BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur une généralisation du mouvement de Poinsot

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 91-97
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__91_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU MOUVEMENT DE POINSOT;

PAR M. L. LECORNU.

On sait, depuis Poinsot, que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe O s'effectue, en l'absence de forces extérieures, de façon que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point roule et pivote sur un plan fixe, avec une vitesse angulaire représentée vectoriellement par le diamètre joignant le point fixe au point de contact de l'ellipsoïde et du plan.

Supposons qu'au lieu de l'ellipsoïde d'inertie relatif à O, nous considérions un autre ellipsoïde, de même centre O et de mêmes directions principales, dont les axes ne soient pas proportionnels à ceux de l'ellipsoïde d'inertie : tel est par exemple le cas de la surface d'un corps homogène ayant une forme ellipsoïdale. Si nous assujettissons cet ellipsoïde, que nous appellerons l'*ellipsoïde superficiel,* à se mouvoir autour de son centre, en roulant et pivotant, sans glissement, au contact d'un plan fixe, nous obtenons un mouvement fort analogue à celui de Poinsot, en ce sens que le déplacement s'effectue, géométriquement parlant, d'une façon identique, et que, dans un cas comme dans l'autre, la force vive demeure constante. Mais l'action du plan cesse alors d'avoir un moment nul par rapport au point O. Je me propose d'étudier la nature de ce mouvement et de déterminer en outre l'action du plan.

Soit $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ l'équation de l'ellipsoïde superficiel, rapporté à ses axes. Il roule et pivote sur un plan fixe Π, placé à la distance $\frac{1}{\delta}$ de son centre O. Le lieu du pôle P, c'est-à-dire du point de contact avec le plan Π, est la polhodie définie par les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1, \\ \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = \delta^2. \end{cases}$$

Soient p, q, r les composantes de la rotation instantanée ω. Cette rotation s'effectue autour de OP, et l'on a, en appelant x, y, z les coordonnées de P,

$$(2) \qquad \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \lambda;$$

le rapport λ est généralement variable.

Si nous imprimons au système une rotation $-\omega$ autour de OP, l'ellipsoïde est ramené à l'immobilité et le plan Π, qui était fixe, devient mobile. L'équation de ce plan est, en appelant ξ, η, ζ les coordonnées courantes,

$$\alpha x \xi + \beta y \eta + \gamma z \zeta = 1;$$

les cosinus directeurs de la normale au plan sont

$$a = \frac{\alpha x}{\delta} = \lambda \frac{\alpha p}{\delta},$$
$$b = \frac{\beta y}{\delta} = \lambda \frac{\beta q}{\delta},$$
$$c = \frac{\gamma z}{\delta} = \lambda \frac{\gamma r}{\delta}.$$

Écrivons que le point dont les coordonnées sont a, b, c est entraîné par la rotation $-\omega$. Nous obtenons les relations

$$\frac{da}{dt} = rb - qc, \qquad \frac{db}{dt} = pc - ra, \qquad \frac{dc}{dt} = qa - pb,$$

ou bien

$$(3) \qquad \alpha\frac{dx}{dt} = \lambda(\beta-\gamma)qr, \quad \beta\frac{dy}{dt} = \lambda(\gamma-\alpha)rp, \quad \gamma\frac{dz}{dt} = \lambda(\alpha-\beta)pq.$$

Revenons maintenant au mouvement réel.

La vitesse absolue du pôle P étant nulle, le travail de l'action du plan sur l'ellipsoïde est également nul, et la force vive de celui-ci est par conséquent constante. Si A, B, C désignent les moments d'inertie principaux et h la force vive, on a

$$(4) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

ou bien

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = h\lambda^2;$$

d'où

$$(5) \qquad Ax\frac{dx}{dt} + By\frac{dy}{dt} + Cz\frac{dz}{dt} = h\lambda\frac{d\lambda}{dt}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(6) \qquad D = \frac{A}{\alpha}(\beta-\gamma) + \frac{B}{\beta}(\gamma-\alpha) + \frac{C}{\gamma}(\alpha-\beta),$$

et si l'on remplace $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs (3), l'équation (5) devient

$$(7) \qquad D\lambda pqr = h\frac{d\lambda}{dt}.$$

D'ailleurs

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\frac{dp}{dt} + p\frac{d\lambda}{dt}.$$

