BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PÉTROVITCH

Sur une suite de fonctions rationnelles rattachés aux équations algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 141-150
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__141_1>

SUR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES RATTACHÉES AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

I. — DÉFINITION ET FORMATION DES FONCTIONS $N_k(x)$.

1. Étant donnée une équation algébrique de degré n

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

à coefficients réels, désignons par

$$P_k(x) = 0 \tag{2}$$

l'équation de degré n ayant pour racines les $(2^k)^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de (1).

Nous appellerons *fonction* $N_k(x)$ *rattachée à l'équation* (1) la fonction rationnelle

$$N_k(x) = \frac{x\,P'_k(x)}{P_k(x)}. \tag{3}$$

La formation de $N_k(x)$ se réduit à celle du polynome $P_k(x)$ de degré n. Or, la règle pratique suivante ([1]) fournit le moyen de former le polynome

$$P_k(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n, \tag{4}$$

en partant du polynome

$$P_{k-1}(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n, \tag{5}$$

supposé déjà formé.

Le coefficient d'un terme quelconque de (4) égale le carré du coefficient correspondant de (5), moins le double produit des coefficients de (5) qui le comprennent, plus le double produit des coefficients qui comprennent ceux-ci, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un des termes extrêmes de l'équation (5); enfin, les coefficients de (4) ainsi calculés, on change le signe de tous ceux des puissances impaires de x.

Autrement dit, on aura

$$C_k = (-1)^{n-k}(B_k^2 - 2B_{k-1}B_{k+1} + 2B_{k-2}B_{k+2} - \ldots). \tag{6}$$

En partant donc de

$$P_0(x) = f(x),$$

on formera de proche en proche, suivant cette règle, la suite de polynomes

$$P_1(x), \quad P_2(x), \quad P_3(x), \quad \ldots, \tag{7}$$

à l'aide desquels se formerait la suite de fonctions

$$N_1(x), \quad N_2(x), \quad N_3(x), \quad \ldots, \tag{8}$$

par la formule (3).

On trouve ainsi, par exemple, pour l'équation du sixième degré

$$x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0 \tag{9}$$

([1]) Gräffe, *Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen* (Zurich, 1837). — Carvallo, *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes* (Paris, 1896).

(traitée par Gräffe), la suite

$$(10)\quad \begin{cases} N_0(x) = \dfrac{6x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 4x^2 + x}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1}, \\ N_1(x) = \dfrac{6x^6 + 15x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 28x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 14x^2 + 3x + 1}, \\ N_2(x) = \dfrac{6x^6 - 25x^5 + 56x^4 + 91x^3 + 364x^2 + 19x}{x^6 - 5x^5 + 14x^4 + 31x^3 + 182x^2 + 19x + 1}, \\ N_3(x) = \dfrac{6x^6 + 15x^5 + 3480x^4 + 12981x^3 + 63948x^2 + 3x}{x^6 + 3x^5 + 870x^4 + 4327x^3 + 31974x^2 + 3x + 1}. \end{cases}$$

2. Il est possible d'avoir une expression explicite de la fonction $N_k(x)$ sous la forme d'une combinaison du polynome $f(x)$ luimême et de sa première dérivée.

A cet effet, remarquons que, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation (1), on aura

$$\frac{P'_k(x)}{P_k(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x - \alpha_i^{2^k}},$$

ou bien

$$(11)\qquad N_k(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha_i^{2^k}}{x}}.$$

Considérons, d'autre part, l'expression

$$(12)\qquad \Phi_m(r) = \frac{r}{m}\left[\frac{\omega_1 f'(\omega_1 r)}{f(\omega_1 r)} + \ldots + \frac{\omega_m f'(\omega_m r)}{f(\omega_m r)}\right],$$

où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ désignent les racines primitives de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

m étant un entier positif quelconque. Comme on a

$$\frac{\omega_j r f'(\omega_j r)}{f(\omega_j r)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_j}{\omega_j - \dfrac{\alpha_i}{r}},$$

on peut écrire

$$(13)\qquad \Phi_m(r) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=n} A_i(r),$$

avec

$$A_i(r) = \sum_{j=1}^{j=m} \frac{\omega_j}{\omega_j - \dfrac{\alpha_i}{r}}. \tag{14}$$

