, y, z, $-i\rho$. Soit une fonction φ_m définie par la relation

$$(u+u_1)a_m+i(u_1-u)b_m+(uu_1-1)c_m+i(uu_1+1)d_m+\varphi_m=0, \tag{4}$$

a_m, b_m, c_m, id_m désignant autant de constantes; u, u_1 les variables précédemment définies. Cela posé, donnons à l'indice m les quatre valeurs successives 1, 2, 3, 4 de manière à former ainsi quatre fonctions φ_m et seize constantes a_1, b_1, ..., a_2, b_2, etc.

Assujettissons les quatre fonctions φ_m à satisfaire identiquement à la relation

$$\sum_{m=1}^{m=4}\varphi_m^2=0. \tag{5}$$

Un calcul élémentaire montre que cette identité entraîne pour les seize constantes le système

$$\left\{\begin{aligned} &a_m^2+b_m^2+c_m^2+d_m^2=\text{const.},\\ &a_m a_n+b_m b_n+c_m c_n+d_m d_n=0,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

m et n désignant toujours l'une des valeurs 1, 2, 3, 4.

Nous ferons la constante qui figure dans le premier groupe des relations (6) égale à l'unité.

Ces préliminaires établis, considérons quatre fonctions θ_m définies par la relation

$$\theta_m=\frac{1}{2}\left(\varphi_m\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1}-\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\frac{\partial\xi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u_1}+\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1}\xi\right). \tag{7}$$

Si l'on pose

$$a_1=b_2=c_3=d_4=1,$$
$$b_1=c_1=d_1=a_2=c_2=d_2=a_3=b_3=d_3=a_4=b_4=c_4=0,$$

---

[1] *Voir* Thèse de Doctorat, Gauthier-Villars, 1902.

[2] Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, Chap. XIV, p. 471.

système de valeurs des constantes qui vérifie les équations (6), il vient

$$\theta_1 = x, \qquad \theta_2 = y, \qquad \theta_3 = z, \qquad \theta_4 = i\rho.$$

Sans entrer dans le détail des calculs du système précédent et du système (7), on déduit aisément que les fonctions θ_m sont des fonctions linéaires des quantités x, y, z, $-i\rho$ et réciproquement. D'ailleurs, les coefficients de ces quantités dans le système (7) vérifient le système (6), c'est-à-dire un système dans l'espace E_4 qui, dans l'espace E_3, serait celui des cosinus directeurs relatifs à la rotation d'un trièdre mobile.

On retrouverait, en effet, ce système en posant

$$a_4 = b_4 = c_4 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0,$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \qquad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0,$$

$$a_3 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \qquad a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0.$$

On retrouve donc bien la rotation de l'espace E_3 comme cas particulier du système (6) relatif à l'espace E_4. Il est donc naturel de considérer le système (6) comme définissant une rotation dans l'espace E_4. Dans cet espace, une surface sera considérée comme déplacée sans déformation, tandis qu'en réalité, considérée dans l'espace E_3, la surface sera à la fois déplacée autour d'un point fixe et déformée.

Les fonctions θ_m définies plus haut vérifient la relation

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial u \, \partial u_1} = \frac{\varphi_m}{2} \frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \, \partial u_1^2},$$

et s'annulent, par conséquent, simultanément toutes les fois que l'on a

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \, \partial u_1^2} = 0.$$

On peut dire, par analogie avec l'espace E_3, que *tout système de coordonnées de l'espace* E_4 *relatif à une surface minima de cet espace décrit un système conjugué sur cette surface quand on choisit les paramètres* u *et* u_1, puisque, en effet, *les quatre* *coordonnées vérifient une même équation aux dérivées partielles,* d'ailleurs *à invariants égaux* [1].

Généralisation du problème. — Nous nous sommes proposé, au début, de déterminer l'ensemble des surfaces qui admettent une surface moyenne donnée

$$F(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Nous avons vu que les quantités x, y, z, $-i\rho$ peuvent être considérées comme des fonctions linéaires quelconques de quatre fonctions θ_m vérifiant le système (7).

