HADAMARD

Sur les transformations ponctuelles

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 71-84

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__71_0>

SUR LES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES;

Par M. Hadamard.

1. Soient données les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = f_n(x_2, x_3, \ldots, x_n), \end{cases}$$

qui peuvent être considérées comme faisant correspondre à un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un espace e_n à n dimensions, un point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'un espace analogue E_n, point que nous nommerons ici l'*image* du premier.

Ces équations sont-elles résolubles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$? A tout point de E_n, peut-on faire correspondre d'une manière univoque un point de e_n auquel il serve d'image?

Il est clair que la question est double. Les valeurs de X_1, $X_2, \ldots, X_n$ étant données, elle consiste à se demander :

I. Si les équations (1) admettent toujours (en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) une solution ; (*possibilité*)

II. S'il est impossible que ces équations admettent plus d'une solution. (*unicité*)

Les méthodes du Calcul différentiel conduisent à en chercher la solution dans les propriétés infinitésimales des fonctions f qui définissent la transformation. Une condition nécessaire bien connue est (en supposant que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ admettent des dérivées premières continues) que *le déterminant fonctionnel*

$$(2)\qquad \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

soit de signe constant.

Cette condition prise au sens étroit est d'ailleurs suffisante *localement,* c'est-à-dire que, a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant un point de e_n où le déterminant (2) n'est pas nul et $A(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ son image, on peut, autour de ce dernier point, décrire une sphère assez petite pour qu'un point quelconque pris à son intérieur soit l'image d'un point et d'un seul voisin de a.

2. On a quelquefois admis que la condition précédente était suffisante d'une manière générale, c'est-à-dire que, si elle était vérifiée quels que soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, elle entraînait, quels que soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, une réponse affirmative aux questions I et II.

Il est pourtant clair, dès le cas d'une variable $(n = 1)$, que l'on n'est pas ainsi assuré de remplir la condition I. Si la fonction $X = f(x)$ admet une dérivée première f' toujours positive, l'équation

$$X = f(x)$$

considérée comme équation en x, n'admet jamais plus d'une solution, mais on peut choisir X de manière qu'elle n'en admette aucune, à moins que les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{a} f'(x)\,dx, \qquad \int_{a}^{\infty} f'(x)\,dx \tag{3}$$

ne soient infinies.

Pour n supérieur à 1, il est visible qu'il ne suffit pas de remplacer la dérivée f' par le déterminant fonctionnel (2). Par exemple, pour la transformation

$$X = f(x), \qquad Y = \psi(x)\varphi(y),$$

le déterminant fonctionnel est $f'(x)\,\psi(x)\,\varphi'(y)$; on peut, en le supposant supérieur à un nombre positif fixe et même indéfiniment croissant (et cela d'une manière aussi rapide qu'on le veut) avec x ou y, admettre néanmoins que les intégrales (3) sont finies et que, par conséquent, X n'est pas susceptible de prendre toutes les valeurs réelles. Une aire, indéfiniment étendue dans tous les sens, du plan des xy, a alors pour image une aire qui s'allonge indéfiniment dans le sens parallèle à l'axe des Y, mais qui reste comprise entre deux ordonnées fixes.

3. La quantité qu'il convient d'introduire ici, à la place du déterminant fonctionnel, est évidemment l'*axe mineur* μ *de l'ellipse* ou de l'*ellipsoïde de déformation,* c'est-à-dire la plus petite valeur du rapport

$$\sqrt{\frac{dX_1^2 + dX_2^2 + \ldots + dX_n^2}{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}},$$

et la condition qu'il y a lieu de se donner à cet égard est :

[Condition (C)], que, μ_ρ désignant le *minimum de* μ *sur la sphère*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2 \tag{4}$$

de l'espace e_n, *l'intégrale*

$$\int_0^\infty \mu_\rho \, d\rho \tag{5}$$

soit infinie.

Si cette condition est remplie, une ligne de longueur infinie tracée dans e_n ne pourra pas avoir pour image une ligne de longueur finie.

