BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Sur les courbes gauches unicursales du quatrième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 233-247
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__233_0>

SUR LES COURBES GAUCHES UNICURSALES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

On sait que les courbes gauches du quatrième ordre appartiennent à deux familles distinctes :

1° Les *biquadratiques*, par chacune desquelles il passe une infinité de surfaces du second ordre;

2° Les *quartiques de Steiner*, par chacune desquelles il ne passe qu'une surface du second ordre, dont un système de génératrices est constitué par les sécantes triples de la courbe.

Les quartiques de Steiner sont unicursales; leur classe est 6, 5 ou 4.

Les biquadratiques ne sont unicursales que si elles ont un point double; si celui-ci est un point double ordinaire, la courbe est de sixième classe; si c'est un point de rebroussement, la courbe est de quatrième classe ([1]).

J'ai été conduit à écrire ce Mémoire à la suite de cette remarque : si d'un point M d'une courbe de sixième classe on mène les trois plans osculateurs qui ont leurs points de contact distincts de M, ces points sont dans un plan Π passant par M. J'ai obtenu des résultats curieux en cherchant l'enveloppe de ce plan Π et, pour pouvoir effectuer simplement les calculs, j'ai dû chercher des formes réduites des équations générales des courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Enfin, en cherchant des exemples, j'ai obtenu des formes assez générales d'équations donnant lieu à des remarques intéressantes.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

1. Une courbe gauche unicursale du quatrième ordre peut tou-

([1]) J'ai déjà étudié les courbes de quatrième ordre et de quatrième classe (*Bull. Soc. Math.*, t. XXXIII, 1905, p. 18).

jours se présenter par les équations

$$\begin{aligned} X &= a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4, \\ Y &= b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4, \\ Z &= c_0\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4, \\ T &= d_0\lambda^4 + d_1\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_3\lambda + d_4, \end{aligned}$$

les polynomes en λ étant premiers entre eux dans leur ensemble.

Les λ des points d'intersection de la courbe avec un plan quelconque sont liés par une relation qui doit être du premier degré par rapport à chacun de ces λ pris isolément, puisque, trois d'entre eux étant donnés arbitrairement, on doit avoir une équation du premier degré pour déterminer le quatrième. Il est facile de voir que, si l'on considère le tableau des coefficients

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix}$$

si l'on désigne par Δ_i le déterminant déduit de ce tableau en supprimant la colonne d'indice i, et par S_k la somme des produits k à k des quatre λ des points d'intersection de la courbe avec un plan, la relation en question peut s'écrire

$$\Delta_0 + \Delta_1 S_1 + \Delta_2 S_2 + \Delta_3 S_3 + \Delta_4 S_4 = 0. \tag{1}$$

2. Soit λ le paramètre correspondant au point de contact d'un plan osculateur et λ' le paramètre correspondant au point où ce plan coupe la courbe, la relation précédente montre que λ et λ' sont liés par la relation

$$\Delta_0 + 3\Delta_1\lambda^2 + 3\Delta_2\lambda + \Delta_3\lambda^3 + \lambda'(\Delta_1 + 3\Delta_2\lambda + 3\Delta_3\lambda^2 + \Delta_4\lambda^3) = 0; \tag{2}$$

on en déduit immédiatement que, si l'on se donne λ', on a trois valeurs pour λ. Autrement dit, d'un point de la courbe on peut mener trois plans osculateurs autres que celui qui a son point de contact au point correspondant à λ'; ce dernier comptant pour 3, on voit que la courbe est ordinairement de la classe $3 + 3 = 6$. Le nombre qui mesure la classe s'abaisse, si l'équation (2) donne pour λ des racines indépendantes de λ'. On peut reconnaître que les points correspondant à ces valeurs de λ sont des points d'*inflexion linéaire*, c'est-à-dire des points tels que la tangente y coupe la courbe en trois points confondus, de sorte que tout plan passant par cette tangente y a également trois points d'intersection confondus; la présence d'un de ces points abaisse la classe d'une unité ([1]).