Or, l'identité

$$(x-\omega_1)(x-\omega_2)\ldots(x-\omega_m) = x^m - 1$$

conduit facilement à la suivante,

$$\frac{\omega_1}{\omega_1 - x} + \frac{\omega_2}{\omega_2 - x} + \ldots + \frac{\omega_m}{\omega_m - x} = \frac{m}{1 - x^m},$$

laquelle fait voir que

$$A_i(r) = \frac{m}{1 - \left(\dfrac{\alpha_i}{r}\right)^m},$$

ou bien, d'après (13),

$$\Phi_m(r) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\alpha_i}{r}\right)^m}. \tag{15}$$

La comparaison de (11) et (15) conduit alors aux relations

$$N_k(x) = \Phi_m(r), \qquad \text{pour } r = x^{2^{-k}}, \qquad m = 2^k, \tag{16}$$

$$\Phi_m(x) = N_k(r), \qquad \text{pour } r = x^{2^k}, \qquad m = 2^k. \tag{17}$$

Nous avons ainsi une expression explicite de $N_k(x)$ *sous la forme de la somme de* 2^k *expressions*

$$2^{-k}\omega_j r \frac{f'(\omega_j r)}{f(\omega_j r)}, \tag{18}$$

où il faut poser

$$r = x^{2^{-k}} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, 2^k).$$

II. — Relation entre les fonctions $N_k(x)$ et le nombre de racines de l'équation donnée comprises a l'intérieur d'une circonférence donnée.

1. On connaît le rôle que jouent les polynomes $P_k(x)$ dans la méthode de Gräffe pour la résolution numérique des équations. Nous indiquerons ici une relation qui existe entre les fonctions

rationnelles $N_k(x)$, intimement liées aux polynomes $P_k(x)$, et le nombre h de racines de l'équation donnée (1) dont les modules sont inférieurs à un nombre donné.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ les racines comprises à l'intérieur de la circonférence C de rayon r, ayant l'origine comme centre; α_{h+1}, $\alpha_{h+2}, \ldots, \alpha_n$ les racines extérieures à C, en supposant qu'aucune des racines ne se trouve sur C.

Comme on a identiquement

$$\sum_{i=1}^{i=h} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} = h + \varepsilon_1, \tag{19}$$

avec

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{i=h} \frac{\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} \tag{20}$$

et

$$\sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{1}{1-\left(\frac{\alpha_i}{r}\right)^m} = \sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^m}{\left(\frac{r}{\alpha_i}\right)^m - 1} = \varepsilon_2, \tag{21}$$

les inégalités

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < 1, & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, h, \\ \left|\frac{r}{\alpha_i}\right| < 1, & \text{pour } i = h+1, \ldots, n, \end{array} \right. \tag{22}$$

combinées avec les relations (11), (15), (17), font voir que

$$h = N(r^{2^k}) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \tag{23}$$

avec

$$|\varepsilon_1| < \sum_{i=1}^{i=h} \frac{\left|\frac{\alpha_i}{r}\right|^m}{1-\left|\frac{\alpha_i}{r}\right|^m}, \tag{24}$$

$$|\varepsilon_2| < \sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m}{1-\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m}, \tag{25}$$

où l'on a mis pour abréger $m = 2^k$.