4. Mais la question est loin d'être ainsi résolue. Car, contrairement à ce qui arrive dans le cas d'une variable, on sait que le non-évanouissement du déterminant fonctionnel, dans une région finie quelconque de e_n, *n'assure même plus l'unicité.* Les fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = f_1(x_1, x_2), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2), \end{array}\right. \tag{1'}$$

étant définies dans une région déterminée (σ) du plan des x_1, x_2 et ayant, dans toute cette région, leur déterminant fonctionnel positif et non nul, une aire s intérieure à σ, limitée par une courbe fermée unique (sans point double) γ peut avoir pour image une aire se recouvrant partiellement elle-même, γ ayant pour image une courbe Γ à points doubles, analogue à celle qui est représentée figure 1 [1]. Un même point de cette aire peut alors être l'image commune de plusieurs points de s.

En un mot, les données précédentes ne fournissent aucun renseignement sur la résolubilité des équations (1'), sauf à l'intérieur

[1] *Voir*, par exemple, Goursat, *Cours d'analyse,* t. I, p. 299. — Plusieurs auteurs (Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis,* t. II; Kneser, *Math. Ann.*, t. XLV; Arzelà, *Rendic. Ac. Bologne,* 24 mai 1903) se sont efforcés de remédier à cette défectuosité, moyennant l'introduction d'autres hypothèses.

de cercles suffisamment petits — dont les méthodes classiques ne font même pas connaître explicitement le rayon [1].

5. Le fait que je me propose d'établir, et qui peut être de quelque utilité dans la discussion d'équations telles que (1), est que les propriétés infinitésimales des fonctions f suffisent au contraire à étudier leur inversion, *si elles sont connues dans tout l'espace* e_n. L'énoncé est le suivant :

Si μ *est différent de zéro* [2] *en tout point de* e_n *et si, en outre, la condition* (C) (n° 3) *est remplie, les propriétés I et II ont lieu : autrement dit, l'inversion des équations* (1) *est possible et univoque.*

Ainsi, une transformation *définie à l'intérieur d'une aire* peut présenter à l'intérieur de cette aire la singularité décrite au n° 4. Mais, dans ce cas, la transformation ne saurait être, de quelque manière que ce soit, prolongée indéfiniment en dehors de σ, si l'on impose [3] (outre $\mu \neq 0$) la condition (C).

J'ai indiqué, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 8 janvier 1906), une méthode pour démontrer la propriété précédente, méthode dont je donnerai le principe

---

[1] Ce rayon est calculé pour $n = 1$ par M. Goursat, *loc. cit.*, p. 41.

[2] La quantité μ est nulle ou différente de zéro en même temps que le déterminant fonctionnel.

[3] Il est à peu près évident que cette dernière restriction (ou une autre analogue) est nécessaire, et que la condition $\mu \neq 0$, même vérifiée dans tout le plan, ne suffit pas à assurer l'unicité.

Soit, par exemple,

$$X_1 = R\cos\Theta, \qquad X_2 = R\sin\Theta,$$

avec

$$R = e^{x_1}, \qquad \Theta = k\pi\frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} = k\pi \tanh x_2,$$

où k est un nombre plus grand que 1. L'image du cercle $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$ aura la forme représentée figure 1 dès que $\tanh\rho$ dépassera la valeur $\frac{1}{k}$.

Il en sera encore de même si, avec la même valeur de R, on fait

$$\Theta = e^{x_2\varphi(x_1)} - e^{-x_2\varphi(x_1)} = \mathrm{Sh}[x_2\varphi(x_1)]$$

[la fonction $\varphi(x_1)$ étant toujours plus grande que 1 et croissant, pour x_1 très grand et négatif, plus vite que e^{-2x_1}, par exemple $\varphi = \mathrm{Ch}(3x_1)$]; et dans ce cas le déterminant fonctionnel sera indéfiniment croissant. Il serait constamment égal à 1 si l'on faisait $\Theta = x_2 e^{-2x_1}$ (toujours avec $R = e^{x_1}$).

un peu plus loin. J'ai reconnu depuis que la démonstration pouvait se faire d'une manière tout élémentaire : qu'il suffisait de reprendre, avec d'insignifiantes modifications, un raisonnement classique de théorie des fonctions (le raisonnement non modifié est celui qui servirait à démontrer le théorème dans le cas de multiplicités fermées telles que la sphère).

