H. LEBESGUE

Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 202-212
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__202_1>

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CORRESPONDANCES DE M. ZERMELO;

Par M. Henri Lebesgue.

Soit un ensemble M formé de certains éléments. Nous appelons sous-ensemble de M tout ensemble formé avec des éléments de M pris en totalité ou en partie. Imaginons qu'à chaque sous-ensemble de M nous sachions faire correspondre un élément particulier, bien déterminé, de ce sous-ensemble; une telle correspondance entre les sous-ensembles de M et des *éléments distingués* de ces sous-ensembles est dite une correspondance de M. Zermelo.

C'est en se fondant sur l'existence de telles correspondances que M. Zermelo ([1]) a démontré que tout ensemble pouvait être bien ordonné, le sens qu'il faut attribuer au verbe *pouvoir* restant d'ailleurs très obscur pour certains esprits.

Il n'est douteux pour personne qu'on ne pourra jamais, sans particulariser l'ensemble M, nommer une correspondance de M. Zermelo pour tout ensemble M, puisque rien ne nous permet de distinguer deux éléments de M : nous savons seulement qu'ils sont distincts. Je me propose de montrer dans cette Note combien sont encore grandes les difficultés que l'on rencontrerait, si l'on essayait de nommer une correspondance de M. Zermelo pour l'ensemble M des nombres réels. Ma conclusion sera que l'*on ne pourra jamais définir une telle correspondance par des pro-*

([1]) *Beweiss dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.* (Lettre à M. Hilbert, publiée dans le Tome LIX des *Math. Annalen.*)

cédés analytiques et cela même si l'on se borne à la considération de certains sous-ensembles très particuliers.

J'emploie dans ce qui suit la terminologie que j'ai adoptée dans un précédent travail (1) et j'utilise certains des résultats que j'ai obtenus. Je dirai qu'une fonction est *représentable analytiquement,* si l'on peut la construire en effectuant, suivant une loi déterminée, des opérations élémentaires (additions, soustractions, multiplications, divisions) et des passages à la limite, en nombre fini ou dénombrable, à partir de constantes et des variables, supposées en nombre fini ou dénombrable. Cette définition très large comprend toutes les fonctions qui ont été nommées jusqu'ici, même celles qu'on a construites comme exemples des singularités les plus inattendues, sauf celles que j'ai formées à la fin du Mémoire cité. Encore faut-il ajouter que la méthode de construction que j'ai employée, à laquelle Kronecker eût vraisemblablement dénié les qualités qu'il exigeait d'une définition, est un procédé d'exclusion des fonctions représentables analytiquement; au contraire, les procédés ordinaires de définition des fonctions, qui reviennent tous à une division du domaine considéré en ensembles partiels par des procédés analytiques et à une définition analytique de la fonction sur chacun de ces ensembles, conduisent nécessairement à des fonctions représentables analytiquement.

Pour qu'une fonction f soit représentable analytiquement il faut et il suffit que, quels que soient a et b, les ensembles $E(a < f < b)$, $E(a = f)$, formés des points pour lesquels les égalité et inégalité entre parenthèses sont vérifiées, soient mesurables B.

Les fonctions que j'ai construites sont les seules connues qui ne satisfont pas à cette condition; encore rentrent-elles dans la catégorie des fonctions mesurables, c'est-à-dire de celles pour lesquelles les ensembles $E(a < f < b)$, $E(a = f)$ sont mesurables. On ne sait pas si l'on pourra jamais nommer un ensemble non mesurable, une fonction non mesurable.

On va voir que, pour nommer une correspondance de M. Zermelo pour les nombres réels, il faudrait nommer une fonction non représentable analytiquement et même non mesurable.

(1) *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journ. de Math.,* 6e série, t. I, fasc. II, 1905, p. 139-216).