2. Nous en tirerons la conséquence suivante :

Supposons que l'équation donnée $f(x) = 0$ n'ait aucune racine à module compris entre deux nombres R et $R + \delta$ ni égal à un de ces nombres. En prenant pour r la valeur

$$r = R + \frac{\delta}{2}, \tag{26}$$

le nombre de racines à modules inférieurs à R sera encore h, de sorte que pour $i = 1, 2, \ldots, h$ on aura

$$|\alpha_i| < R = r - \frac{\delta}{2}, \tag{27}$$

et pour $i = h + 1, \ldots, n$

$$|\alpha_i| > R + \delta = r + \frac{\delta}{2}. \tag{28}$$

Considérons d'abord ces dernières racines. L'inégalité (28) montre qu'en désignant par λ la valeur

$$\lambda = \frac{r}{R+\delta} = \frac{1}{1 + \dfrac{\delta}{2R+\delta}} < 1, \tag{29}$$

on aura

$$\left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m < \lambda^m < 1, \tag{30}$$

d'où

$$\frac{1}{1 - \left|\dfrac{r}{\alpha_i}\right|} < \frac{1}{1-\lambda^m}$$

et, par suite,

$$\sum_{i=h+1}^{i=n} \frac{\left|\dfrac{r}{\alpha_i}\right|^m}{1 - \left|\dfrac{r}{\alpha_i}\right|^m} < \frac{1}{1-\lambda^m} \sum_{i=h+1}^{i=n} \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m;$$

d'où, en vertu de

$$\sum_{i=h+1}^{i=n} \left|\frac{r}{\alpha_i}\right|^m < (n-h)\lambda^m,$$

on tire

$$|\varepsilon_2| < \frac{(n-h)\lambda^m}{1-\lambda^m}. \tag{31}$$

D'autre part, pour les racines α_i $(i=1, 2, \ldots, h)$ l'inégalité (27) montre que

$$\left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < \frac{R}{r} = \frac{1}{1+\frac{\delta}{2R}} < \lambda; \tag{32}$$

d'où l'on tire, comme tout à l'heure,

$$|\varepsilon_1| < \frac{h\lambda^m}{1-\lambda^m}, \tag{33}$$

de sorte qu'en posant

$$\theta = \frac{1}{\mu} = 1 + \frac{\delta}{2R+\delta} > 1, \tag{34}$$

$$\xi_m = \frac{n}{\theta^m - 1}, \tag{35}$$

on aura

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < \xi_m. \tag{36}$$

La combinaison de (31), (33), (36) et (23) conduit alors à l'égalité

$$h = N(r^{2^k}) + \beta_k, \tag{37}$$

où β_k est une quantité dont le module est inférieur à ξ_m.

3. On en conclut d'abord que *pour toute valeur de l'entier positif k on aura*

$$N_k(r^{2^k}) - \xi_m < h < N_k(r^{2^k}) + \xi_m, \tag{38}$$

et comme, pour $k=\infty$, on a

$$\lim \xi_m = 0,$$

on aura

$$h = \lim N_k(r^{2^k}). \tag{39}$$

Mais on peut avoir des égalités pareilles même pour les valeurs finies de l'entier k.

Désignons par M_m la partie entière et par γ_m la partie fractionnaire du nombre $N_k(r^m)$, de sorte que

$$N_k(r^m) = M_m + \gamma_m, \tag{40}$$

avec

$$o < \gamma_m < 1; \tag{41}$$

d'après (38) on aura, pour toute valeur de k,

$$M_m + (\gamma_m - \xi_m) < h < M_m + (\gamma_m + \xi_m). \tag{42}$$

Donnons maintenant à k la plus petite valeur possible pour qu'on ait

$$o < \xi_m < 1; \tag{43}$$

d'après (35), cette condition sera satisfaite si l'on fait

$$\frac{n}{\theta^m - 1} < 1, \tag{44}$$

d'où l'on tire

$$k > \frac{\log\log(n+1) - \log\log\theta}{\log 2}. \tag{45}$$

Distinguons alors les deux cas suivants :

Premier cas — Soit

$$\gamma_m + \xi_m \leqq 1.$$

Dans ce cas on ne peut pas avoir $\gamma_m > \xi_m$, car on aurait alors

$$\gamma_m + \xi_m = 1 - \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = \theta_2,$$

avec

$$o \leqq \theta_1 < 1, \qquad o < \theta_2 < 1$$

et, par suite,

$$M_m + \theta_2 < h < M_m + 1 - \theta_1,$$

ce qui est impossible, le premier et le troisième membre de cette inégalité ne comprenant aucun nombre entier.

