BULLETIN DE LA S. M. F.

B. NIEWENGLOWSKI

Sur les équations $x^2 - ay^2 = 1$ et $x^2 - ay^2 = -1$

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 126-131

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__126_0>

NOTE SUR LES ÉQUATIONS $x^2 - ay^2 = 1$ ET $x^2 - ay^2 = -1$;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

1. On sait que l'équation

$$(1)\qquad x^2 - ay^2 = 1,$$

dans laquelle a est un entier non carré, a une infinité de solutions entières. Si x et y sont deux entiers positifs vérifiant l'équation, $\frac{x}{y}$ est une réduite de rang pair du développement de $\sqrt{a}$ en fraction continue.

2. Soit x_1, y_1 une solution entière positive de l'équation (1), telle que $x_1 > 1$, et soient α, β les racines de l'équation

$$(2)\qquad x^2 - 2x_1 x + 1 = 0,$$

en posant

$$(3)\qquad x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}, \qquad y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{a}} \qquad (\alpha > \beta);$$

x_n, y_n sera une solution entière de (1). Si x_1, y_1 désigne la plus petite solution entière et positive de l'équation considérée, on démontre aisément que les formules (3) donnent toutes les solutions entières positives de la même équation.

On calcule ces solutions par les formules de récurrence

$$(4)\qquad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_1 x_n - x_{n-1}, \\ y_{n+1} = 2x_1 y_n - y_{n-1}. \end{cases}$$

3. L'équation (1) représente, en axes rectangulaires, une hyperbole de sommets (1, 0) et (— 1, 0). Nous appellerons *points entiers* les points de cette hyperbole ayant pour coordonnées des nombres entiers.

On établit facilement les propriétés suivantes de ces points. Si M et M′ sont deux points entiers, la parallèle à la tangente en M′ menée par M rencontre une seconde fois l'hyperbole (1) en un point entier M″. Si M et M′ sont sur une même branche et que l'arc MM′ ne possède aucun autre point entier que ses extrémités, nous dirons que M et M′ sont des points entiers consécutifs ; alors M′ et M″ sont aussi des points entiers consécutifs.

Soient $A(1, 0)$ le sommet, $A_1(x_1, y_1)$ le premier point entier à coordonnées positives ; la parallèle menée par A à la tangente en A_1 donnera le point $A_2(x_2, y_2)$; la corde A_1A_3 sera parallèle à la tangente en A_2, etc., et l'on obtiendra ainsi tous les points à coordonnées entières et positives. Par symétrie, on aura tous les points entiers à coordonnées positives ou négatives.

Au moyen de ces remarques, on voit par exemple que, si x', y' est une solution entière, les formules

$$x = 2x'^2 - 1, \qquad y = 2x'y'$$

en fournissent une nouvelle. De même

$$x = 4x'^3 - 3x', \qquad y = 4ay'^3 + 3y', \qquad \ldots,$$

formules qu'on obtient aisément à l'aide des équations (4).

On peut encore remarquer qu'il y a une infinité de manières de distribuer les points entiers deux à deux sur des cordes parallèles.

4. L'équation $x^2 - an^2y^2 = 1$ a une infinité de solutions entières. Soit x', y' l'une d'elles ; alors x', ny' est une solution de l'équation (1). Donc cette équation (1) a une infinité de solutions x, y telles que y soit un multiple d'un entier n donné arbitrairement.

5. Occupons-nous maintenant de l'équation

$$(1)' \qquad x^2 - ay^2 = -1.$$

Elle n'a pas toujours de solutions entières. Si elle en a, elle en a une infinité et, si l'on désigne l'une quelconque par ξ, η, la fraction $\frac{\xi}{\eta}$ est une réduite de rang impair du développement de $\sqrt{a}$. En outre, si ξ_1, η_1 désigne la solution entière positive composée des plus petits entiers possibles, on a $\xi_1 > 1$ et en outre

$$\xi_1 < x_1, \qquad \eta_1 < y_1.$$

Soient γ, δ les racines de l'équation

$$(2)' \qquad x^2 - 2\xi_1 x - 1 = 0;$$

si l'on pose

$$(3)' \qquad \xi_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}, \qquad \eta_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{2\sqrt{a}} \qquad (\gamma > \delta),$$

on aura

$$\xi_n^2 - a\eta_n^2 = \varepsilon,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1, suivant que n est pair ou impair.

On a

$$(4)' \qquad \begin{cases} \xi_{n+1} = 2\xi_1 \xi_n + \xi_{n-1}, \\ \eta_{n+1} = 2\xi_1 \eta_n + \eta_{n-1}. \end{cases}$$

On obtient ainsi, en remarquant que $\xi_0 = 1$, $\eta_0 = 0$,

$$\xi_2 = 2\xi_1^2 + 1,$$
$$\eta_2 = 2\xi_1 \eta_1,$$

d'où

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 - 1}{2}}, \qquad \eta_1 = \sqrt{\frac{\xi_2 + 1}{2a}}.$$

Plus généralement, si l'on pose

$$(5) \qquad \xi = \sqrt{\frac{x - 1}{2}}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{x + 1}{2a}},$$

ou, inversement,

$$(6) \qquad x = 2\xi^2 + 1, \qquad y = 2\xi\eta,$$

si les formules (5) attribuent à ξ, η des valeurs entières, ξ, η sera une solution de l'équation (1)'. D'autre part, si ξ, η est une solution entière de (1)', les formules (6) donnent pour x, y des valeurs entières vérifiant l'équation (1).