Portons dans cette équation les valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d\lambda}{dt}$ tirées de (3) et (7). Nous obtenons la première des relations suivantes (les deux autres s'en déduisent par permutation)

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\beta-\gamma}{\alpha}qr - \frac{p^2qr}{h}D, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\gamma-\alpha}{\beta}rp - \frac{pq^2r}{h}D, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\alpha-\beta}{\gamma}pq - \frac{pqr^2}{h}D. \end{aligned} \right.$$

Soient L, M, N les composantes de l'action du plan. Les formules connues

$$\mathrm{L} = \mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{B})qr,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

donnent, en tenant compte de (8),

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L} &= \left[\frac{\mathrm{A}}{\alpha}(\beta-\gamma)-(\mathrm{B}-\mathrm{C})-\frac{\mathrm{D}}{h}p^2\right]qr,\\ \mathrm{M} &= \left[\frac{\mathrm{B}}{\beta}(\gamma-\alpha)-(\mathrm{C}-\mathrm{A})-\frac{\mathrm{D}}{h}q^2\right]rp,\\ \mathrm{N} &= \left[\frac{\mathrm{C}}{\gamma}(\alpha-\beta)-(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\frac{\mathrm{D}}{h}r^2\right]pq.\end{aligned}\right.$$

On connaît ainsi l'effort exercé par le plan sur le corps. Si l'on veut que cet effort soit constamment nul, il faut d'abord, puisque p, q, r sont variables, que l'on ait $\mathrm{D} = 0$. Cette condition étant remplie, on doit en outre poser

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha} = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}},\qquad \frac{\gamma-\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}},\qquad \frac{\alpha-\beta}{\gamma} = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}},$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\beta - \mathrm{B}\alpha &= \mathrm{A}\gamma - \mathrm{C}\alpha,\\ \mathrm{B}\gamma - \mathrm{C}\beta &= \mathrm{B}\alpha - \mathrm{A}\beta,\\ \mathrm{C}\alpha - \mathrm{A}\gamma &= \mathrm{C}\beta - \mathrm{B}\gamma.\end{aligned}$$

En retranchant l'une de l'autre les deux premières de ces égalités, il vient

$$\mathrm{C}\beta - \mathrm{B}\gamma = \mathrm{A}\gamma - \mathrm{C}\alpha,$$

et en comparant à la troisième on en conclut les relations

$$\frac{\mathrm{A}}{\alpha} = \frac{\mathrm{B}}{\beta} = \frac{\mathrm{C}}{\gamma}.$$

L'action du plan n'est donc nulle que si l'ellipsoïde superficiel est semblable à l'ellipsoïde d'inertie.

Pour trouver, dans le cas général, la loi du mouvement écrivons les deux équations

$$\begin{aligned} \lambda^2(\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2) &= 1,\\ \lambda^2(\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2) &= \delta^2.\end{aligned}$$

Par élimination de λ il vient

$$(10)\qquad \alpha(\alpha-\delta^2)p^2 + \beta(\beta-\delta^2)q^2 + \gamma(\gamma-\delta^2)r^2 = 0.$$

Les équations (4) et (10) permettent d'exprimer linéairement q^2 et r^2 en fonction de p^2, et, en portant les valeurs trouvées dans la première équation (8), on voit que le temps est donné en fonction de p par une intégrale elliptique de troisième espèce.

Nous allons maintenant nous occuper spécialement du cas où la quantité D est nulle. L'équation (7) montre que λ est alors une constante, de sorte que la vitesse de rotation est dans un rapport constant avec la longueur OP. D'après cela :

Si D *est nul, le mouvement de l'ellipsoïde superficiel est un mouvement de Poinsot.*

Mais l'action du plan n'est pas nulle, à moins que A, B, C ne soient proportionnels à α, β, γ, ce que nous ne supposons pas.

Cherchons ce que signifie l'équation $D = 0$.

