BULLETIN DE LA S. M. F.

COMBEBIAC

Sur l'application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées par un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 63-70

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__63_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'APPLICATION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE A LA DÉTERMINATION DES ACTIONS EXERCÉES PAR UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE ANIMÉ D'UN MOUVEMENT IRROTATIONNEL;

Par M. Combebiac.

C'est dans l'Ouvrage de Thomson et Tait : *Natural Philosophy* qu'il a été fait, pour la première fois, application des équations de Lagrange à la détermination des actions exercées sur ses parois par un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel et acyclique. Si $q_1, q_2, \ldots, q_r$ désignent les paramètres qui déterminent la position des parois, la force vive T_1 du fluide s'exprime, dans le cas spécifié, par une fonction quadratique des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ des paramètres, et les forces extérieures Q relatives aux paramètres q et faisant équilibre aux forces dues à l'inertie du fluide ont pour expression

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q},$$

exactement comme si les paramètres q étaient ceux du système formé par le fluide.

Dans le cas où le mouvement du fluide n'est pas acyclique, la force vive du fluide peut, comme sa vitesse, être décomposée en deux parties qui se déterminent indépendamment l'une de l'autre et dont l'une T_1 correspond à un mouvement acyclique dépendant uniquement du mouvement des parois, tandis que l'autre T_0 ne dépend que de la position de ces parois et des modules de circulation, c'est-à-dire des valeurs de la circulation le long de certaines lignes fermées convenablement choisies. Les équations de Lagrange ne sont plus applicables et Carl Neumann ([1]) a établi la formule générale donnant, dans ce cas, l'expression des actions exercées par le fluide sur ses parois (y compris celles des corps qui pour-

([1]) C. Neumann, *Berträge zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik*, p. 205-238. Teubner, Leipzig, 1893.

raient être baignés dans le fluide). Lorsque la partie T_1 de l'énergie hydrocinétique qui correspond à la partie acyclique du mouvement s'annule (parois au repos) ou est négligeable par rapport à l'autre (parois limitant des corps filiformes), la formule de Neumann se réduit à

$$Q = \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

où Q désigne la force extérieure relative au paramètre q; T_0 est exprimée en fonction des paramètres q et des modules de circulation, qui d'ailleurs doivent être considérés comme constants si le fluide est parfait (dépourvu de viscosité).

Cette formule diffère par le signe de son second membre de celle qui résulterait de l'application pure et simple des équations de Lagrange, et l'on sait que cette différence de signes se retrouve lorsqu'on compare les forces d'origine hydrodynamique aux forces électromagnétiques dues aux courants électriques.

On se propose de montrer que les équations de Lagrange sont encore applicables dans le cas étudié moyennant un changement de variables dans l'expression de l'énergie hydrocinétique, de sorte que la masse fluide s'assimile alors à un système cyclique dont les coordonnées contrôlables seraient les paramètres q déterminant la position des parois.

I.

Considérons un fluide parfait incompressible animé d'un mouvement irrotationnel et occupant un volume V à connexion multiple, soit, pour fixer les idées, l'espace extérieur à des surfaces annulaires ne s'entrelaçant pas. La partie du mouvement correspondant à l'immobilité des parois donne lieu à une vitesse v_0, dont les composantes u, v, w, suivant les axes de coordonnées, sont des fonctions linéaires homogènes des modules de circulation μ, et la force vive T_0 correspondant à cette vitesse est une fonction quadratique de ces modules, les coefficients étant des fonctions des paramètres q. Cette force vive peut aussi s'écrire

$$T_0 = \frac{1}{2}\rho \int_V (u^2 + v^2 + w^2)\,\delta\tau,$$

où $\delta\tau$ désigne un élément quelconque du volume V et ρ la densité du fluide.

