

BULLETIN DE LA S. M. F.

T. LALESCO

Sur le groupe des équations trinômes

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 75-76

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__75_0

© Bulletin de la S. M. F., 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE GROUPE DES ÉQUATIONS TRINOMES;

PAR M. T. LALESCO.

1. Toute équation trinome peut être réduite à la forme

$$(1) \quad x^n - kax + a = 0,$$

où a désigne un paramètre arbitraire et k la constante $n : (n-1)^{\frac{n-1}{n}}$.

Je me propose de démontrer que le groupe de Galois de cette équation, si son degré est premier, *est le groupe symétrique*.

En effet, les seules racines en a de son discriminant sont 0 et 1; si donc on envisage les racines de (1) comme fonctions de a , autour de l'origine elles formeront un seul cycle et autour du point $a = 1$ il y en a seulement deux qui se permutent, puisque la dérivée seconde de (1) ne s'annule plus pour $x \neq 0$.

Le groupe de monodromie de (1) est donc d'abord transitif à cause du cycle de n racines; il contient d'ailleurs une transposition provenant de la permutation de deux racines autour du point $a = 1$. D'après un théorème bien connu, ce groupe est donc ou imprimitif ou bien identique au groupe symétrique; comme n est premier, la seconde hypothèse est la seule admissible.

Dès lors, le groupe de Galois de l'équation (1), admettant le groupe de monodromie comme sous-groupe invariant, se confondra lui aussi avec le groupe symétrique.

2. D'après un théorème de M. D. Hilbert, il existe *dans ce cas* une infinité de valeurs rationnelles du paramètre a pour lesquelles le groupe de l'équation (1) sera toujours le groupe symétrique. Par conséquent *une équation trinome, en général, sera sans affect.*

Voici d'ailleurs une démonstration très simple de l'important théorème de M. Hilbert, que nous venons de rappeler.

Soit u un élément primitif du corps de l'équation (1) et soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ ses valeurs conjuguées; par définition, deux quelconques de ces expressions ne peuvent pas être *identiquement*

égales ⁽¹⁾. Par conséquent, il existera une infinité de valeurs rationnelles du paramètre α telles que les valeurs numériques correspondantes des éléments u_i soient toutes différentes entre elles, ce qui suffit pour démontrer la proposition.

⁽¹⁾ Elles ne sont donc égales que pour un nombre fini de valeurs de α , racines d'un certain nombre d'équations algébriques en α .