On ne peut donc qu'avoir $\gamma_m \leqq \xi_m$, c'est-à-dire

$$\gamma_m + \xi_m = 1 - \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = -1 + \theta_2,$$

avec

$$o < \theta_1 < 1, \qquad o \leqq \theta_2 < 1,$$

ce qui montre qu'on aura

$$h = M_m.$$

Deuxième cas. — Soit

$$\gamma_m + \xi_m < 1.$$

Alors : 1° Si $\gamma_m > \xi_m$, on aura

$$\gamma_m + \xi_m = 1 + \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = 1 - \theta_2,$$

avec

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 < 1,$$

ce qui montre que

$$h = M_m + 1.$$

2° Si $\gamma_m \leqq \xi_m$, on aura

$$\gamma_m + \xi_m = 1 + \theta_1, \qquad \gamma_m - \xi_m = -1 + \theta_2,$$

avec

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 \leqq 1,$$

ce qui montre que h est égal à M_m ou bien $M_m + 1$.

On arrive ainsi au théorème suivant :

Étant donnée une couronne circulaire C *ayant l'origine comme centre, de rayon intérieur* R *et d'épaisseur* δ, *ne contenant aucune racine de l'équation algébrique donnée de degré* n, *si l'on donne à l'entier* k *une valeur quelconque supérieure à*

$$\frac{1}{\log 2}\left[\log\log(n+1) - \log\log\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right], \tag{46}$$

le nombre h *de racines entourées par la couronne* C *sera égal à* M *ou bien à* M + 1, M *désignant la partie entière du nombre* $N_k(x)$ *pour*

$$x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^{2^k}. \tag{47}$$

En particulier, en désignant par γ la partie fractionnaire de $N_k(x)$ pour (47) et par ξ la valeur

$$\xi = \frac{n}{\left(\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right)^{2^k} - 1}: \tag{48}$$

1° Si $\gamma + \xi \leqq 1$ on aura

$$h = \mathrm{M};$$

2° Si $\gamma + \xi > 1$ et $\gamma \geqq \xi$ on aura

$$h = \mathrm{M} + 1.$$

Considérons, comme exemple, l'équation du sixième degré (9) du paragraphe I et cherchons le nombre de racines entourées par la couronne C ayant $\mathrm{R} = 0,6$ comme rayon intérieur et $\delta = 0,6$ comme épaisseur, en sachant que C ne contient aucune racine.

L'expression (46) a pour valeur 2,75, de sorte qu'on peut prendre $k = 3$. L'expression $\mathrm{N}_3(x)$, calculée à cet endroit, prend pour

$$x = \left(\mathrm{R} + \frac{\delta}{2}\right)^8 = (0,9)^8 = 0,4305$$

la valeur 2,06 d'où

$$\mathrm{M} = 2, \qquad \gamma = 0,06.$$

Et comme, d'après (48), on trouve $\xi = 0,67$, on aura

$$\gamma + \xi = 0,73 < 1,$$

ce qui montre que l'équation a exactement deux racines entourées par la couronne C. Ceci se vérifie directement, car l'équation a trois paires de racines imaginaires conjuguées dont les modules sont (Gräffe, *loc. cit.*, p. 28)

$$\rho_1 = 1,52\,366,$$
$$\rho_2 = 1,25\,505,$$
$$\rho_3 = 0,52\,294,$$

et la dernière paire est la seule qui soit entourée par C.