Quels que soient A, B, C on peut, en admettant que α, β, γ soient inégaux, trouver trois constantes R, S, T telles que l'on ait

$$\begin{aligned}
A &= R + S\alpha + T\alpha^2,\\
B &= R + S\beta + T\beta^2,\\
C &= R + S\gamma + T\gamma^2.
\end{aligned}$$

En portant ces expressions dans l'équation (7), il vient

$$D = R\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Si donc D est nul, on a simplement

$$\begin{aligned}
A &= S\alpha + T\alpha^2,\\
B &= S\beta + T\beta^2,\\
C &= S\gamma + T\gamma^2.
\end{aligned}$$

D'après cela, la relation $D = 0$ exprime que l'ellipsoïde d'inertie $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ et l'ellipsoïde superficiel $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ se coupent suivant une courbe pour laquelle $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2$ est une quantité constante, c'est-à-dire suivant une polhodie de l'ellipsoïde superficiel. La réciproque est évidemment vraie. Comme l'échelle de construction de l'ellipsoïde d'inertie est arbitraire, on peut toujours, quand D est nul, supposer que cet ellipsoïde passe par la polhodie que décrit le pôle P. Admettons en outre que l'unité de temps soit choisie de façon à rendre la constante λ égale à l'unité. Alors les coordonnées x, y, z de P ne diffèrent pas de p, q, r.

En remplaçant, dans les valeurs (9) de L, M, N les moments d'inertie A, B, C par leurs valeurs ci-dessus on trouve

$$\begin{aligned}
L &= T(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)qr,\\
M &= T(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma-\alpha)rp,\\
N &= T(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta)pq.
\end{aligned}$$

D'après le théorème connu de Resal, L, M, N sont identiques aux composantes de la vitesse du point G, extrémité du vecteur représentant le moment cinétique. Les coordonnées de G sont Ap, Bq, Cr. Pour construire ce point, il suffit d'abaisser, à partir de O, une perpendiculaire sur le plan tangent en P à l'ellipsoïde d'inertie, et de prendre sur cette perpendiculaire une longueur OG égale à l'inverse de la distance du point O au plan tangent.

Il existe d'ailleurs une infinité d'autres points dont la vitesse peut servir à représenter le moment de l'action du plan Π. Cette propriété appartient à tous les points K dont les coordonnées sont

$$\begin{aligned}
\xi &= (U\alpha + T\alpha^2)p,\\
\eta &= (U\beta + T\beta^2)q,\\
\zeta &= (U\gamma + T\gamma^2)r,
\end{aligned}$$

U désignant une constante arbitraire.

En effet, la vitesse relative d'un pareil point a pour projection sur Ox

$$\frac{d\xi}{dt} = (U\alpha + T\alpha^2)\frac{dp}{dt} = (U + T\alpha)(\beta-\gamma)qr.$$

La vitesse d'entraînement du même point a pour projection

$$q\zeta - r\eta = [U + T(\beta+\gamma)](\gamma-\beta)qr.$$

Par suite la projection de la vitesse absolue est

$$T(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)qr,$$

expression identique à celle de L.

Le lieu des points K, quand l'on fait varier U, est une droite passant par G et dirigée perpendiculairement au plan tangent à l'ellipsoïde superficiel : c'est donc une droite de direction fixe dans l'espace.

Lorsque le corps est homogène, les moments d'inertie A, B, C ont pour valeurs, en appelant μ la masse totale,

$$A = \frac{\mu}{5}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \qquad B = \frac{\mu}{5}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right), \qquad C = \frac{\mu}{5}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right),$$

ce qui peut s'écrire

$$A = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma}[(\alpha + \beta + \gamma)\alpha - \alpha^2],$$

$$B = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma}[(\alpha + \beta + \gamma)\beta - \beta^2],$$

$$C = \frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma}[(\alpha + \beta + \gamma)\gamma - \gamma^2].$$

Il suffit alors de poser

$$S = \frac{\mu(\alpha + \beta + \gamma)}{5\alpha\beta\gamma}, \qquad T = -\frac{\mu}{5\alpha\beta\gamma},$$

pour rentrer dans le cas précédent.

La condition $D = 0$ est encore vérifiée lorsque le corps est composé de couches ellipsoïdales homothétiques dont chacune est homogène. On le reconnaît immédiatement en considérant une pareille couche comme la différence de deux ellipsoïdes homothétiques et homogènes.

Par conséquent :

Un ellipsoïde homogène, ou composé de couches homothétiques et homogènes, qui a son centre fixe et qui se meut en roulant et pivotant au contact d'un plan fixe, obéit à la loi de Poinsot.