---

(1) Signalons encore une propriété des surfaces minima de l'espace E_4.

M. Raffy, élargissant la notion de réseau isotherme, introduit (*Bull. Soc. math. de France,* t. XXXV, p. 259; 1907) la notion de *réseau isotherme relativement à un réseau donné.* Toutes les fois que deux réseaux de paramètres respectifs (α, β) et (u, v) seront liés par la relation

$$d\alpha\, d\beta = \varphi(u, v)\,(du^2 + dv^2),$$

le réseau de paramètres (u, v) sera dit *isotherme* relativement au réseau de paramètres (α, β), quelle que soit la signification géométrique de ces paramètres.

Entre autres propriétés de ces systèmes de réseaux, l'auteur montre que toute famille de courbes dont l'équation est de la forme

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

appartient à un réseau isotherme relativement au réseau des lignes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Il indique quelques catégories de familles définies par une équation de cette nature et jouissant par conséquent de la propriété indiquée.

Nous pouvons à notre tour indiquer une catégorie très étendue de familles de courbes définies par une pareille équation. Cet ensemble de courbes s'obtient en égalant à une constante une fonction linéaire à coefficients quelconques des coordonnées des courbes minima tracées sur une surface minima de l'espace E_4.

Il suffit de considérer une quelconque des fonctions θ_m définies par le système (7), où ξ représente la solution la plus générale de l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2\, \partial u_1^2} = 0.$$

Nous trouvons alors $\theta_m = U + V$. Si donc nous posons $\eta_m = U - V$, il vient

$$d\theta_m\, d\eta_m = dU^2 + [d(iV)]^2,$$

ce qui prouve bien que $\theta_m = \text{const.}$ est une famille de l'espèce considérée.

L'équation (8) pourra donc prendre la forme

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 0. \tag{9}$$

Il est vrai que les quatre fonctions θ_m se groupent ici en trois fonctions linéaires représentant les trois quantités x, y, z. Mais rien ne nous empêche de lever cette restriction, et de poser directement une équation en θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 qui, dans le cas particulier, deviendra

$$\psi(x, y, z, -i\rho) = 0. \tag{10}$$

Remplaçant x, y, z, $-i\rho$ par leurs valeurs tirées du système (2), on aura

$$\chi(s, p, q, \xi, u, u_1) = 0. \tag{11}$$

Il est facile d'interpréter l'équation (10). *Elle définit une relation entre les coordonnées de la surface moyenne d'une surface cherchée et la demi-somme des rayons de courbure de celle-ci.*

Nous avons donc bien une généralisation du problème proposé au début. Une fois ξ défini par (11), nous porterons la valeur de ξ et de ses dérivées dans les quatre fonctions θ_m définies par le système (7), et nous obtiendrons ainsi les quatre fonctions θ_m, que nous pourrions à volonté interpréter dans l'espace E_4 ou dans l'espace E_3.

Arête de rebroussement d'une développable isotrope dans l'espace E_4. — Poursuivons les recherches de notre méthode d'extension des propriétés de l'espace E_3 à l'espace E_4.

Soit, dans l'espace E_3, un plan isotrope à un paramètre variable défini par l'équation

$$F = 0.$$

Si nous écrivons le système

$$F = 0, \qquad dF = 0, \qquad d^2F = 0, \tag{12}$$

les différentielles se rapportant au paramètre variable, et les coordonnées étant traitées comme des constantes dans la différentiation, le système (12) définira l'arête de rebroussement de la développable isotrope dans l'espace E_3.

Cela posé, imaginons un plan isotrope de l'espace E_4 à deux paramètres variables. Désignons toujours par $F = 0$ son équation et interprétons le système (12) dans l'espace E_4 d'après les mêmes règles que nous avons adoptées dans l'espace E_3. Nous obtiendrons ainsi un système que nous considérerons comme définissant l'arête de rebroussement de la développable isotrope dans l'espace E_4. Il est bien entendu que nous différentions F en regardant les coordonnées comme constantes et les deux paramètres variables comme indépendants.