6. Supposons toujours que les n quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, fonctions dont le déterminant fonctionnel n'est jamais nul. Tout point a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de l'espace e_n est le centre d'une sphère

$$(6) \qquad (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_3)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leqq d^2,$$

telle que deux points distincts pris à l'intérieur de cette sphère ne puissent avoir la même image dans l'espace E_n; et l'image $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de a est le centre d'une sphère

$$(7) \qquad (X_1 - A_1)^2 + \ldots + (X_n - A_n)^2 \leqq D^2,$$

telle que tout point X intérieur à cette sphère soit l'image d'un point et d'un seul intérieur à (6), point qui varie continûment avec X.

Si, en quelque point de l'espace, d était infini, le théorème serait démontré. Nous supposons donc qu'il n'en est pas ainsi.

D'après des raisonnements connus, d et, par suite, D sont des fonctions continues de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Lorsque le point a prend toutes les positions possibles à l'intérieur de la sphère de rayon ρ qui a pour centre l'origine des coordonnées, d et D ont chacun un certain minimum (différent de zéro), fonction de ρ.

De même, d et D ont un minimum différent de zéro sur une ligne finie quelconque l décrite par a dans l'espace e_n.

7. Supposons que l soit une ligne continue allant d'un point a à un point b de e_n, et que, d'autre part, son image L dans E_n soit fermée, c'est-à-dire qu'un même point A serve d'image à a et à b. Alors on pourra affirmer que cette ligne est également fermée dans e_n, c'est-à-dire que le point a coïncide avec b, si l'on sait que la valeur de D correspondant à un point c de l et à son image C est supérieure à la plus grande distance de C à un point de L.

8. Cela posé, admettons qu'à deux points distincts a et b de e_n

corresponde la même image A. Joignons ab par une ligne l (continue et sans point double), celle-ci aura pour image une ligne L, partant du point A et y revenant. On peut supposer (ce qui n'est d'ailleurs pas indispensable) que L n'a aucun point double, autrement dit, qu'elle ne contient aucun point A′ qui serve d'image commune à deux points a', b' de l, sans quoi il suffirait de substituer A′ à A en ayant soin, s'il y a plusieurs points A′, d'en choisir un pour lequel l'arc compris, sur l, entre a' et b' soit le plus petit possible [1]; ou encore, on pourrait évidemment faire disparaître le point double A′ en modifiant l.

Soit D_0 le minimum de D sur l.

Prenons un point fixe arbitraire O (par exemple l'origine des coordonnées) dans E_n et désignons par L_t (où t est un nombre compris entre zéro et un) l'homothétique de L relativement à O avec le rapport d'homothétie t; et, de même, par C_t l'homothétique, dans les mêmes conditions, d'un point quelconque C de L (image d'un point c de l). Soit encore λ le maximum de la distance OC. Deux points quelconques de L seront alors à une distance inférieure à 2λ et, par conséquent, d'après le nº 7, on devra avoir, la ligne l étant ouverte,

$$2\lambda \geqq D_0. \tag{8}$$

Donnons à t une valeur quelconque comprise entre l'unité et le nombre t_1 (positif, d'après l'inégalité précédente) qui vérifie la relation

$$\lambda(1 - t_1) = \frac{D_0}{3}.$$

Tout point C_t de L_t sera à une distance de son homothétique C moindre que $\frac{D_0}{3}$ et, par conséquent, sera l'image d'un point parfaitement déterminé de e_n, intérieur à la sphère σ analogue à (6) qui a pour centre c.

Seront également à une distance du point C moindre que D_0, les points de L_t homothétiques des points situés sur un certain arc de L, à savoir l'arc continu qui comprend le point C et dont tous les points sont à une distance de C moindre que $\frac{2D_0}{3}$. Tout l'arc

[1] Ceci aurait un sens, même si les points A′ étaient en nombre infini, l'ensemble qu'ils forment étant manifestement fermé.

ainsi obtenu de L_t correspondra donc à un certain arc de courbe de e_n intérieur à σ.

Chaque point C_t de L_t peut ainsi être déduit, non seulement du point homothétique C_1, mais d'une infinité d'autres points de L (points suffisamment voisins du premier) et l'on a, par conséquent, une infinité de moyens de trouver le point correspondant de e_n; mais, en vertu du n° 7 et des hypothèses faites sur t, toutes ces déterminations conduiront au même résultat.

En un mot, à chaque ligne L_t, pour $1 \geqq t \geqq t_1$, correspondra une ligne continue l_t de e_n, laquelle variera d'une manière continue avec t. Comme l_t ne sort pas d'une région finie de l'espace e_n, D, sur ces différentes lignes l_t, ne sera jamais inférieur à un certain minimum D'.