Il peut arriver qu'un plan coupe la courbe en des points qui correspondent à une seule valeur de λ; les λ des points en question sont donnés par l'équation

$$\Delta_0 + 4\Delta_1\lambda + 6\Delta_2\lambda^2 + 4\Delta_2\lambda^3 + \Delta_4\lambda^4 = 0; \tag{3}$$

le plan est alors dit *stationnaire*. Les plans stationnaires peuvent être, on le constate facilement sur des exemples, soit réels, soit imaginaires, soit les uns réels et les autres imaginaires.

3. En comparant les équations (2) et (3), on voit facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (2) ait une racine en λ indépendante de λ' (racine que j'appellerai racine *singulière*), c'est-à-dire pour que le coefficient de λ' et le terme indépendant admettent un facteur commun, est que l'équation (3) possède une racine multiple. En examinant les divers cas qui peuvent se présenter on reconnaît que :

1° Si l'équation (3) a *une racine double*, l'équation (2) a une racine singulière; la courbe correspondante est une *quartique à sécantes triples* ayant un point d'inflexion linéaire, qui correspond à la racine singulière. La courbe est de *cinquième classe*.

2° Si l'équation (3) a *deux racines doubles*, l'équation (2) a deux racines singulières distinctes; la courbe correspondante est une *quartique à sécantes triples* ayant deux points d'inflexion linéaire qui correspondent aux racines singulières. La courbe est de *quatrième classe*. Elle a comme tangentes des droites faisant partie d'un complexe linéaire. Les courbes de cette nature sont les lignes asymptotiques des surfaces réglées du troisième ordre à directrices distinctes.

3° Si l'équation (3) a *une racine triple*, l'équation (2) a une

---

([1]) Voir, *Bull. Soc. Math.*, t. IX, 1880-1881, un Mémoire de M. Genty.

racine singulière double; la courbe correspondante est une *biquadratique ayant un point de rebroussement* donné par la racine singulière. La courbe est de *quatrième classe*.

L'équation (3) ne peut pas avoir de racine quadruple, ou, autrement dit, le coefficient de λ' et le terme indépendant de l'équation (2) ne peuvent avoir leurs coefficients proportionnels lorsque les polynomes en λ qui donnent les expressions des coordonnées d'un point de la courbe considérée sont premiers entre eux dans leur ensemble.

4. Considérons une quartique gauche unicursale de sixième classe. Si l'on fait la perspective sur un plan quelconque en prenant comme point de vue un point M de la courbe, on obtient comme perspective une cubique plane unicursale. Les tangentes d'inflexion de cette cubique sont les traces sur le plan du tableau des plans osculateurs menés par M; comme on sait que les points d'inflexion de la cubique sont en ligne droite, on en déduit que *les points de contact des plans osculateurs menés par un point* M *de la courbe sont dans un plan passant par* M. Pour abréger, je désignerai ce plan par Π.

A chaque point M correspond un plan Π. Si l'on forme l'équation de ce plan, on reconnaît facilement que les coefficients de celle-ci sont du deuxième degré par rapport au paramètre λ' du point M. On en déduit que le plan enveloppe un cône du second degré, par suite passe constamment par un point fixe que je désignerai par ω. Je crois inutile de montrer l'existence du cône en question au moyen des équations générales, et je vais, avant de traiter les questions relatives au plan Π, montrer comment on peut simplifier les équations des courbes à étudier, par un choix convenable du tétraèdre de référence et des transformations homographiques simples.

II. — Équations réduites.

5. Prenons pour faces du tétraèdre de référence deux plans osculateurs et deux plans qui passent chacun par la corde qui joint les deux points et par la tangente en l'un d'eux; si l'un des points correspond à la valeur zéro du paramètre λ et l'autre à la valeur infinie, hypothèse qu'il est facile de réaliser, les équations seront

$$X = a\lambda^4 + a'\lambda^3, \qquad Y = b\lambda^3 + b'\lambda^2, \qquad Z = c\lambda^2 + c'\lambda, \qquad T = d\lambda + d',$$

$X = 0$, $T = 0$ étant les plans osculateurs; on trouve facilement alors pour les coefficients des équations (1), (2) et (3)

$$\Delta_0 = a'b'c'd', \qquad \Delta_1 = ab'c'd', \qquad \Delta_2 = abc'd', \qquad \Delta_3 = abcd', \qquad \Delta_4 = abcd.$$