Nommer une telle correspondance, c'est faire correspondre à tout ensemble de nombres E un des nombres de l'ensemble, ou faire correspondre à la fonction f, égale à zéro aux points de E et à 1 ailleurs, une des racines de cette fonction. Si y est cette racine, y apparaît comme une fonction portant sur une variable qui est la forme et la valeur de la fonction f dans un intervalle. Les opérations fonctionnelles faisant correspondre des nombres à des formes de fonctions n'ont guère été étudiées, sauf cette opération fonctionnelle que l'on nomme *intégration définie* (1); il serait donc prématuré de rechercher à quelle classe d'opérations fonctionnelles il conviendrait de réserver le nom d'*opérations analytiques*. Mais, si l'on convient de dire qu'*une opération fonctionnelle est définie par un procédé analytique quand elle fait correspondre à toute fonction $f(x, \lambda)$ exprimable analytiquement un nombre $y(\lambda)$ exprimable analytiquement*, on est certain d'avoir une définition assez large pour qu'il soit très difficile de trouver une opération qui n'y satisfasse pas (2).

Ces préliminaires exposés, je démontre que, *même si l'on se borne à la considération des ensembles dénombrables, il est impossible de définir pour eux une correspondance de M. Zermelo par des procédés analytiques.*

Soit t une variable comprise entre 0 et 1 ; je l'écris dans le système décimal en ayant soin, par exemple, de n'employer qu'un nombre fini de chiffres significatifs quand cela est possible. On a

---

(1) Cependant il est facile de nommer bien d'autres opérations fonctionnelles de la nature de celles dont il s'agit ici. Ainsi la limite supérieure, la variation totale, la mesure extérieure de l'ensemble des valeurs d'une fonction sont des fonctions de la forme de cette fonction. Quand on s'occupe de classes moins étendues de fonctions on peut citer bien d'autres opérations fonctionnelles de la nature ici considérée. Toutes celles étudiées par M. Volterra et par M. Hadamard sont de cette nature. Les opérations fonctionnelles considérées par M. Pincherle et par M. Bourlet sont un peu différentes : elles font correspondre des fonctions à des fonctions.

(2) Par exemple, si l'on peut obtenir le nombre y à partir de f en effectuant une infinité dénombrable d'opérations élémentaires, de passages à la limite, d'opérations f elles-mêmes sur des nombres ou des fonctions, une infinité dénombrable d'intégrations, de dérivations, y est défini à partir de f par un procédé analytique.

Les opérations fonctionnelles de la note précédente sont toutes définies par des procédés analytiques.

ainsi

$$t = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

Je pose

$$x_1 = 0,\ a_1 a_3\ a_5\ \ldots,$$

$$x_2 = 0,\ a_2 a_6\ a_{10} \ldots,$$

$$x_3 = 0,\ a_4 a_{12} a_{20} \ldots,$$

et d'une manière générale

$$x_n = 0,\ a_{2^{n-1}.1}\ a_{2^{n-1}.3}\ a_{2^{n-1}.5} \ldots.$$

A chaque valeur de t je fais ainsi correspondre l'ensemble dénombrable des valeurs x_1, x_2, ..., distinctes ou non. Réciproquement, à tout ensemble de nombres x_i, compris entre 0 et 1, correspond au moins une valeur de t.

On sait que le plus grand entier non supérieur à un nombre x est une fonction exprimable analytiquement de x et cela même à l'aide d'expressions fort simples. Or a_1 est le plus grand entier contenu dans $10t$, a_2 le plus grand entier contenu dans $100t - a_1$, ..., donc a_p est une fonction exprimable analytiquement de t. Par suite il en est de même de x_n; il serait même facile de prouver que x_n est une fonction de classe 1 de la variable t.

Je désigne par $\varphi(\theta)$ la fonction égale à 1 pour $\theta = 0$ et à zéro ailleurs; $\varphi(\theta)$ est la limite, pour p infini, de $e^{-p\theta^2}$, c'est donc une fonction exprimable analytiquement. La fonction $f(x, t)$ égale à 1 quand x prend l'une des valeurs x_i correspondant à t et égale à zéro ailleurs est donc

$$f(x, t) = \varphi(x - x_1) + \varphi(x - x_2) + \ldots;$$

c'est une fonction exprimable analytiquement de x et de t. Seulement, pour que cela soit exact, nous ne considérerons que les valeurs de t pour lesquelles tous les x_p sont différents. Les valeurs de t laissées de côté forment l'ensemble somme des ensembles $E_{p,q}$ $(p \neq q)$, $E_{p,q}$ étant formé des valeurs de t pour lesquelles $x_p = x_q$.