Il en résulte que la ligne l_t ne se ferme à aucun moment, car ses deux extrémités, autrement dit les deux points qui ont pour image A_t, varient continûment et, par conséquent, ne sauraient coïncider sans que leur distance soit au préalable devenue inférieure à D', ce qui est impossible.

9. Soit D_1 le minimum de D sur L_{t_1} : on aura, puisque L_{t_1} ne se ferme pas, l'inégalité analogue à (8)

$$2\lambda t_1 \geqq D_1.$$

Déterminons un nombre t_2 par la relation

$$\lambda(t_1 - t_2) = \frac{D_1}{3};$$

t_2 sera positif et nous trouverons par des raisonnements tout semblables aux précédents, pour toute ligne L_t telle que $t_1 \geqq t \geqq t_2$, une ligne correspondante l_t continue et ouverte de l'espace e_n, ligne qui variera continûment avec t. Il résultera de là, en particulier, l'inégalité

$$2\lambda t_2 \geqq D_2,$$

D_2 étant le minimum de D sur l_{t_2}.

On déterminera alors t_3 par la relation

$$\lambda(t_2 - t_3) = \frac{D_2}{3},$$

et ainsi de suite. D'une manière générale, t_p sera déterminé par la relation

$$(9) \qquad \lambda(t_{p-1} - t_p) = \frac{D_{p-1}}{3}$$

(D_{p-1} étant le minimum de D sur $l_{t_{p-1}}$) et sera positif en vertu de l'inégalité

$$2\lambda t_{p-1} \geqq D_{p-1}.$$

Pour toute valeur de t comprise entre 1 et t_p, la ligne l_t, ayant pour image L_t, sera définie : ce sera une ligne continue, variant continûment avec t et qui restera toujours ouverte.

10. Cela posé, il va être aisé de faire apparaître une contradiction. On ne pourrait, en effet, imaginer que deux hypothèses :

1° Toutes les lignes l_{t_p} resteront, quel que soit p, à distance finie, c'est-à-dire intérieures à une sphère fixe ayant pour centre l'origine des coordonnées dans l'espace e_n.

Il y a contradiction, car, dans ces conditions, D_p resterait supérieur à un nombre fixe et les quantités t_p définies par les relations successives (9) ne pourraient pas être toutes positives.

2° La quantité $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \ldots x_n^2}$ prend, sur la ligne l_{t_p}, des valeurs très grandes pour des valeurs très grandes de p.

Mais cela aussi est impossible. En effet, un point quelconque de L_{t_p} est relié à son homothétique pris sur L par une ligne continue (une portion de rayon vecteur) de longueur inférieure à λ. Donc le point correspondant de l'espace e_n est intérieur à la sphère qui a pour centre l'origine et dont le rayon R est donné par la relation

$$\int_{\rho_0}^{R} \mu_\rho \, d\rho = \lambda,$$

μ_ρ étant, comme nous l'avons dit, le minimum de μ sur la sphère (4).

Donc il est inadmissible que les points a et b, qui ont une même image A, soient distincts. C'est ce que nous voulions établir.

11. Le mode de démonstration que j'avais adopté dans la Note citée, et qui était relatif au seul cas de $n = 2$, était plus compliqué, mais il avait l'avantage de montrer comment se comporte le prolongement d'une transformation telle que (1'), à partir du moment où elle a cessé d'être biunivoque; comment ce prolongement, possible tout d'abord, doit fatalement

se heurter à une impossibilité à mesure qu'on voudra l'étendre indéfiniment.

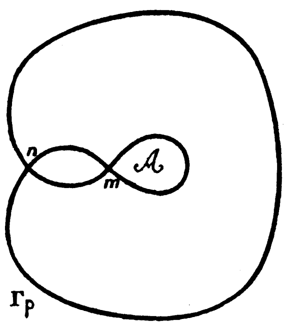
Soit $n = 2$, de sorte que e_n et E_n sont des plans. Supposons toujours que le déterminant fonctionnel des seconds membres des équations

$$(1') \qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2) \\ X_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

soit positif et non nul, et considérons la courbe Γ_ρ, image du cercle γ_ρ $(x_1^2 + x_2^2 = \rho^2)$, cercle dont le rayon sera, pour la commodité du langage, considéré comme représentant le temps. C'est une courbe fermée dont la tangente varie continûment et à la courbure de laquelle on peut assigner une limite supérieure dès qu'on connaîtra une limite supérieure de ρ. X_1 et X_2 étant donnés, le nombre des solutions des équations (1′) à l'intérieur de γ_ρ est égal à l'indice (au sens de Gauss) du point (X_1, X_2) par rapport à Γ_ρ. L'indice d'un même point va toujours en croissant lorsque ρ croît.