Formons d'abord l'équation du plan isotrope dans l'espace E_4. Si nous nous plaçons d'abord dans l'espace E_3, X, Y, Z désignant un point de la surface cherchée, on a, en conservant la notation précédente,

$$X = x + \frac{u + u_1}{1 + uu_1} i\rho, \qquad Y = y + i\frac{u_1 - u}{1 + uu_1} i\rho, \qquad Z = z + \frac{uu_1 - 1}{1 + uu_1} i\rho.$$

Alors l'équation

$$(u + u_1)X + i(u_1 - u)Y + (uu_1 - 1)Z + \xi = 0,$$

qui définit le plan tangent à une surface quelconque de l'espace E_3, prend la forme

$$(13)\quad (u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + i(uu_1 + 1)\rho + \xi = 0.$$

Telle est l'équation du plan isotrope à deux paramètres variables u, u_1 de l'espace E_4. On vérifie, en effet, que la somme des carrés des coefficients des coordonnées est égale à 0.

Formons donc le système analogue au système (12)

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ dF &= \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u_1} du_1 = 0, \\ d^2 F &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{d^2 F}{\partial u\, \partial u_1} du\, du_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = 0, \end{aligned}$$

u, u_1 étant considérés comme indépendants. On obtient le système

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{l} (u + u_1)x + i(u_1 - u)y + (uu_1 - 1)z + 1(uu_1 + 1)\rho + \xi = 0, \\ x - iy + u_1(z + i\rho) + p = 0, \qquad x + iy + u(z + i\rho) + q = 0, \\ z + i\rho + s = 0, \qquad r = 0, \qquad t = 0. \end{array} \right.$$

On a encore

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} (u+u_1)\,dx+i(u_1-u)\,dy+(uu_1-1)\,dz+i(uu_1+1)\,d\rho &= 0,\\ dx-i\,dy+u_1(dz+i\,d\rho) &= 0,\\ dx+i\,dy+\;u\,(dz+i\,d\rho) &= 0,\\ dz+i\,d\rho &= 0. \end{aligned}\right.$$

Or, du système (15), on déduit

$$dx^2+dy^2+dz^2+d(i\rho)^2=0\,;$$

x, y, z, $-i\rho$ sont donc bien les coordonnées d'une courbe minima de l'espace E_4, courbe dont les coordonnées sont définies par les quatre premières équations du système (14). Vu la manière dont on l'a obtenue, on peut donc bien la considérer comme l'arête de rebroussement d'une développable isotrope de l'espace E_4.

Si nous appelons arête de rebroussement de cet espace un ensemble de points de multiplicité un, nous devons nous contenter de ces quatre premières équations du système (14). Si toutefois nous voulons poursuivre jusqu'au bout l'analogie de la méthode analytique et prendre toutes les équations du système, nous devons y joindre les deux équations

$$r=0,\qquad t=0.$$

Or, ces deux équations définissent les points ombilicaux de la surface de coordonnées ξ, u, u_1; surface quelconque dans l'espace E_3; développable isotrope dans l'espace E_4. Ces points ombilicaux sont d'ailleurs des points singuliers situés sur l'arête de rebroussement de cet espace. Ils correspondent donc au point de rebroussement situé sur l'arête de ce nom relative à la développable de l'espace E_3. Ainsi se complète l'analogie. Nous pourrons donc donner cette interprétation de la méthode que nous venons d'exposer: *Les opérations par lesquelles on détermine l'arête de rebroussement de la développable isotrope de l'espace* E_4 *déterminent en même temps les coordonnées de la surface moyenne d'une surface quelconque de l'espace* E_3 *et la demi-somme de ses rayons de courbure. Les points ombilicaux de cette même surface correspondent au point de rebroussement de l'arête de l'espace* E_3.