$E_{p,q}$ est partout non dense. En effet, dans un intervalle quelconque on peut en trouver un autre, limité par deux fractions décimales exactes d'ordre α qui soient consécutives, $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$; α étant tel que, parmi les α premiers chiffres de t, il y en ait des nombres inégaux β et γ qui interviennent dans x_p et x_q (1). Les valeurs de $E_{p,q}$ qui appartiennent à $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ ont alors $\alpha+|\beta-\gamma|$ chiffres déterminés, c'est-à-dire que l'on peut nommer des intervalles contenus dans $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ dans lesquels il n'y a aucun point de $E_{p,q}$. $E_{p,q}$ est donc bien partout non dense.

Laissons encore de côté les valeurs de t pour lesquelles l'un des x_i est un nombre décimal exact, de façon que la correspondance entre t et l'ensemble des x_i soit biunivoque. Nous laissons ainsi de côté une infinité dénombrable d'ensembles tels que, pour chacun d'eux, l'un déterminé x_i des x ait une valeur décimale déterminée r. r a deux développements déterminés différents r_1 et r_2; donc t a une infinité de chiffres qui doivent être égaux soit aux chiffres de r_1, soit à ceux de r_2. Un raisonnement analogue au précédent montre que l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles on a $x_i = r$ est partout non dense.

En définitive, nous laissons de côté un ensemble qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses, c'est-à-dire un ensemble de première catégorie (2).

Supposant toujours les x_i non décimaux et différents, recherchons quelques propriétés de la transformation de x_p en x_q, les autres x n'étant pas modifiés. Je dis que cette transformation fait correspondre à un ensemble partout non dense de valeurs de t un ensemble partout non dense de valeurs de t. Appliquons, en effet, la transformation à un ensemble E partout non dense dans (0, 1), qui est le seul intervalle considéré, et soit (a, b) une partie quelconque de (0, 1). Dans (a, b) je prends un intervalle i_1 de la forme $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$, α étant tel que, dans les α premiers chiffres de t, il y en ait autant qui servent dans x_p et dans x_q et que le dernier de ces α chiffres n'appartienne ni à x_p ni à x_q.

---

(1) On suppose ici que x_p et x_q ne sont pas des fractions décimales exactes; ce cas est examiné plus loin.

(2) Les notions d'ensembles de première et de seconde catégories sont dus à M. R. Baire; pour les propriétés de ces ensembles on consultera les *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire (Collection de Monographies publiées sous la direction de M. Borel) ou sa Thèse, *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899).

Alors la transformation de x_q en x_p fait correspondre à i_1 un intervalle de même forme i. E étant non dense dans i, on peut trouver un intervalle j, intérieur à i, de la forme $\left(\frac{m}{10^\beta}, \frac{m+1}{10^\beta}\right)$, β jouissant des propriétés ci-dessus indiquées pour α. La transformation de x_p en x_q transforme j en un intervalle de même forme j_1, intérieur à i_1, donc à (a, b), dans lequel il n'y a pas de points de E_1.

Ceci posé, une correspondance de M. Zermelo fera correspondre à toute valeur de t non laissée de côté un nombre $y(t)$ qui sera l'un, bien déterminé puisqu'ils sont tous différents, des nombres $x_1, x_2, \ldots$. Chacune de ces valeurs annulera donc une et une seule des fonctions $y(t) - x_p(t)$. J'appelle e_p l'ensemble des valeurs de t annulant $y(t) - x_p(t)$.

Deux ensembles e_p, e_q n'ont pas de point commun; $(0, 1)$ est la somme des ensembles e_p et de l'ensemble de première catégorie formé des valeurs de t laissées de côté; donc l'un des e_p est de seconde catégorie.

Si la correspondance de M. Zermelo est définie, au moins pour les ensembles dénombrables, par un procédé analytique, $y(t)$ sera une fonction exprimable analytiquement et par suite les e_p seront des ensembles mesurables B.

L'un d'entre eux est de seconde catégorie; or on sait que, si un ensemble mesurable B est de seconde catégorie, il y a un intervalle dans lequel il est partout de seconde catégorie, c'est-à-dire dans lequel son complémentaire est de première catégorie ([1]). Je dis que cela est impossible.