On peut distinguer les biquadratiques des quartiques à sécantes triples; il suffit de remarquer qu'une de ces dernières n'a jamais de point double, tandis qu'une biquadratique unicursale en a toujours un. Or, pour qu'il y ait un point double, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un couple de valeurs de λ et μ, de façon que

$$\frac{a\lambda^4 + a'\lambda^3}{a\mu^4 + a'\mu^3} = \frac{b\lambda^3 + b'\lambda^2}{b\mu^3 + b'\mu^2} = \frac{c\lambda^2 + c'\lambda}{c\mu^2 + c'\mu} = \frac{d\lambda + d'}{d\mu + d'};$$

ces équations débarrassées de la solution $\lambda = \mu$ donnent le système

$$\begin{aligned} ab\lambda\mu + ab'(\lambda + \mu) + a'b' &= 0, \\ bc\lambda\mu + bc'(\lambda + \mu) + b'c' &= 0, \\ cd\lambda\mu + cd'(\lambda + \mu) + c'd' &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit immédiatement que la condition cherchée s'exprime par

$$\begin{vmatrix} ab & ab' & a'b' \\ bc & bc' & b'c' \\ cd & cd' & c'd' \end{vmatrix} = 0.$$

6. Si l'on prend comme sommets du tétraèdre de référence situés sur la courbe les points de contact de deux plans stationnaires on a

$$a' = 0, \qquad d = 0,$$

et, comme a et d' doivent être alors différents de zéro pour que l'on ait une courbe gauche du quatrième ordre, on peut, par une transformation consistant à diviser X et T par a et d' respectivement, ramener les équations à la forme

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{b\lambda^3 + b'\lambda^2} = \frac{Z}{c\lambda^2 + c'\lambda} = \frac{T}{1}.$$

Pour voir quelle est la classe d'une courbe représentée par ces équations, on peut considérer, soit l'équation du plan osculateur qui est

$$\begin{aligned}(3bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + b'c')X - 2(4c\lambda + 3c')\lambda^2 Y \\ + 2(3b\lambda + 4b')\lambda^3 z - (bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + 3b'c')\lambda^4 = 0,\end{aligned}$$

soit l'équation qui donne les points stationnaires; cette dernière a une racine infinie, une racine nulle et les deux autres sont données par

$$2bc\lambda^2 + 3bc'\lambda + 2bc' = 0.$$

Il serait facile de faire le tableau des cas qui peuvent se présenter. Pour obtenir des formes d'équations aussi simples que possible, je ferai remarquer que, si l'on écarte le cas des courbes de quatrième classe que j'ai déjà étudiées dans un autre Mémoire, on peut toujours supposer b, b', c, c' différents de zéro. En effet, si $b = 0$ ou $c' = 0$, l'équation qui donne les points de contact des plans stationnaires a une racine triple infinie ou nulle; la courbe est une biquadratique de quatrième classe.

Si $c = 0$ ou $b' = 0$, l'équation qui donne les plans stationnaires a une racine double infinie ou nulle; on a alors une courbe de cinquième classe, si une seule des conditions est vérifiée, ou une quartique de quatrième classe à sécantes triples, si les deux conditions sont vérifiées simultanément.

Dans le cas où la courbe est de cinquième classe, on a vu que celle-ci avait deux plans stationnaires ordinaires et un plan correspondant à une tangente d'inflexion; c'est celui-ci qui correspond à la racine double. Comme on peut toujours prendre pour sommets du tétraèdre de référence les points de contact des plans stationnaires ordinaires, on peut toujours faire en sorte que l'équation qui donne ceux-ci n'ait pour racines infinie ou nulle que des racines simples.

Si donc on suppose $bb'cc' \neq 0$ on peut, par une transformation analogue à celle que j'ai employée au début de ce numéro, ramener les équations à la forme

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3 + \beta\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda^2 + \gamma\lambda} = \frac{T}{1},$$

β et γ étant tous deux différents de zéro.