Si, à partir d'une certaine valeur ρ_0 de ρ, cet indice peut devenir supérieur à 1, la ligne Γ_ρ devra présenter des points doubles. C'est la forme représentée figure 1 et (au moins pour ρ peu supérieur à ρ_0) Γ_ρ délimitera au moins une aire intérieure telle que $\mathcal{A}$ (*fig.* 1).

Fig. 1.



Appelons *boucle* le contour fermé partiel formé par la partie de Γ_ρ qui part d'un point double (*sommet* de la boucle) et y revient. Tout point double partage Γ_ρ en deux boucles. Une boucle sera dite *simple* si, considérée en elle-même, elle n'admet aucun point double. L'aire $\mathcal{A}$ est limitée par une boucle simple de sommet m (*fig.* 1).

Les tangentes en un point double déterminent quatre angles (qui peuvent être égaux à 0 ou à π) et les arcs de courbes correspondants, au voisinage de ce point, déterminent quatre angles curvilignes. Nous appellerons *extérieur* celui de ces quatre angles où l'indice (relatif au contour complet) est le plus petit; *intérieur*, celui où il est le plus grand (ces deux indices extrêmes différant de deux unités); *latéraux*, ceux où il a la valeur intermédiaire, l'un de ces latéraux étant à *droite* et l'autre à *gauche*, par rapport à une flèche allant de l'angle extérieur à l'angle intérieur.

Les deux boucles que détermine le point double ont pour angles aux sommets, l'une l'angle extérieur, l'autre l'angle intérieur, à l'exclusion des latéraux (comme on le reconnaît en remarquant que l'indice relatif au contour total est égal à la somme des indices relatifs aux deux boucles). Nous les appellerons l'une *extérieure,* l'autre *intérieure,* suivant la nature de leurs angles aux sommets.

La boucle qui délimite l'aire $\mathcal{A}_0$ (*fig.* 1) est, dans cette terminologie, une boucle simple extérieure. L'indice y est plus petit que dans les régions voisines.

Nous allons prouver que, sur notre contour mobile, une telle boucle extérieure est indestructible. Tous les contours Γ_ρ, pour $\rho > \rho_0$, admettront de telles boucles extérieures, et ces boucles successives seront intérieures les unes aux autres.

Pour le démontrer, supposons d'abord que les f soient des fonctions analytiques, n'ayant pas à distance finie de points singuliers. Dans ces conditions, Γ_ρ ne pourra présenter qu'un nombre fini de points doubles, et le nombre ou la disposition de ceux-ci ne changeront qu'un nombre fini de fois dans un temps fini (c'est-à-dire dans un intervalle fini de variations de ρ).

D'une manière générale, les points doubles d'un contour fermé régulier qui se déforme ne peuvent apparaître ou disparaître que de deux façons :

1° Par une boucle infiniment petite : tel est le cas d'un limaçon de Pascal, considéré comme podaire d'un cercle par rapport à un point, lorsque ce dernier passe de l'intérieur à l'extérieur du cercle ou inversement.

Cette hypothèse est à rejeter ici, car la boucle infiniment petite aurait sa courbure infinie, ce que nous avons remarqué être impossible.

2° Par un biangle infiniment petit, un biangle étant un contour fermé partiel de Γ_ρ qui présente deux points anguleux (sommets du biangle), points doubles de Γ_ρ : par exemple, le contour de la figure 1 présente un biangle de sommets m, n.

Un biangle peut être extérieur, ou intérieur, ou latéral, suivant la nature de ses angles aux sommets, nature qui est la même pour les deux sommets si le biangle est infiniment petit, et qui ne change pas par une déformation continue.

Il est impossible que les deux sommets d'un biangle *latéral* soient les deux seuls points doubles du contour (puisqu'on aurait ainsi des boucles latérales). Si l'on enlève du contour un biangle extérieur, il reste deux boucles intérieures, et inversement.

