Pellet

Construction des rayons de courbure d'une classe de courbes et de surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 76-80

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__76_1>

CONSTRUCTION DES RAYONS DE COURBURE D'UNE CLASSE DE COURBES ET DE SURFACES;

PAR M. A. PELLET.

1. Par un point T pris sur la tangente en M à une conique, menons une perpendiculaire sur la polaire de ce point T, et soit N sa rencontre avec la normale en M; par les points T et N, menons des perpendiculaires sur la tangente et la normale et soit τ le point de rencontre de ces perpendiculaires; le lieu du point τ lorsque T se déplace sur la tangente en M est une droite qui passe par le centre de courbure en M, par le pôle de la normale MN, et coupe à angle droit la symétrique du diamètre de la conique qui passe en M. Nous appellerons ce lieu du point τ, pour abréger, *axe de déviation* de la conique au point M. En un point M d'une courbe quelconque, les coniques ayant un contact du troisième ordre avec la courbe ont même axe de déviation, qui par suite peut être désigné par les mots *axe de déviation de la courbe en* M. En un point de rencontre de deux coniques homofocales, les axes de déviation de deux coniques coïncident. Plus généralement, soit M un point d'une quadrique : le plan tangent en M coupe les deux quadriques homofocales passant en M suivant deux coniques qui ont le même axe de déviation, lequel n'est autre que la polaire de la normale en M à la première quadrique par rapport à cette quadrique. En effet, menons par cette normale un plan quelconque; le lieu des pôles de ce plan par rapport aux quadriques homofocales est une droite qui lui est perpendiculaire, se trouve dans le plan tangent en M et rencontre les normales des qua-

driques homofocales passant par M en deux points d'où l'on déduit un point τ appartenant à la fois aux deux axes de déviation.

2. Soit

$$y = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a_1 x^3}{6} + \ldots$$

l'équation d'une courbe rapportée à une tangente et la normale correspondante. a_1 est égale à $\frac{da}{ds}$. L'équation du diamètre de la courbe à l'origine est

$$ax + \frac{a'}{3a}y = 0;$$

et celle de l'axe de déviation

$$ay + \frac{a'}{3a}x = 1.$$

La normale à l'axe de déviation menée par l'origine va couper le rayon de courbure de la développée au tiers de sa longueur, comptée à partir du point de contact avec la normale $x = 0, y = \frac{1}{a}$.

Pour une courbe normale,

$$x = \frac{a'y^2}{2} + \frac{a'_1 y^3}{6} + \ldots,$$

ayant même axe de déviation, on aura

$$aa' = \frac{a'}{3} = \frac{a'_1}{3}.$$

3. Prenons un triangle de référence ABC; et soient X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées d'un point M, $AX + BY + CZ = 0$ l'équation d'une droite passant par ce point M, MT.

Les courbes

$$(1) \qquad AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^m + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^m + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^m = 0,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{X}{X_0}\right)^{Ax_0}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{By_0}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{Cz_0} = 1$$

passent par le point M et sont tangentes à MT; rapportons ces courbes à leurs coordonnées normales en M, la droite MT, et la perpendiculaire menée par M à cette droite, axes des x et des y, il vient

$$y = \frac{(1-m)a}{2}x^2 + \frac{(1-m)(a_1 m + a'_1)}{6}x^3 + \ldots;$$

l'équation de la courbe (2) correspond à $m = 0$.

L'axe de déviation de ces courbes au point M a pour équation

$$(1-m)ay + \frac{a_1 m + a'_1}{3a}x = 1.$$

Ainsi, lorsque m varie, l'axe de déviation passe par un point fixe, et, pour construire l'axe de déviation d'une de ces courbes, il suffit de connaître les axes de déviation des courbes correspondant à deux valeurs de m.

Or, pour $m = 2$, l'équation (1) représente une conique conjuguée au triangle ABC. Soient a, b, c les points de rencontre de BC, CA, AB avec MT; a est le pôle de MA, b celui de MB et c de MC. On en déduit trois points de l'axe de déviation de cette conique au point M.