7. Si maintenant on remplace λ par $\beta\lambda$, X par $\beta^4 X$, Y par $\beta^3 Y$, Z par $\beta^2 Z$ et si l'on pose $\gamma = h\beta$, on obtient les équations

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3 + \lambda^2} = \frac{Z}{\lambda^2 + h\lambda} = \frac{T}{1},$$

et, d'après ce qui précède, toute courbe du quatrième ordre, de sixième ou de cinquième classe est transformée homographique d'une des courbes représentées par ces équations. L'équation qui donne les points de contact des plans stationnaires est alors

$$2\lambda^2 + 3h\lambda + 2h = 0;$$

si $h \neq 0$, l'équation ne peut avoir de racine double que si

$$9h - 16 = 0;$$

dans ce cas la courbe est de cinquième classe.

La courbe est en général une quartique à sécantes triples; pour que ce soit une biquadratique, il faut et il suffit que $h = 2$. La courbe est alors sur les quadriques

$$Y^2 - ZX - X = 0,$$
$$Z^2 - X - 4Y = 0.$$

Les valeurs de λ qui correspondent au point double sont données par

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

8. On peut maintenant faire l'énumération complète des types de courbes qui, au moyen de transformations homographiques, donnent toutes les courbes gauches unicursales du quatrième ordre :

Biquadratique à rebroussement,

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^2, \qquad Z = \lambda;$$

quartique de quatrième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3, \qquad Z = \lambda;$$

quartique de cinquième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + \frac{16}{9}\lambda;$$

biquadratique à point double ordinaire,

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + 2\lambda;$$

quartique de sixième classe à sécantes triples,

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + h\lambda,$$

h étant, dans ce dernier, différent de o, 2 et $\frac{16}{9}$.

On peut remarquer que les équations des quatre premiers types ne contiennent plus de constante arbitraire; on en conclut immédiatement que toutes les courbes correspondant à l'un de ces types se déduisent homographiquement de l'une d'elles.

On peut remarquer aussi que les équations

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + h\lambda$$

donneraient une biquadratique à rebroussement pour $h = 0$. De sorte que ces équations peuvent être considérées, à une transformation homographique près, comme représentant toute courbe gauche unicursale du quatrième ordre, sauf les quartiques de Steiner de quatrième classe, qui se distinguent des autres courbes du quatrième ordre par ce fait que leurs tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

III. — Les plans stationnaires.

9. Les λ des points de contact des plans stationnaires étant donnés par l'équation

$$\Delta_0 + 4\Delta_1\lambda + 6\Delta_2\lambda^2 + 4\Delta_3\lambda^3 + \Delta_4\lambda^4 = 0,$$

la condition pour que ces points soient dans un même plan s'exprime par

$$\Delta_0\Delta_4 - 4\Delta_1\Delta_3 + 6\Delta_2^2 - 4\Delta_3\Delta_1 + \Delta_4\Delta_0 = 0.$$

Si l'on prend les équations sous la forme réduite donnée au n° 7, la condition précédente donne

$$h = \frac{4}{3}.$$

Donc les courbes dont les points de contact des plans stationnaires sont dans un même plan sont transformées homographiques de

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda.$$

On peut constater que les points en question sont dans le plan

$$Y + 3Z = 0$$

et que deux d'entre eux sont imaginaires.

10. Dans le cas général, il existe une relation simple entre les tangentes à la courbe aux points stationnaires. *Ces tangentes sont sur une même quadrique.*

En effet l'équation générale des quadriques passant par les deux tangentes qui sont les arêtes du tétraèdre de référence est

$$Z(AX + BY) + (CX + DY) = 0;$$

si l'on forme l'équation qui donne les λ des points d'intersection de la quadrique avec la courbe, on obtient

$$A\lambda^6 + (B + Ah)\lambda^5 + (B + Bh + C)\lambda^4 + (Bh + D)\lambda^3 + D\lambda^2 = 0;$$