Pour le faire voir, je m'appuierai sur cette remarque évidente : la transformation de x_p en x_q change e_p en e_q, et je montrerai que, si e_p est partout de seconde catégorie dans un intervalle, on peut trouver un intervalle et un ensemble e_q dans lequel e_p et e_q soient tous deux partout de seconde catégorie, ce qui ne peut avoir lieu quand e_p est mesurable B.

Supposons donc e_p partout de première catégorie dans (a, b); dans (a, b) je choisis un intervalle i de la forme $\left(\frac{m}{10^\alpha}, \frac{m+1}{10^\alpha}\right)$ et un nombre q plus grand que α. Dans les α premiers chiffres de t,

---

([1]) *Voir* mon Mémoire cité, p. 187.

il y en a β qui interviennent dans x_p et il n'y en a pas qui interviennent dans x_q. Les valeurs de t comprises dans i et pour lesquelles x_p et x_q ont les β premiers chiffres communs ont donc $\alpha + \beta$ chiffres déterminés, c'est-à-dire que ces valeurs de t appartiennent à un ou plusieurs intervalles j de la forme $\left(\frac{n}{10^\gamma}, \frac{n+1}{10^\gamma}\right)$. Le changement de x_q en x_p fait correspondre à toute valeur d'un intervalle j une valeur de i; donc les points de j qui n'appartiennent pas à e_q proviennent de points de i n'appartenant pas à e_p. Or ces points forment un ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses à chacun desquels la transformation de x_p en x_q fait correspondre des ensembles partout non denses. Dans les intervalles j, e_p et e_q sont donc partout de seconde catégorie. La proposition est démontrée.

Modifions quelque peu le raisonnement précédent; nous obtiendrons un résultat plus général. Nous avons vu que les points de $E_{p,q}$ qui sont contenus dans $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ ont plus de α chiffres déterminés, c'est-à-dire qu'ils peuvent être enfermés dans un intervalle de la forme $\left(\frac{n'}{10^{\alpha+1}}, \frac{n'+1}{10^{\alpha+1}}\right)$. De là il résulte que, si l'on peut enfermer $E_{p,q}$ dans des intervalles de mesure totale l, on peut aussi l'enfermer dans des intervalles de mesure totale $\frac{l}{10}$, et $E_{p,q}$ est de mesure nulle. On démontrera de même que, quand l'un des x_i a une valeur décimale exacte donnée r, t appartient à un ensemble de mesure nulle. L'ensemble des valeurs de t laissées de côté est donc de mesure nulle.

D'autre part, si $y(t)$ est une fonction mesurable, les ensembles e_p sont mesurables. Je dis qu'ils ont tous même mesure. En effet, la transformation de x_p en x_q transforme l'intervalle $\left(\frac{n}{10^\alpha}, \frac{n+1}{10^\alpha}\right)$ d'étendue $\frac{1}{10^\alpha}$ en un intervalle de même étendue, pourvu que dans les α premiers chiffres de t il y en ait autant de x_p que de x_q et que le $\alpha^{\text{ième}}$ chiffre n'appartienne ni à x_p ni à x_q. Cela revient à dire que la transformation de x_p en x_q, qui transforme e_p en e_q, transforme un ensemble qu'on peut enfermer dans des intervalles de longueur totale l en un ensemble qu'on peut enfermer aussi dans des intervalles de longueur totale l. Cette transformation conserve donc la mesure : tous les e_p ont même mesure. Or $(0, 1)$ est la somme des e_p et de l'ensemble exceptionnel E; tous ces ensembles sont sans points communs : on a donc les égalités incompatibles

$$1 = m(E) + m(e_1) + m(e_2) + \ldots,$$
$$m(E) = 0, \qquad m(e_1) = m(e_2) = m(e_3) = \ldots.$$

Il est ainsi démontré que $y(t)$ ne peut pas être une fonction mesurable.

Les raisonnements précédents prouvent aussi que : *il n'existe aucune fonction $y(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de l'infinité dénombrable de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ qui soit représentable analytiquement, ou même simplement mesurable, et qui fasse correspondre à tout ensemble dénombrable $x_1, x_2, x_3, \ldots$ un nombre distingué y de l'ensemble, dépendant de l'ensemble $x_1, x_2, x_3, \ldots$, mais pas de l'ordre dans lequel sont rangés les points qui composent cet ensemble* (1).