Le vecteur v_0 admet une fonction potentielle multiforme, de sorte que l'on peut appliquer la formule de Green à l'expression précédente en rendant, au préalable, le volume V simplement connexe au moyen de coupures constituées par des surfaces convenablement disposées. On obtient ainsi, en désignant par λ le flux afférent à la coupure qui correspond au module de circulation μ :

$$(1) \qquad 2T_0 = \rho \sum \mu\lambda.$$

Lorsque les modules varient et que les parois se déplacent, l'accroissement de T_0 a pour expression

$$dT_0 = \rho \int_V (u\,du + v\,dv + w\,dw)\,\delta\tau + \frac{1}{2}\rho \int_S (u^2 + v^2 + w^2)\,\delta\sigma\,dn,$$

en désignant par $\delta\sigma$ un élément de la surface des parois, par S la surface totale de ces parois, par dn la composante normale du déplacement de l'élément superficiel $\delta\sigma$, enfin par du, dv, dw les expressions différentielles

$$du = \sum \frac{\partial u}{\partial \mu}\,d\mu + \sum \frac{\partial u}{\partial q}\,dq,$$
$$dv = \sum \frac{\partial v}{\partial \mu}\,d\mu + \sum \frac{\partial v}{\partial q}\,dq,$$
$$dw = \sum \frac{\partial w}{\partial \mu}\,d\mu + \sum \frac{\partial w}{\partial q}\,dq.$$

On peut appliquer la formule de Green à la première intégrale moyennant les précautions déjà spécifiées, et l'on obtient

$$\int_V (u\,du + v\,dv + w\,dw)\,\delta\tau = \sum \lambda\,d\mu.$$

D'autre part, dn s'exprime linéairement en fonction des accroissements des paramètres q, c'est-à-dire que l'on a

$$dn = \sum a_n\,dq.$$

Il vient donc

$$dT_0 = \rho \sum \lambda\,d\mu + \sum \frac{1}{2}\rho \int_S (u^2 + v^2 + w^2)\,a_n\,\delta\sigma\,dq.$$

Cette expression de dT_0 montre que $\rho\lambda$ est la dérivée de T_0 par rapport à μ. Chaque flux λ est évidemment, de même que chaque composante de la vitesse, une fonction linéaire homogène des modules μ; réciproquement, les modules μ sont des fonctions linéaires homogènes des flux λ et, par suite, T_0 peut s'exprimer par une fonction quadratique homogène des flux λ. On désignera par T_μ l'expression de T_0 en fonction des modules de circulation et par T_λ l'expression de T_0 en fonction des flux. En dérivant la formule (1) par rapport à λ et tenant compte de la propriété de $\rho\lambda$, on a

$$2\frac{\partial T_\lambda}{\partial\lambda} = \rho\mu + \rho\sum\lambda_i\frac{\partial\mu_i}{\partial\lambda} = \rho\mu + \sum\frac{\partial T_\mu}{\partial\mu_i}\frac{\partial\mu_i}{\partial\lambda} = \rho\mu + \frac{\partial T_\lambda}{\partial\lambda},$$

et, par conséquent, on peut écrire la double formule

$$(2)\qquad \rho\lambda = \frac{\partial T_\mu}{\partial\mu}, \qquad \rho\mu = \frac{\partial T_\lambda}{\partial\lambda}.$$

On a également

$$dT_0 = \sum\frac{\partial T_\mu}{\partial\mu}d\mu + \sum\frac{\partial T_\mu}{\partial q}dq = \sum\frac{\partial T_\lambda}{\partial\lambda}d\lambda + \sum\frac{\partial T_\lambda}{\partial q}dq$$

et, par suite, eu égard aux relations (2) :

$$2\,dT_0 = \sum\lambda\,d\mu + \sum\mu\,d\lambda + \sum\left(\frac{\partial T_\mu}{\partial q} + \frac{\partial T_\lambda}{\partial q}\right)dq\,;$$

d'où, par comparaison avec la formule (1) différentiée,

$$(3)\qquad \frac{\partial T_\mu}{\partial q} + \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} = 0.$$