or le premier membre de cette équation est le carré du polynome

$$2\lambda^3 + 3h\lambda^2 + 2h\lambda,$$

qui égalé à zéro donne les λ des plans stationnaires, si l'on a

$$A = 4, \qquad B = 8h, \qquad C = h^2, \qquad D = 4h^2.$$

Donc la quadrique

$$4XZ + 8hYZ + h^2X + 4h^2Y = 0,$$

qui contient deux tangentes, est coupée par chacune des autres en deux points confondus; de plus, les coefficients directeurs des tangentes en ces points étant

$$4\lambda^3, \qquad 3\lambda^2+2\lambda, \qquad 2\lambda+h,$$

ces droites sont parallèles au plan directeur

$$X+2hY=0$$

de la quadrique puisque la condition de parallélisme s'exprime par

$$4\lambda^3+6h\lambda^2+4h\lambda=0,$$

équation vérifiée par les λ des points de contact. Donc les tangentes considérées ont trois points communs avec la quadrique.

11. Cette quadrique se décompose en deux plans si $h=2$, c'est-à-dire si la courbe est une biquadratique; ces deux plans

$$X+4Y=0, \qquad Z+1=0$$

sont des plans bitangents contenant chacun un couple de tangentes aux points de contact des plans stationnaires.

Quand la quadrique ne se décompose pas, les plans

$$X+4Y=0, \qquad 4Z+h^2=0,$$

qui sont tangents à cette surface aux sommets du tétraèdre de référence où la courbe a des plans stationnaires, sont encore des plans bitangents. Ces points étant deux quelconques des quatre points de contact des plans stationnaires, la propriété appartient à tous ces points. Donc *les plans tangents à la quadrique des tangentes aux points de contact des plans stationnaires sont des plans bitangents à la courbe.*

12. Les plans stationnaires forment un tétraèdre; la raison de ce fait est qu'un plan stationnaire comptant comme deux plans osculateurs confondus, si les plans stationnaires avaient un point commun de ce point, on pourrait mener huit plans osculateurs à la courbe, ce qui est impossible. C'est pour une raison analogue que les trois tangentes d'inflexion à une cubique plane à point double ne peuvent être concourantes.

On peut donc prendre les plans stationnaires comme faces du tétraèdre de référence; les équations de la courbe peuvent alors s'écrire

$$X = a(\lambda + \alpha)^4, \qquad Y = b(\lambda + \beta)^4, \qquad Z = c(\lambda + \gamma)^4, \qquad T = d(\lambda + \delta)^4,$$

et le plan osculateur a pour équation

$$\begin{vmatrix} \frac{X}{a} & \frac{Y}{b} & \frac{Z}{c} & \frac{T}{d} \\ (\lambda+\alpha)^2 & (\lambda+\beta)^2 & (\lambda+\gamma)^2 & (\lambda+\delta)^2 \\ \alpha(\lambda+\alpha)^2 & \beta(\lambda+\beta)^2 & \gamma(\beta+\gamma)^2 & \delta(\lambda+\delta)^2 \\ \alpha^2(\lambda+\alpha)^2 & \beta^2(\lambda+\beta)^2 & \gamma^2(\lambda+\gamma)^2 & \delta^2(\lambda+\delta)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que cette équation est bien du sixième degré en λ, autrement dit, qu'une courbe ayant quatre plans stationnaires distincts est de sixième classe. Si l'on forme la condition pour que les quatre points de contact des plans stationnaires soient dans un même plan, on voit que les déterminants Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ont en facteur un déterminant de Vandermonde, et il reste

$$12\alpha\beta\gamma\delta - 3\Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta\gamma + (\Sigma\alpha\beta)^2 = 0;$$

l'équation du deuxième degré, qui donnerait une des quantités α, β, γ, δ si les trois autres étaient données, a ses racines imaginaires, ce qui est d'accord avec le résultat signalé à la fin du n° 9.

IV. — Le plan Π.

13. J'ai déjà fait remarquer que, si d'un point M d'une courbe de sixième classe on mène les plans osculateurs à la courbe, les points de contact de ces plans sont dans un plan passant par M et que j'ai désigné par Π. On peut se proposer de chercher si les points de contact des points osculateurs sont sur une même droite.