La notion d'ensemble dénombrable le plus général n'étant pas des plus claires, il ne sera peut-être pas inutile de montrer qu'on rencontre les mêmes difficultés quand on essaye de nommer une correspondance de M. Zermelo pour des familles très simples d'ensembles dénombrables. Pour n'avoir toujours à considérer que le segment $(0, 1)$, j'introduirai la notion d'ensemble réduit correspondant à un ensemble E. J'appellerai ainsi l'ensemble des parties fractionnaires $F(t)$ des valeurs de t appartenant à E. Un ensemble réduit ne contiendra donc que des valeurs telles que l'on ait

$$0 \leqq F(t) < 1.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que $F(t)$, étant égale à t diminué du plus grand entier, positif, nul ou négatif, qui ne surpasse pas t, est une fonction exprimable analytiquement de t. De telle sorte que, si E est définissable par des procédés analytiques, il en est de même de son ensemble réduit.

Laissons de côté les ensembles bien ordonnés dans l'échelle croissante ou décroissante des valeurs de la variable. Le plus

(1) Cet énoncé est équivalent au précédent.

simple, peut-être, des autres ensembles dénombrables est la progression arithmétique infinie dans les deux sens formée des nombres $a+nr$, n étant un entier positif, nul ou négatif. Pour ces progressions il est facile de nommer un élément distingué par un procédé analytique; par exemple, le plus petit terme positif de la progression, lequel est une fonction de classe 1 des variables a et r. On va voir qu'au contraire cela est impossible pour l'ensemble réduit ([1]).

Pour simplifier je suppose que r a une valeur irrationnelle déterminée, $\sqrt{2}$ par exemple, et je démontre qu'*il n'existe aucune fonction* $y(a)$ *représentable analytiquement ou simplement mesurable qui fasse correspondre à tout ensemble formé des valeurs de* $F(a+n\sqrt{2})$ *pour n entier, une valeur distinguée de l'ensemble ne dépendant que de l'ensemble et non de la manière dont il est donné.*

En effet, si $y(a)$ existait, on aurait, quel que fût l'entier p,

$$y(a+1)=y(a+p\sqrt{2})=y(a);$$

$\lambda(a)$ désignant un entier convenable, l'expression

$$z(a)=\frac{y(a)-a+\lambda(a)}{\sqrt{2}}$$

définirait un entier $z(a)$ vérifiant les égalités

$$\begin{aligned} z(a+1) &= z(a),\\ z(a+p\sqrt{2})+p &= z(a),\\ z[a+F(p\sqrt{2})]+p &= z(a). \end{aligned}$$

Désignons par e_q l'ensemble des valeurs de a comprises dans $(0, 1)$ pour lesquelles $z(a)=q$. Nous supposons y mesurable; donc e_q est mesurable. Or on passe de e_q à une partie de e_{q-p} par

---

([1]) Ce fait, singulier au premier abord, résulte de ce que, tandis qu'il est possible de repérer la position de la progression $a+nr$ dans l'échelle des nombres, cela devient impossible si l'on ne connaît que l'ensemble réduit correspondant, parce que le même ensemble réduit correspond à la fois aux deux progressions $a+nr$ et $(a+1)+nr$. De sorte que ce qui va être démontré, c'est l'impossibilité de définir par des procédés analytiques une correspondance de M. Zermelo pour les progressions arithmétiques à deux raisons formées des valeurs que prend l'expression $a+m+nr$ pour toutes les valeurs entières de m et de n, et cela même si r a une valeur irrationnelle déterminée, $\sqrt{2}$ par exemple.

les opérations suivantes : 1° on effectue la translation $+F(p\sqrt{2})$ sur la partie de e_q contenue dans $[0, 1-F(p\sqrt{2})]$, l'extrémité $1-F(p\sqrt{2})$ exclue; 2° on effectue la translation $-[1-F(p\sqrt{2})]$ sur la partie de e_q contenue dans $[1-F(p\sqrt{2}), 1]$, origine comprise. On passerait de même de e_{q-p} à e_q; donc e_q et e_{q-p} ont la même mesure.

(0, 1) est la somme des e_q, sans point commun; tous les e_q ont la même mesure et ils sont en nombre infini; d'où l'impossibilité qui légitime l'énoncé.