Les formules (1), (2) et (3) sont symétriques par rapport aux quantités μ et λ; mais cette symétrie ne se maintient pas dans le domaine dynamique. La formule de Carl Neumann déjà mentionnée devient, en effet, en vertu de (3),

$$(4)\qquad Q = \frac{\partial T_\mu}{\partial q} = -\frac{\partial T_\lambda}{\partial q}.$$

La seconde des expressions de Q est conforme à celle qui résulterait de l'application des équations de Lagrange à la masse fluide ; celle-ci est donc assimilable, dans le cas qui nous occupe, à un système cyclique dont les coordonnées contrôlables seraient les paramètres q et dont les vitesses cycliques seraient les flux λ. Il est superflu d'observer que la légitimité de cette assimilation ne pouvait pas être admise *a priori*.

II.

On peut pousser plus loin l'assimilation en montrant que l'application des équations de Lagrange fournit encore des résultats concordants avec une détermination directe de l'expression des forces F relatives aux coordonnées cycliques, c'est-à-dire aux variables φ définies par la relation

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dt};$$

φ est le volume du fluide qui a traversé la coupure correspondant au flux λ à partir d'un instant pris pour origine du temps.

Si F est la force extérieure relative à la coordonnée φ, l'expression $F\,\delta\varphi$ doit représenter le travail changé de signe des forces d'inertie du fluide dans un déplacement virtuel pour lequel les accroissements de toutes les variables autres que φ sont nuls. On reconnaît que l'on a, dans ces conditions,

$$\text{(5)} \qquad F = \rho \frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda}.$$

(Démonstration en quaternions :
Si l'on pose

$$v_0 = \sum A\lambda,$$

le déplacement d'une particule fluide dans le déplacement $\delta\varphi$ a pour expression $A\,\delta\varphi$ et, par suite, le travail virtuel des forces fictives élémentaires $\rho\dfrac{dv_0}{dt}\delta\tau$ a lui-même pour expression

$$F\,\delta\varphi = \rho\int_V - S\left(A\frac{dv}{dt}\right)\delta\tau\,\delta\varphi;$$

d'où

$$F = \rho \int_V - S\left(A \frac{dv_0}{dt}\right) \delta\tau$$
$$= \rho \frac{d}{dt} \int_V - S(v_0 A)\, \delta\tau - \rho \int_V - S\left(v_0 \frac{dA}{dt}\right) \delta\tau.$$

Comme nous supposons négligeables les forces d'inertie dues aux dérivées premières et secondes des paramètres q, le vecteur $\frac{dA}{dt}$ provient uniquement du déplacement subi par la particule fluide en raison de la vitesse v_0 et, dans ces conditions, en tenant compte, en outre, du fait que les vecteurs A et v_0 ont des distributions à la fois solénoïdales et irrotationnelles, on reconnaît que l'on a

$$2 \frac{dA}{dt} = \nabla(S A v_0) + V[\nabla(V A v_0)],$$

et, en appliquant certaines formules de différentiation géométrique :

$$2 S v_0 \frac{dA}{dt} = S[\nabla(v_0 S A v_0)] - S[\nabla(V . v_0 V A v_0)]$$
$$= S[\nabla(v_0 S A v_0)] - S[\nabla(v_0 S A v_0 - A v_0^2)]$$
$$= S[\nabla(A v_0^2)];$$

enfin, en appliquant la formule de Gauss, on a

$$2 \int_V S v_0 \frac{dA}{dt} \delta\tau = \int_S v_0^2 A_n \delta\sigma,$$

en désignant par A_n la composante normale du vecteur A en un point de la surface des parois, composante qui est nulle en raison des conditions qui définissent A. La deuxième intégrale de l'expression de F est donc nulle et cette expression, réduite à son premier terme, devient

$$F = \rho \frac{d}{dt} \int_V - S v_0 A\, \delta\tau = \rho \frac{d}{dt} \int_V - S v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \lambda} \delta\tau$$
$$= \rho \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_V - \frac{1}{2} S v_0^2\, \delta\tau = \rho \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_V \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\, \delta\tau$$
$$= \rho \frac{d\mu}{dt}, \qquad \text{Q. E. D.)}$$