Pour $m = -1$, l'équation (1) représente une conique circonscrite au triangle ABC; a est le pôle de la droite joignant M au conjugué harmonique de a par rapport aux points B et C; b celui de la droite joignant M au conjugué harmonique de b par rapport aux points B et C; c celui de la droite joignant M au conjugué harmonique de c par rapport aux points A et B. Pour $m = \frac{1}{2}$, l'équation (1) représente une conique inscrite au triangle ABC; et l'on peut construire les pôles des droites MA, MB, MC. Le pôle de la droite AM, par exemple, est à l'intersection de la droite conjuguée harmonique de AM par rapport aux droites AB, AC avec MT. Ainsi, pour $m = 2$, $m = -1$ et $m = \frac{1}{2}$, on peut construire les axes de déviation des coniques correspondantes et l'on en déduira l'axe de déviation de la courbe (1) pour les autres valeurs de m.

4. L'enveloppe des polaires d'un point fixe P pris sur la droite $AX + BY + CZ = 0$ par rapport aux coniques conjuguées au triangle ABC et tangentes à cette droite est la conique inscrite au

triangle ABC et tangente à cette droite $AX + BY + CZ = 0$ au point P.

L'équation de ces coniques est, en effet,

$$A\frac{X^2}{X_0} + B\frac{Y^2}{Y_0} + C\frac{Z^2}{Z_0} = 0,$$

X_0, Y_0, Z_0 étant reliées par la relation

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 = 0.$$

La polaire du point P, X_1, Y_1, Z_1 étant ses coordonnées, a pour équation

$$A\frac{X_1X}{X_0} + B\frac{Y_1Y}{Y_0} + C\frac{Z_1Z}{Z_0} = 0,$$

et l'enveloppe de cette droite lorsqu'on fait varier X_0, Y_0, Z_0

$$A\sqrt{X_1X} + B\sqrt{Y_1Y} + C\sqrt{Z_1Z} = 0,$$

conique qui passe par le point X_1, Y_1, Z_1 si ce point est situé sur la droite $AX + BY + CZ = 0$.

Une conique est conjuguée par rapport au triangle formé par ses deux axes et la droite de l'infini; on en déduit que l'axe de déviation d'une conique en un point M est la polaire de ce point par rapport à la parabole inscrite dans le quadrilatère formé par les deux axes de la conique, la tangente et la normale en M. Les axes des coniques ayant un contact du troisième ordre avec une courbe en un point M de cette courbe sont tangents à une même parabole.

5. Soit ABCD un tétraèdre de référence, X_0, Y_0, Z_0, T_0 un point P du plan

$$AX + BY + CZ + DT = 0, \tag{1}$$

les surfaces

$$AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^m + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^m + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^m + DT_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^m = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{X}{X_0}\right)^{AX_0}\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{BY_0}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{CZ_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{DT_0} = 1 \tag{3}$$

sont tangentes au plan (1) au point X_0, Y_0, Z_0, T_0. Si on les rapporte à une perpendiculaire en ce point à ce plan, axe des z, et à deux droites rectangulaires situées dans ce plan, il vient

$$z = \frac{1-m}{2} u_2 + \frac{(1-m)(2-m)}{2.3} u_3 + \dots + \frac{(1-m)(2-m)\dots(n-m)}{1.2\dots n} u_n + \dots,$$

u_2, u_3, .., u_n, ... étant des fonctions homogènes de x, y, z, indépendantes de m. Ces surfaces ont donc mêmes directions asymptotiques en P, et les rayons de courbure d'une section plane sont inversement proportionnels à $1-m$.

Or, pour $m = 2$, l'équation (2) représente une quadrique conjuguée au tétraèdre ABCD. Les faces de ce tétraèdre coupent le plan (1) suivant un quadrilatère; les droites joignant le point P aux sommets opposés de ce quadrilatère forment trois couples de droites en involution ; les directions asymptotiques des surfaces (2) et (3) sont les rayons doubles de cette involution, PI et PI_1. Menons dans le plan (1) une droite PJ; elle coupe les faces du tétraèdre BCD, CDA, DAB, ABC aux points a, b, c, d, dont on peut construire les plans polaires par rapport à la quadrique

$$AX_0\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 + BY_0\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 + CZ_0\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^2 + DT_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 0.$$

Le plan polaire de a, par exemple, est le plan mené par les droites PJ_1 et PA, PJ_1 étant la conjuguée harmonique de PJ par rapport aux directions asymptotiques PI, PI_1.

Menons par PJ un plan quelconque; il coupe la quadrique (2) suivant une conique et les plans polaires de a, b, c, d suivant des droites qui sont les polaires de ces points par rapport à la conique. On en déduira quatre points de l'axe de déviation de la conique en P.