Je crois utile, en terminant, de faire quelques remarques. Dans toute question d'existence, il y a lieu de tenir compte de deux mentalités différentes : celle de l'idéaliste et celle de l'empiriste de P. du Bois-Reymond (1). Dans ce qui précède, j'ai donné aux définitions leur sens idéaliste; c'est ainsi, par exemple, que j'ai parlé d'une infinité dénombrable de constantes sans m'occuper d'une loi les définissant, parce que tout ce qui rentre dans la définition empirique rentre *a fortiori* dans la définition idéaliste. Au contraire, j'ai fait des raisonnements empiristes parce que ce sont les seuls qu'idéalistes et empiristes s'accordent à déclarer corrects.

En donnant aux définitions leur sens idéaliste, on est certain de leur donner un sens aussi large que celui que les empiristes leur donneront jamais (2); mais il ne s'ensuit pas qu'on doive utiliser des preuves idéalistes. Sans doute, celles de ces preuves qu'on

---

(1) *Théorie générale des fonctions*, traduction G. Milhaud et A. Girot, Nice, 1887. Il n'y a d'ailleurs pas que deux mentalités en présence, car il y a bien des manières d'être idéaliste ou empiriste. L'empirisme de Kronecker n'est pas celui de M. Jules Drach; l'idéalisme de du Bois-Reymond diffère sensiblement de celui de M. Jacques Hadamard.

Il est d'ailleurs vraisemblable que, connaissant les résultats récents obtenus dans la *Théorie des fonctions*, du Bois-Reymond eût modifié, sur des points de détail, le langage qu'il prête à l'idéaliste.

(2) On ne mérite donc pas ce reproche que M. Hadamard formulait ainsi : « Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs sur la notion même de fonction. La loi qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. » Et en note : « Je crois devoir insiter un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de

peut construire actuellement légitiment tous les énoncés qui, au cours des siècles, seront démontrés par les empiristes ; mais est-il bien certain que ces preuves ne légitiment pas aussi des énoncés que les empiristes démontreront être faux? On a vu récemment M. Burali-Forti, employant les raisonnements idéalistes que l'on utilisait constamment, à l'exemple de M. G. Cantor, dans l'étude des ensembles, mettre en évidence une contradiction à laquelle ils conduisent (1). Sans doute, les raisonnements de M. Burali-Forti ont été immédiatement condamnés par des idéalistes qui ont fait remarquer, avec raison, qu'il formait un ensemble avec des objets non préalablement existants (2). Cette critique, pour l'empiriste, a la valeur suivante : M. Burali-Forti raisonne sur des êtres mal définis comme s'ils étaient bien définis; or l'empiriste se demande si ce n'est pas précisément là ce qui caractérise le raisonnement idéaliste? Pour qu'un empiriste pût admettre les preuves idéalistes, il faudrait qu'on lui eût enseigné comment, avant qu'un raisonnement idéaliste ait conduit à une contradiction, il pourra s'apercevoir s'il est illégitime ou légitime.

Ayant ainsi fait mes réserves sur la valeur des preuves idéalistes, j'énonce des propositions démontrées dans ce qui précède par des raisonnements idéalistes :

Il existe des ensembles qui ne sont pas mesurables.

Il existe des ensembles qui sont, ainsi que leurs complémentaires, de seconde catégorie dans tout intervalle (3).

---

notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des Mathé- » matiques », parce qu'il était impossible de les décrire. » (Ce *Bulletin*, t. XXXIII, 1905, p. 270.)

(1) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1897. (*Voir* aussi HILBERT. *Congrès de Heidelberg;* J. RICHARD, *Revue générale des Sciences*, année 1905.)

(2) HADAMARD, *Loc. cit.*, p. 271.

(3) Cette Note a été rédigée à l'occasion d'une question posée par M. C. Segre (*Math. Ann.*, t. XL) et sur laquelle il a bien voulu appeler mon attention.

La réponse partielle que j'ai pu faire à cette question a été publiée dans les *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino*, 10 mars 1907. J'ai appris depuis que des considérations analogues à certaines de celles que j'utilisais avaient été développées par M. Hamel dans le tome LX des *Math. Annalen*.

J'ajoute que l'existence, au sens idéaliste, d'ensembles non mesurables a été démontrée par M. VITALI (Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905).