Or,

$$\eta_2 = 2\xi_1 \eta_1 < 2x_1 y_1,$$

c'est-à-dire

$$\eta_2 < y_2.$$

Mais

$$\xi_2^2 - a\eta_2^2 = 1;$$

donc

$$\xi_2 = x_1, \qquad \eta_2 = y_1.$$

La relation

$$\xi_2 = 2\xi_1^2 + 1$$

peut donc s'écrire

$$x_1 = 2\xi_1^2 + 1,$$

et de même

$$y_1 = 2\xi_1\eta_1.$$

De là cette conséquence : *pour que l'équation*

$$x^2 - ay^2 = -1$$

ait des solutions entières, il faut et il suffit que la plus petite solution positive entière autre que 1, 0 *de l'équation* (1) *soit de la forme*

$$x_1 = 1 + 2u^2,$$
$$y_1 = 2uv,$$

et alors $\xi_1 = u$, $\eta_1 = v$.

6. Cela posé, des formules

$$\xi_{p+2} = 2\xi_1\xi_{p+1} + \xi_p,$$
$$\xi_{p+1} = 2\xi_1\xi_p \quad + \xi_{p-1},$$
$$\xi_p \quad = 2\xi_1\xi_{p-1} + \xi_{p-2}$$

on tire

(7) $$\xi_{p+2} = 2x_1\xi_p - \xi_{p-2}$$

et de même

(7)′ $$\eta_{p+2} = 2x_1\eta_p - \eta_{p-2}.$$

Si nous supposons p impair, ξ_{p-2}, η_{p-2} ; ξ_p, η_p ; ξ_{p+2}, η_{p+2} sont trois solutions de (1)′ fournies par les formules (3)′; désignons-les par

$$x'_{n-1}, y'_{n-1}; x'_n, y'_n; x'_{n+1}, y'_{n+1}.$$

Nous aurons ainsi

(8) $$\begin{cases} x'_{n+1} = 2x_1x'_n - x'_{n-1}, \\ y'_{n+1} = 2x_1y'_n - y'_{n-1}. \end{cases}$$

Ces formules ne peuvent servir qu'à partir de $n = 2$.

On a donc

$$x'_3 = 2x_1x'_2 - x'_1,$$
$$y'_3 = 2y_1y'_2 - y'_1.$$

D'ailleurs,

$$\xi_3 = 2\xi_1\xi_2 + \xi_1$$

ou

$$x'_2 = (2x_1 + 1)x'_1,$$

et de même

$$y'_2 = 2x'_1 y_1 + y'_1.$$

Cela étant, on déduit des formules (8)

$$x'_{n+1} y'_n - x'_n y'_{n+1} = x'_n y'_{n-1} - y'_n x'_{n-1},$$

et par suite, de proche en proche, on arrive à

$$x'_{n+1} y'_n - x'_n y'_{n+1} = x'_2 y'_1 - x'_1 y'_2,$$
$$x'_{n+1} y'_n - x'_n y'_{n+1} = 2x'_1 (x_1 y'_1 - x'_1 y_1),$$

ou enfin

$$x'_{n+1} y'_n - x'_n y'_{n+1} = y_1.$$

7. Je dis maintenant que nous avons obtenu toutes les solutions entières de l'équation $(1)'$. En effet, soit x', y' une solution différente de celles que nous avons trouvées. On voit immédiatement que x' est compris entre deux valeurs telles que x'_n et x'_{n+1}, et y' entre y'_n et y'_{n+1}.

Si l'on pose

$$x = x' x'_{n+1} - a y' y'_{n+1},$$
$$y = y' x'_{n+1} - x' y'_{n+1},$$

x, y sera une solution de l'équation (1).

Or,

$$y = (x'_{n+1} - y'_{n+1}\sqrt{a})y' - (x' - y'\sqrt{a})y'_{n+1}$$

ou

$$y = \frac{y'_{n+1}}{x' + y'\sqrt{a}} - \frac{y'}{x'_{n+1} + y'_{n+1}\sqrt{a}} > 0.$$

D'autre part, nous avons trouvé

$$x'_{n+1} y'_n - x'_n y'_{n+1} = y_1,$$

ce qui peut s'écrire

$$y_1 = (x'_{n+1} - y'_{n+1}\sqrt{a})y'_n - (x'_n - y'_n\sqrt{a})y'_{n+1},$$

ou encore

$$y_1 = \frac{y'_{n+1}}{x'_n + y'_n\sqrt{a}} - \frac{y'_n}{x'_{n+1} + y'_{n+1}\sqrt{a}},$$

ce qui donne, par comparaison,

$$0 < y < y_1,$$

ce qui est impossible.

8. Reprenons les relations (7), (7)' et supposons maintenant que p soit pair. Alors, ξ_{p-2}, ξ_p, ξ_{p+2} sont trois solutions de l'équation (1) et, si on les désigne par x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, on aura entre ces quantités les relations (4).

Donc, en réunissant les résultats obtenus, on voit que, si l'équation (1)' a des solutions, les formules (4)' donnent alternativement toutes les solutions de l'équation (1)' et de l'équation (1), pourvu que ξ_1, η_1 désigne la plus petite solution positive entière de (1)'.

9. Remarquons enfin que les points entiers de l'hyperbole représentée par l'équation (1)' ont des propriétés analogues à ceux de sa conjuguée ; mais les sommets de (1)' ne sont pas des points entiers.