Généralisons le système (14). Nous pouvons écrire

$$\begin{gathered}\varphi_1\theta_1+\varphi_2\theta_2+\varphi_3\theta_3+\varphi_4\theta_4+\xi=0,\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\theta_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\theta_2+\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\theta_3+\frac{\partial\varphi_4}{\partial u}\theta_4+p=0,\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\theta_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}\theta_2+\frac{\partial\varphi_3}{\partial u_1}\theta_3+\frac{\partial\varphi_4}{\partial u_1}\theta_4+q=0,\\ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u\,\partial u_1}\theta_1+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\,\partial u_1}\theta_2+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial u\,\partial u_1}\theta_3+\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial u\,\partial u_1}\theta_4+s=0,\\ r=0,\qquad t=0.\end{gathered}$$

Nous savons qu'on a la relation

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2=0.$$

Si donc on considère θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 comme autant de fonctions linéaires de $x, y, z, -i\rho$, coordonnées de l'espace E_4, le système précédent représentera toujours l'arête de rebroussement du plan isotrope de cet espace et contiendra comme cas particulier le système (14). Celui-ci dérivera de celui-là par une simple rotation.

Transformation de l'équation aux dérivées partielles de la surface moyenne. — Soit comme précédemment l'équation

$$F(x, y, z, -i\rho)=0, \tag{16}$$

qui définit une relation entre les coordonnées de la surface moyenne et la demi-somme des rayons de courbure. Cette équation, lorsqu'on y remplace x, y, z, $-i\rho$ par leurs expressions définies au moyen du système (2), peut s'écrire

$$\Phi(\xi, u, u_1, p, q)=0. \tag{16$'$}$$

Posons

$$u=v,\qquad u_1=-\frac{1}{v_1},\qquad \xi=\frac{\zeta}{v_1}.$$

On tire de là

$$p=\frac{1}{v_1}\frac{\partial\zeta}{\partial v},\qquad q=v_1\frac{\partial\zeta}{\partial v_1}-\zeta,\qquad s=v_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial v\,\partial v_1}-\frac{\partial\zeta}{\partial v_1}. \tag{17}$$

Si l'on porte ces valeurs de u, u_1, ξ et des dérivées de ξ dans le système (2), on retrouve les mêmes quantités $x, y, z, -i\rho$, mais permutées entre elles à un coefficient près, x_1, y_1, z_1 désignant les nouvelles quantités analogues aux quantités $x, y, z, -i\rho$. Il vient

$$x_1 = -z, \qquad y_1 = i\rho, \qquad z_1 = x, \qquad \rho_1 = -iy;$$

et (16) devient

$$(18) \qquad F(z_1, -i\rho_1, -x_1, -iy_1) = 0.$$

Ainsi l'équation (16) a été transformée en l'équation (18).

Donnons un exemple. Supposons que $-i\rho$ ne figure pas dans (16): par le fait même, en vertu de la relation $y_1 = i\rho$, y_1 ne figurera pas dans (10). Par suite, les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F(z_1 - i\rho_1 - x_1) = 0$$

seront équivalentes.

Supposons, par exemple, que les quantités x, z entrent dans la première par l'unique expression $x^2 + z^2$, les deux équations peuvent s'écrire

$$\Psi(x^2 + y^2, y) = 0, \qquad \Psi(x_1^2 + y_1^2, -i\rho_1) = 0.$$

La première équation peut se traduire ainsi : *Déterminer les surfaces qui admettent pour surface moyenne une surface de révolution.* Si donc on trouve une solution de cette équation, on obtiendra une solution du problème suivant : *Déterminer les surfaces telles que la demi-somme de leurs rayons de courbure soit fonction de la projection sur un plan fixe du rayon vecteur de la surface moyenne.* Or, nous savons déterminer des surfaces résolvant le premier problème ([1]). Il est vrai, ces surfaces se réduisent aux surfaces de révolution, mais il n'en sera pas de même, comme on le vérifie immédiatement, des surfaces qui satisfont à l'équation transformée. Nous nous dispensons de développer les calculs.

II. — Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

Nous venons de le voir, dans le cas le plus général l'équation à résoudre renferme quatre fonctions θ_m.

([1]) *Bulletin de la Société mathématique,* t. XXXIII, 1905.

Pour procéder avec ordre, nous allons commencer par le cas où cette équation ne contient qu'une fonction θ_m.