Si la courbe est donnée par les équations

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^3 + \lambda^2, \qquad Z = \lambda^2 + h\lambda,$$

la relation entre les λ des points d'intersection avec un plan est

$$hS_1 + hS_2 + S_3 = 0,$$

S_k désignant la somme des produits k à k des quatre λ. Si trois des points sont en ligne droite et si l'on désigne par σ_1, σ_2, σ_3 la somme de ces λ ou de leurs produits 2 à 2 ou 3 à 3, et par λ' le quatrième λ, la relation précédente s'écrit

$$h(\sigma_1 + \lambda') + h(\sigma_2 + \sigma_1\lambda') + (\sigma_3 + \sigma_2\lambda') = 0.$$

Pour que les trois points soient en ligne droite il faut que cette équation ne donne pas pour λ' une valeur déterminée, c'est-à-dire que l'on ait simultanément

$$\begin{aligned} h\sigma_1 + h\sigma_2 + \sigma_3 &= 0, \\ h \quad + h\sigma_1 + \sigma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Or les λ des points de contact des plans osculateurs menés du point λ' sont donnés par l'équation

$$\lambda^3 + 3(h + \lambda')\lambda^2 + 3h(\lambda' + 1)\lambda + \lambda' h = 0.$$

Si l'on remplace dans les équations de conditions précédentes σ_1, σ_2, σ_3 par leurs expressions déduites de cette dernière équation, on obtient, après réductions simples,

$$\lambda'(3h^2 - 4h) = 0, \qquad 4h - 3h^2 = 0.$$

On en déduit immédiatement, puisque h ne peut être nul, que, pour que les points considérés soient en ligne droite, il faut et il suffit que

$$h = \frac{4}{3},$$

ce qui est la condition pour que les points de contact des plans stationnaires soient dans un plan; le point d'où l'on mène les plans osculateurs n'intervient pas dans la condition. Donc :

1° *Si les points de contact des plans osculateurs menés d'un point de la courbe sont en ligne droite, il en est toujours de même, quel que soit le point pris sur la courbe;*

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que ce fait se produise est que les points de contact des plans stationnaires soient dans un même plan.*

14. Pour obtenir l'équation du plan Π, je vais écrire que les λ des points d'intersection de ce plan avec la courbe sont λ' et les trois λ correspondant aux plans osculateurs menés par λ'. L'équation d'un plan étant

$$AX + BY + CZ + D = o,$$

il s'agit d'identifier l'équation

$$A\lambda^4 + B(\lambda^3 + \lambda^2) + C(\lambda^2 + h\lambda) + D = o,$$

avec l'équation

$$(\lambda - \lambda')[\lambda^3 + 3(\lambda' + h)\lambda^2 + 3h(\lambda' + 1)\lambda + h\lambda'] = o.$$

On voit immédiatement que l'on peut prendre

$$A = 1, \qquad B = 2\lambda' + 3h, \qquad C = -(3\lambda'^2 + 2\lambda'), \qquad D = -h\lambda'^2,$$

de sorte que l'équation du plan peut s'écrire

$$(X + 3hY) + 2(Y - Z)\lambda' - (3Z + h)\lambda'^2 = o;$$

on en déduit facilement que *le plan a pour enveloppe le cône*

$$(Y - Z)^2 + (X + 3hY)(3Z + h) = o,$$

dont le sommet est le point ω

$$X = h^2, \qquad Y = -\frac{h^2}{3}, \qquad Z = -\frac{h}{3}.$$

Pour que le point ω soit sur la courbe, il faut que $h = \frac{9}{16}$; la courbe serait alors de cinquième classe; d'un point M de la courbe on ne peut mener que deux plans osculateurs, le plan passant par M et par les points de contact passe par le point d'inflexion linéaire, qui est le point ω.

15. *Le cône enveloppe du plan* Π *touche la courbe aux points de contact des plans stationnaires,* car, si l'on remplace X, Y, Z par leurs expressions en fonction de λ dans le premier membre de l'équation du cône, on obtient, après simplifications et réductions,

$$\lambda^2(2\lambda^2 + 3h\lambda + 2\lambda)^2 = o.$$

Or le premier membre de cette équation est le carré du premier membre de celle qui donne les points stationnaires.