Enfin, dans le cas qui nous occupe, où le contour va toujours en s'étendant et les indices toujours en augmentant, un biangle qui naît ne peut pas être extérieur, et un biangle qui disparaît ne peut pas être intérieur. Cela tient à ce que, dans le premier cas, la région qui prend naissance doit avoir un indice plus grand, et, dans le second, la région qui disparaît, un indice plus petit que l'une au moins des régions avoisinantes.

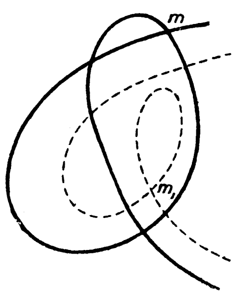
12. Cela posé, reprenons la boucle simple extérieure dont nous avons noté l'existence pour ρ très peu supérieur à ρ_0 :

1° Si le point double m, sommet de la boucle, ne disparaît pas, et si aucun autre point double ne naît sur le contour de la boucle, celle-ci ne cessera pas d'être simple et extérieure. De plus, toutes les boucles successives ainsi obtenues seront intérieures les unes aux autres, puisque le contour se déplace toujours vers le côté où l'indice diminue.

2° Si, à partir d'une certaine valeur $\rho_1 > \rho_0$, la boucle, jusque-là simple, présente deux points doubles ([1]), ceux-ci ne peuvent naître par biangle latéral (puisqu'ils ne pourraient alors être les premiers), ni par biangle extérieur (lequel ne peut que disparaître et non pas naître). Ils forment donc un biangle intérieur et donnent, par conséquent, lieu à deux boucles extérieures. Celle de ces boucles qui ne contient pas le point m (sommet de la boucle primitive) est simple : ce sera elle que l'on considérera pour $\rho > \rho_1$ aux lieu et place de la première.

3° Si, pour une valeur $\rho_2 > \rho_0$, le point double m disparaît, cela ne peut être que par biangle latéral (puisque l'angle *extérieur* en m correspond à une boucle simple). Si ce biangle devient infiniment petit, c'est que l'une des branches qui se croisent en m, après être sortie de la boucle, y pénètre

Fig. 2.



à nouveau immédiatement (*fig.* 2) ([2]). Mais il est clair qu'elle doit en sortir ultérieurement et son point de sortie le plus rapproché (m_1, *fig.* 2) est le sommet d'une nouvelle boucle simple extérieure ([3]).

([1]) Nous supposons, pour plus de commodité, que deux apparitions ou disparitions de points doubles ne peuvent se produire à la fois pour une même valeur de ρ. Il est clair qu'il n'y a là qu'une simplification de langage, dont le raisonnement est indépendant en réalité.

([2]) La ligne pleine représente la forme du contour pour $\rho < \rho_2$ et la ligne ponctuée cette même forme pour $\rho > \rho_2$.

([3]) On peut constater directement que Γ_ρ ne peut avoir de boucle simple intérieure. Car, comme précédemment, une telle boucle ne pourrait commencer à exister que : 1° si elle naît, son sommet apparaissant par un biangle, mais alors ce biangle serait intérieur et la boucle extérieure; 2° si, une fois formée, elle devenait simple par disparition de points doubles sur son contour, mais cette disparition ne se ferait que par biangle extérieur, et supposerait, contrairement à l'hypothèse, une boucle simple intérieure préexistante.

Donc, l'indestructibilité de la boucle simple extérieure est assurée dans tous les cas.

13. Jusqu'à ce point, d'après ce qui précède, notre raisonnement n'est nullement un raisonnement par l'absurde. Il existe des transformations planes, à déterminant fonctionnel constamment positif, et pour lesquelles la déformation du contour Γ_ρ présente les phénomènes que nous venons d'étudier.

Supposons maintenant que ρ augmente indéfiniment. Nous aurons une série de boucles simples, intérieures les unes aux autres. Il existera, dès lors, au moins un point P du plan des X_1, X_2 qui sera intérieur à tous ces contours.

Or, dans ces conditions, les points d'intersection de ceux-ci avec une droite issue de P décriraient sur cette droite un segment (ou une série de segments) de longueur finie, correspondant à une augmentation indéfinie de ρ, contrairement à l'hypothèse.

La contradiction est donc mise en évidence, et la boucle primitive ne peut prendre naissance.