L'équation ne renferme qu'une fonction θ_m. On a donc

$$F(\theta) = 0.$$

On tire de là

$$\theta = \text{const.},$$

c'est-à-dire, d'après le système (7),

$$2\theta = \varphi s - \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} p - \frac{\partial\varphi}{\partial u} q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_1}\xi = \mathrm{K} = \text{const.}$$

On obtient immédiatement la solution générale de cette équation. Il vient

$$\xi = (\mathrm{U}' + \mathrm{U}'_1)\varphi - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{U} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\mathrm{U}_1 + \frac{\mathrm{K}}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_1}},$$

U, U_1 désignant deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de u_1, U', U'_1 désignant leurs dérivées.

Rappelons que φ est ici défini par la relation

$$(u + u_1)a + i(u_1 - u)b + (uu - 1)c + i(uu_1 + 1)d + \varphi = 0.$$

Si l'on porte la valeur trouvée ξ et celles que l'on obtient pour ses dérivées dans les quatre fonctions linéaires de $x, y, z, -i\rho$, il vient

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} 2\theta_m = {} & \left(\varphi_m \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right)\mathrm{U}'' - \frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi_m\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right)\mathrm{U}' \\ & + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\varphi_m\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right)\mathrm{U} + \left(\varphi_m\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right)\mathrm{U}''_1 \\ & - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_m\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right)\mathrm{U}'_1 + \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\left(\varphi_m\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \varphi\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right)\mathrm{U}_1 + \frac{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1}}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_1}}\mathrm{K}. \end{aligned}\right.$$

Si, dans l'équation (19), on supprime l'indice m, on retrouve l'équation aux dérivées partielles à résoudre

$$2\theta = \mathrm{K}.$$

Sans restreindre la généralité de l'équation, on peut la ramener à la forme

$$\theta = az + c\rho = 0.$$

Sous cette forme elle définit les surfaces telles que le rapport des distances d'un point quelconque de leur surface moyenne, d'une part à un plan fixe, de l'autre à la surface cherchée, ait une valeur constante.

Selon que a ou c seront égaux à o, l'équation définira une surface minima, ou l'ensemble des surfaces qui admettent un plan pour surface moyenne.

On vérifie que les fonctions θ_m représentent la somme de deux fonctions, l'une de u, l'autre de u_1. Des résultats précédents on peut déduire la proposition suivante :

L'ensemble des surfaces qui admettent un plan pour surface moyenne est formé des surfaces de translation engendrées par deux courbes ayant pour paramètres respectifs les génératrices rectilignes de la représentation sphérique des surfaces cherchées.

Nous venons d'intégrer l'équation

$$\theta = \text{const.},$$

et nous en avons déduit

$$\theta_m = V + V_1,$$

V, V_1 désignant deux fonctions respectives de u et de u_1. Nous pouvons prendre cette nouvelle équation aux dérivées partielles comme point de départ et chercher à l'intégrer. On a

$$(20) \qquad 2\theta = \varphi s - \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} p - \frac{\partial\varphi}{\partial u} q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\, \partial u_1} \xi = 2(V + V_1).$$

On tire de là

$$2\frac{\partial^2\theta}{\partial u\, \partial u_1} = \varphi \frac{\partial^2 s}{\partial u\, \partial u_1} = \varphi \frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2\, \partial u_1^2} = 0,$$

d'où

$$(21) \qquad \xi = M u_1 + M_1 u + N + N_1,$$

M, N désignant deux fonctions de u; M_1, N_1, deux fonctions de u_1.

Si l'on prend pour point de départ l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2\, \partial u_1^2} = 0,$$

on retrouve les surfaces minima de l'espace E_4 dont nous nous sommes déjà occupés. Les quatre fonctions M, N, M_1, N_1 sont alors complètement arbitraires.

Il vient

$$2\theta_m = \left(\varphi_m - u_1\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right)M' + \left(u_1\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right)M - \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}N' - \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1}N$$
$$+ \left(\varphi_m - u\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}\right)M'_1 + \left(u\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}\right)M_1 - \frac{\partial\varphi_m}{\partial u}N'_1 - \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1}N_1.$$

Nous pouvons généraliser encore l'équation précédente et écrire

$$(22)\qquad 2\theta = \varphi s - \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}p - \frac{\partial\varphi}{\partial u}q + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial u_1}\xi = F(u, u_1),$$

F désignant une fonction quelconque de u, u_1.