Les expressions (4) et (5) des forces qui peuvent agir sur le fluide satisfont d'ailleurs au théorème des forces vives, car on a

$$dT_0 = \sum \frac{\partial T_\mu}{\partial \mu} d\mu + \sum \frac{\partial T_\mu}{\partial q} dq = \sum \rho\lambda\, d\mu + \sum - \frac{dT_\lambda}{\partial q} dq$$

ou enfin

$$(6) \qquad dT_0 = \sum \rho \frac{d\mu}{dt} d\varphi + \sum - \frac{\partial T_\lambda}{\partial q} dq = \sum F\, d\varphi + \sum Q\, dq.$$

Les résultats exposés ci-dessus peuvent être résumés de la manière suivante :

Une masse fluide limitée par des parois au repos et susceptible d'être animée de mouvements cycliques mais irrotationnels est assimilable, en ce qui concerne les réactions de toutes sortes dues à son inertie, à un système cyclique qui admettrait pour coordonnées contrôlables *les paramètres de la position des parois et pour* vitesses cycliques *les flux afférents aux mouvements possibles du fluide.*

III

Maxwell a montré que les forces électromagnétiques et les forces électromotrices d'induction peuvent être déterminées par l'application des équations de Lagrange en assimilant un système de courants électriques à un système mécanique cyclique dont les coordonnées contrôlables seraient les paramètres déterminant la position des corps conducteurs et dont les vitesses cycliques seraient les intensités des courants et en prenant pour l'énergie cinétique du système le potentiel électrodynamique changé de signe, expression appelée pour ces motifs *énergie électrocinétique* du système de courants.

En désignant par T_i l'expression de l'énergie électrocinétique en fonction des intensités des courants, par Q' la force extérieure relative à l'un quelconque q des paramètres qui déterminent la position des conducteurs, par E la force électromotrice qui ferait équilibre à la force électromotrice d'induction relative au courant i, on a

$$(4') \qquad Q' = -\frac{\partial T_i}{\partial q},$$

$$(5') \qquad E = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_i}{di}.$$

On connaît, d'autre part, les frappantes analogies qui existent entre les éléments du champ déterminé par des courants électriques et ceux du mouvement d'un fluide parfait incompressible qui occuperait l'espace extérieur aux corps conducteurs (supposés filiformes) et qui serait animé d'un mouvement irrotationnel admettant pour modules de circulation les intensités des courants : identité, à un facteur numérique près, du champ magnétique dû aux courants et du champ des vitesses du fluide; identité, à un facteur numérique près, des expressions de l'énergie électrocinétique et de l'énergie hydrocinétique; égalité, *au signe près,* des forces électromagnétiques et des forces exercées par le fluide sur les corps qui y sont baignés.

L'étude qui vient d'être faite du cas hydrodynamique met nettement en lumière la raison de cette différence de signes; elle tient à ce que, dans l'assimilation du système hydrodynamique à un système cyclique, ce sont les flux qui jouent le rôle des vitesses cycliques, tandis que, d'après les analogies hydro-électriques, ils doivent correspondre aux flux magnétiques, éléments qui, dans la théorie dynamique de Maxwell, jouent le rôle de quantités de mouvement.

La divergence s'accentue encore si l'on compare les expressions des forces F et E données respectivement par les formules (5) et (5'). Dans le système hydrodynamique, les forces F sont nulles lorsque les modules de circulation restent constants et, dans le système électrodynamique, les forces correspondantes E sont nulles lorsque les flux magnétiques $\frac{\partial T_i}{\partial i}$ demeurent constants.