14. Le raisonnement précédent serait mis en défaut pour des transformations non analytiques, parce que les points doubles pourraient être en nombre infini ou se modifier une infinité de fois dans un temps fini.

Mais on peut le rétablir par des conventions convenables.

Soit, comme tout à l'heure, ρ le rayon vecteur, et soit θ l'angle polaire du plan des x_1, x_2. Soient α un angle du premier quadrant pris une fois pour toutes (par exemple $\alpha = 10^\circ$), ε un nombre positif. Si ce dernier est suffisamment petit [la limite supérieure de ce nombre pouvant être assignée lorsqu'on connaît une limite supérieure (ρ) de ρ] :

a. Tout point double de Γ_ρ, correspondant à deux valenrs θ_1, θ_2 de θ, et pour lequel les deux branches se coupent sous un angle compris entre α et $\pi - \alpha$, est isolé, en ce sens qu'il ne peut, ni sur le même contour Γ_ρ, ni sur $\Gamma_{\rho'}$, pour $|\rho - \rho'| > \varepsilon$, exister plus d'un point double correspondant à deux valeurs θ'_1, θ'_2 de θ telles que $|\theta_1 - \theta'_1| < \delta$, $|\theta_2 - \theta'_2| < \delta$, où δ est une quantité que l'on peut assigner en fonction de (ρ).

Le point double en question de $\Gamma_{\rho'}$ correspond à un point double parfaitement déterminé de Γ_ρ.

b. Si, au contraire, l'angle au point double est compris entre o et α, ou entre π et $\pi - \alpha$, il pourra arriver que, dans un certain cas intervalle de variation de θ autour de l'une des deux valeurs de l'angle polaire correspondant à ce point (*dépendance* du point double), les deux branches restent à une distance moindre que ε.

Le point double en question pourra alors appartenir à une *série* de points doubles, en appelant *série* un ensemble de points doubles qui sont dans la dépendance les uns des autres.

Toute série (même d'une infinité) de points doubles a d'ailleurs deux points doubles extrêmes déterminés. Elle sera, au point de vue du raisonnement, entièrement assimilable à un seul point double ou à deux, suivant que les deux portions de contours qui se croisent changeront ou non de côté l'une par rapport à l'autre au passage de cette série. Dans le second cas, on pourra toujours dire si cette série est assimilable à un biangle *extérieur, intérieur* ou *latéral*.

Enfin, on pourra définir les conditions dans lesquelles un point double P' (ou une série de point doubles) de $\Gamma_{\rho'}$ ($0 < \rho' - \rho < \varepsilon$) sera dit *dériver* d'un point double P de Γ_ρ (ou d'une série de points doubles).

Moyennant ces conventions, rien n'empêchera de raisonner comme nous l'avons fait pour les transformations analytiques.

15. Notre conclusion est, comme on le voit, liée de la manière la plus absolue à ce fait que la transformation est considérée dans le plan *complet* [1]. Elle ne subsisterait plus nécessairement dans une région limitée par une ligne quelconque Λ, à moins que l'on ne possède d'autres données; que l'on ne connaisse, par exemple, la propriété d'unicité pour les points qui correspondent à des points de Λ.

La conclusion est évidente sur la sphère (notre démonstration se confondant alors, comme nous l'avons dit, avec une démonstration classique).

Par contre, elle ne subsiste pas sur les variétés multiplement connexes, telles qu'un tore, ou un cylindre de révolution indéfini. Sur ce dernier, par exemple, si z et θ sont (avec le rayon a du cylindre) les coordonnées semi-polaires, la transformation

$$\left| \begin{array}{ll} z; & \dfrac{z}{p}, \\ \theta; & p\theta \end{array} \right.$$

(p étant un entier quelconque) n'est pas biunivoque, quoique μ soit constant.

---

[1] Ajoutons que l'unicité peut cesser dès que $\int_0^\infty \mu_\rho \, d\rho$ est fini, si lentement que μ décroisse, à cette condition près. Il suffira, par exemple, de prendre (en employant la même notation que dans la note de la page 74) $\Theta = x_2$, en choisissant pour R une fonction constamment croissante de x_1 coïncidant, pour les valeurs négatives de x_1, avec

$$R(x_1) = a + \int_{-x_1}^\infty \mu_\rho \, d\rho \qquad (a > 0).$$