Différentiant, il vient

$$\varphi\frac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial u_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial u_1},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial u_1} = \frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial u_1}.$$

On obtiendra ξ par quatre quadratures. Nous pouvons donc formuler cette proposition :

L'équation qu'on obtient en égalant, à une fonction quelconque des paramètres des génératrices rectilignes de la représentation sphérique d'une surface, une fonction linéaire quelconque des coordonnées de sa surface moyenne et de la demi-somme des rayons de courbure s'intègre au moyen de quatre quadratures.

L'équation renferme deux fonctions θ_m. — Lorsque θ_1, θ_2 figurent deux coordonnées de la surface moyenne, cette équation représente un cylindre. Dans le cas général où ces fonctions sont des combinaisons linéaires quelconques des quantités x, y, z, $-i\rho$, elle ne se restreint pas nécessairement aux seuls cylindres. Nous lui conserverons cependant le même nom. Nous allons chercher un mode de solutions particulier à cette équation.

De la relation

$$(23)\qquad F(\theta_1, \theta_2) = 0$$

on tire

$$\frac{\partial F}{\partial\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial\theta_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial u_1}+\frac{\partial F}{\partial\theta_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial u_1}=0,$$

d'où

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta_2}{\partial u_1}-\frac{\partial\theta_1}{\partial u_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial u}=0. \tag{24}$$

Or, on a

$$2\theta_m=\varphi_m s-\frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1}p-\frac{\partial\varphi_m}{\partial u}q+\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial u\,\partial u_1}\xi.$$

Différentiant et portant les valeurs trouvées dans l'équation (24), il vient

$$\left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}-\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial(\log r)}{\partial u_1}+\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}-\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\right)\frac{\partial\log t}{\partial u}+\frac{\partial(\varphi_2,\varphi_1)}{\partial(u,u_1)}=0. \tag{25}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}-\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial(\log r)}{\partial u_1}+\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}-\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\right)\frac{\partial(\log t)}{\partial u}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}-\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}-\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right)=0,$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\log\left(\dfrac{t}{\sqrt{\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}-\varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}}}\right)}{\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}-\varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}}\right]=\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{\left(\dfrac{r}{\sqrt{\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}-\varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}}}\right)}{\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}-\varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}}\right].$$

On remarquera que les dénominateurs de l'expression précédente sont deux polynomes respectifs de u_1 et de u tous deux du second degré.

Nous pourrons poser

$$\left\{\begin{aligned}\log\left(\frac{t}{\sqrt{\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}-\varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}}}\right)&=\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}-\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\\ \log\left(\frac{r}{\sqrt{\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}-\varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}}}\right)&=\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}-\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial u}.\end{aligned}\right. \tag{26}$$

En égalant les quantités

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u_1^2},$$

on obtiendra une équation aux dérivées partielles pour Φ.

D'autre part, nous pouvons remarquer que nous avons l'équation $F(\theta_1, \theta_2) = 0$, équation en ξ, p, q, s, qu'on pourra rapprocher de l'équation (25). Nous avons donc à déterminer les solutions communes à ces deux équations. C'est au moyen de ces équations que nous chercherons à achever le problème.

Application. — Sans chercher à résoudre le problème dans sa généralité, nous nous bornerons à l'étude de la question suivante :

Déterminer les surfaces enveloppes de sphères passant par un point fixe qui admettent pour surface moyenne un cylindre lieu du centre de ces sphères.

Nous savons [1] que les enveloppes de sphères passant toutes par un point fixe et jouissant de la propriété indiquée sont définies par l'équation

$$\xi s - pq = 0.$$

Intégrant, il vient

$$\xi = \mathrm{U}\mathrm{U}_1,$$

U, U_1 désignant deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de u_1.

Prenons donc une fonction ξ de cette forme et cherchons à déterminer U, U_1 de telle sorte que l'équation (25) soit vérifiée.