Il est facile de reconnaître que, lorsque les points stationnaires sont dans un même plan, le point ω est le pôle de ce plan par rapport à la quadrique qui contient les quatre tangentes. Les plans qui touchent cette quadrique aux points stationnaires ne sont autres que les plans Π correspondant aux points stationnaires.

V. — Courbes particulières.

16. Les courbes données par les équations

$$\frac{X}{\cos\theta} = \frac{Y}{\sin\theta} = \frac{Z}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{T}{\alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta},$$

ou, si l'on pose $\tang\frac{\theta}{2} = \lambda$,

$$\frac{X}{1-\lambda^4} = \frac{Y}{2\lambda(1+\lambda^2)} = \frac{Z}{2\lambda(1-\lambda^2)} = \frac{T}{\alpha(1-\lambda^2)^2 + 4\beta\lambda^2},$$

sont des courbes unicursales du quatrième ordre. Les trois arêtes du tétraèdre de référence qui passerait par le point $X = Y = Z = 0$ sont des cordes de la courbe et le plan $T = 0$ est celui qui passe par les conjugués du point de concours de ces cordes par rapport aux segments déterminés par la courbe.

L'équation qui détermine les points de contact des plans stationnaires est

$$(\alpha - 2\beta)\lambda^4 + 6\alpha\lambda^2 + (\alpha - 2\beta) = 0.$$

La discussion de cette équation montre qu'elle a ses racines distinctes, sauf dans les cas suivants, où elle a deux racines doubles :

$\alpha = 2\beta$,	racine nulle et racine infinie ;
$\beta = 2\alpha$,	racines ± 1 ;
$\alpha + \beta = 0$,	racines $\pm i$.

Dans ces cas, on a des quartiques de Steiner de quatrième classe. Dans les autres cas, on a des courbes de quatrième ordre et de sixième classe [1].

[1] Les lignes de striction des hyperboloïdes à une nappe sont des transformées homographiques de courbes appartenant à la catégorie considérée. Ce sont des quartiques de Steiner ; elles sont en général de sixième classe. Le cas où elles sont de quatrième classe correspond, comme me l'a fait remarquer M. Blutel, au cas des hyperboloïdes dont les plans cycliques sont rectangulaires.

17. On peut distinguer facilement les cas dans lesquels les courbes données par les équations précédentes sont des biquadratiques. Pour une biquadratique il passe par chaque point de l'espace deux cordes proprement dites et la droite qui passe par le point double. Le point $X = Y = Z = 0$ étant sur chaque droite le conjugué du point situé dans le plan $T = 0$, pour que la courbe ait un point double, il faut que ce point soit dans le plan $T = 0$.

On voit ainsi que l'on a des biquadratiques dans les cas suivants :

1° $\alpha = 0$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\beta^2(Y^2 - Z^2) = T^2, \qquad \beta YZ = TX;$$

2° $\beta = 0$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\alpha^2(X^2 - Z^2) = T^2, \qquad \alpha X^2 = TX;$$

3° $\alpha = \beta$; la courbe est l'intersection des quadriques

$$\alpha^2(X^2 + Y^2) = T^2, \qquad \alpha XY = TZ.$$

Dans tous les cas, la courbe est sur la quadrique

$$\alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 - (\alpha - \beta)^2 Z^2 = T^2.$$

18. Si l'on rejette à l'infini l'une des faces du tétraèdre de référence, les trois autres faces étant rectangulaires, on obtient une courbe qui admet pour axes de symétrie les trois axes de coordonnées, sans avoir de centre de symétrie. On obtient les points symétriques d'un point correspondant à une valeur θ de l'angle qui figure dans les premières équations en remplaçant θ par $-\theta$, $\pi - \theta$, $\pi + \theta$.

On a ainsi des courbes transformables de quatre façons différentes, en courbes ayant pour axes de symétrie les trois arêtes d'un trièdre trirectangle, sans que le sommet de ce trièdre soit un centre.

Il est facile de constater que le point ω considéré plus haut n'est autre, dans le cas actuel, que le point $X = Y = Z = 0$.