Les calculs effectués, il vient

$$\xi = e^{\mathrm{W}} \sqrt{\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}} \sqrt{\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}},$$

en posant

$$\mathrm{W} = ik \int \frac{du_1}{\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}} + ik_1 \int \frac{du}{\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}}$$

et représentant par k, k_1 des constantes égales et de signes contraires.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXXI, 1903, p. 22.

Posons

$$\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{\psi_1}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}}, \qquad \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} = \frac{\psi}{\frac{\partial \psi}{\partial u}}.$$

Il viendra

$$\xi = \frac{\psi^{ik_1 + \frac{1}{2}} \psi_1^{ik + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}}}. \tag{27}$$

Lorsque les deux trinomes en φ_1, φ_2 se réduiront au premier degré on aura

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \text{const.}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} = \text{const.},$$

et l'on pourra écrire

$$\xi = \psi^{ik_1 + \frac{1}{2}} \psi_1^{ik + \frac{1}{2}}.$$

Nous allons nous borner à considérer ce dernier cas.

Choisissons une série de constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; $\mu_1, \ldots$, telles qu'on ait

$$\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \lambda_3 \theta_3 + \lambda_4 \theta_4 = \psi s - \frac{\partial \psi}{\partial u} q,$$

$$\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 + \mu_3 \theta_3 + \mu_4 \theta_4 = \psi_1 s - \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} p.$$

On trouve d'ailleurs, en remplaçant p, q, s par leurs valeurs,

$$\psi s - \frac{\partial \psi}{\partial u} q = -\left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \psi^{\frac{1}{2} - ik} \psi_1^{ik - \frac{1}{2}},$$

$$\psi_1 s - \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} p = -\left(\frac{1}{2} - k\right)^2 \psi^{\frac{1}{2} - ik} \psi_1^{ik + \frac{1}{2}};$$

d'où

$$(\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \lambda_3 \theta_3 + \lambda_4 \theta_4)^{ik + \frac{1}{2}} (\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 + \mu_3 \theta_3 + \mu_4 \theta_4)^{\frac{1}{2} - ik} = \text{const.},$$

$$\sqrt{(\lambda_1 \theta_1 + \ldots + \lambda_4 \theta_4)(\mu_1 \theta_1 + \ldots + \mu_4 \theta_4)} \left(\frac{\lambda_1 \theta_1 + \ldots}{\mu_1 \theta_1 + \ldots}\right)^{ik} = \text{const.} \tag{28}$$

Le premier membre étant fonction de deux combinaisons linéaires seulement de fonctions θ_m, nous pourrons, d'après ce que nous avons dit, considérer cette équation comme définissant un cylindre, et, dans ce sens, nous pourrons dire *qu'on obtient une surface ayant pour surface moyenne le cylindre déterminé par* *l'équation* (28) *en prenant l'enveloppe d'une sphère variable passant par l'origine et dont le centre décrit ce cylindre.*

Cinq fonctions θ étant toujours liées par une relation linéaire, nous pourrons toujours écrire, sans restreindre la généralité du problème,

$$\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\ldots=\theta_5+i\theta_6,$$

$$\mu_1\theta_1+\mu_2\theta_2+\ldots=\theta_5-i\theta_6.$$

L'équation (28) devient alors

$$\sqrt{(\theta_5^2+\theta_6^2)}\left(\frac{\theta_5+i\theta_6}{\theta_5-i\theta_6}\right)^{ik}=\text{const.}$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$\psi=u, \qquad \psi_1=u_1,$$

il vient

$$\xi=u^{ik_1+\frac{1}{2}}u^{ik+\frac{1}{2}}.$$

Désignant par X, Y, Z les coordonnées cartésiennes de la surface, on trouve

$$\sqrt{(X^2+Y^2)}\left(\frac{X-iY}{X+iY}\right)^{ik}=\text{const.}, \qquad Z=0.$$

La surface se réduit donc à une spirale logarithmique, tracée sur le plan des xy. La surface moyenne se réduit à un cylindre proprement dit, qui a pour base une spirale logarithmique définie par l'équation $r=ae^{-2k\theta}$.