BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

Sur une formule générale d'interpolation

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 52-60

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__52_1>

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE D'INTERPOLATION;

Par M. Potron.

1. M. Borel a démontré [1] le théorème suivant :

Soit $\varphi_{p,q}(x)$ (*p et q étant deux nombres entiers et* $p \leqq q$) *une fonction égale à* o *pour* $0 \leqq x \leqq \frac{p-1}{q}$ *et pour* $\frac{p+1}{q} \leqq x \leqq 1$, *à* $qx - p + 1$ *pour* $\frac{p-1}{q} \leqq x \leqq \frac{p}{q}$, *à* $-qx + p + 1$ *pour* $\frac{p}{q} \leqq x \leqq \frac{p+1}{q}$; *soit* $P_{p,q}(x)$ *un polynome tel que l'on ait, entre* o *et* 1, $|\varphi_{p,q}(x) - P_{p,q}(x)| < \frac{1}{q^2}$; *si* $f(x)$ *désigne une fonction définie et continue entre* o *et* 1; *si* ε_q *est un nombre tel que l'inégalité* $|x_1 - x_2| < \frac{1}{q}$ *entraîne partout, entre* o *et* 1, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_q$; *on a toujours, entre* o *et* 1,

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{p=q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x) \right| < \varepsilon_q + M\frac{q+1}{q^2},$$

M *étant la limite supérieure de* $f(x)$ *entre* o *et* 1. Je me propose de donner une expression générale des polynomes $P_{p,q}(x)$.

2. L'équation de la ligne brisée $y = \varphi_{p,q}(x)$ peut, d'après une

---

[1] *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Chap. IV, p. 82.

formule de M. S. Bernstein [1], s'écrire

$$y = \sum_{h=0}^{h=q} A_h \left| x - \frac{h}{q} \right|,$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\left[\varphi_{p,q}(1) + q\,\varphi_{p,q}\left(\frac{1}{q}\right) - (q-1)\,\varphi_{p,q}(0)\right],$$

$$A_h = \frac{q}{2}\left[\varphi_{p,q}\left(\frac{h+1}{q}\right) + \varphi_{p,q}\left(\frac{h-1}{q}\right) - 2\varphi_{p,q}\left(\frac{h}{q}\right)\right], \qquad h = 1, 2, \ldots, q-1,$$

$$A_q = \frac{1}{2}\left[\varphi_{p,q}(0) + q\,\varphi_{p,q}\left(\frac{q-1}{q}\right) - (q-1)\,\varphi_{p,q}(1)\right].$$

En appliquant ces formules et remarquant que

$$\varphi_{p,q}\left(\frac{h}{q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad h \neq p, \\ 1, & \text{si} \quad h = p, \end{cases}$$

on trouve

$$\varphi_{0,q}(x) = -\frac{q-1}{2}|x| + \frac{q}{2}\left|x - \frac{1}{q}\right| + \frac{1}{2}|x-1|,$$

$$\varphi_{p,q}(x) = \frac{q}{2}\left|x - \frac{p-1}{q}\right| - q\left|x - \frac{p}{q}\right| + \frac{q}{2}\left|x - \frac{p+1}{q}\right|, \qquad p = 1, 2, \ldots, q-1,$$

$$\varphi_{q,q}(x) = \frac{1}{2}|x| + \frac{q}{2}\left|x - \frac{q-1}{q}\right| - \frac{q-1}{2}|x-1|.$$

Si je remplace chacune des expressions $\left|x - \frac{k}{q}\right|$ par un polynome $\Pi_k(x)$ tel que l'on ait, entre 0 et 1,

$$\left|\Pi_k(x) - \left|x - \frac{k}{q}\right|\right| < \frac{1}{2q^3},$$

les expressions obtenues seront les polynomes $P_{p,q}(x)$ cherchés, car l'erreur commise sur chaque second membre sera toujours en valeur absolue $< \frac{1}{q^2}$. On aura donc

$$(1) \qquad \begin{cases} P_{0,q} = -\dfrac{q-1}{2}\Pi_0 + \dfrac{q}{2}\Pi_1 + \dfrac{1}{2}\Pi_q, \\ P_{p,q} = \dfrac{q}{2}(\Pi_{p-1} + \Pi_{p+1}) - q\,\Pi_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, q-1, \\ P_{q,q} = \dfrac{1}{2}\Pi_0 + \dfrac{q}{2}\Pi_{q-1} - \dfrac{q-1}{2}\Pi_q. \end{cases}$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIII, 1905, p. 33.

3. Pour déterminer $\Pi_k(x)$ je pose, suivant une remarque de M. Lebesgue [1],

$$\left(x-\frac{k}{q}\right)^2=1+z, \qquad \left|x-\frac{k}{q}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{k}{q}\right)^2}=\sqrt{1+z}.$$

Comme x et $\frac{k}{q}$ sont compris entre 0 et 1, il en est de même de $1+z$, et par suite z est compris entre 0 et -1. J'ai donc pour $\sqrt{1+z}$ le développement en série

$$1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2.4}z^2+\frac{1.3}{2.4.6}z^3-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}z^n+R_n(z)$$

convergente pour $z=-1$ et, par suite, absolument et uniformément convergente pour $-1\leqq z\leqq 1$. Il est aisé de trouver une limite supérieure de $|R_n(z)|$. J'ai, en effet,

$$|R_n(z)|\leqq\sum_{h=n+1}^{h=\infty}u_h,$$

en posant

$$u_h=\frac{1.3\ldots(2h-3)}{2.4\ldots 2h} \qquad \left(h\geqq 2,\ u_0=1,\ u_1=\frac{1}{2}\right).$$

Je vais chercher deux entiers α et $\beta>\alpha$ tels que, à partir d'un certain rang, on ait

$$\left(\frac{u_{h+1}}{u_h}\right)^\alpha<\left(\frac{h}{h+1}\right)^\beta \qquad \text{ou} \qquad h^\beta-(h+1)^{\beta-\alpha}\left(h-\frac{1}{2}\right)^\alpha>0.$$

Le terme de plus haut degré en h est $\frac{1}{2}(3\alpha-2\beta)h^{\beta-1}$. Si donc $\frac{\beta}{\alpha}>\frac{3}{2}$, l'inégalité cesse d'avoir lieu à partir d'un certain rang. Si $\alpha=2$, $\beta=3$, le premier membre devient $\frac{1}{4}(3h-1)$; l'inégalité est donc vérifiée pour $h\geqq 1$. Or, $u_2=\frac{1}{2^3}$, donc, pour $h>2$, on a

$$u_h<\frac{1}{(2h)^{\frac{3}{2}}} \quad [2].$$

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1898, p. 278.

[2] Ce résultat peut encore s'établir au moyen de la formule de Stirling

$$n!=\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad 0<\theta<1;$$

Je dis maintenant que

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_h = R_n = (2n-1)u_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}.$$

Ce théorème est d'abord vrai pour $n=1$. En effet, si je fais

---

on a, en effet,

$$u_h = \frac{1}{2h}\,\frac{(2h-2)!}{2^{2h-2}[(h-1)!]^2}.$$

Remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs limites supérieure et inférieure données par la formule de Stirling, on trouve, après simplification,

$$u_h < \frac{e^{\frac{1}{24(h-1)}}}{2\sqrt{\pi}\,h\sqrt{h-1}} = v_h.$$

Posons

$$\frac{1}{h} = t,$$

il vient

$$h^{\frac{3}{2}} v_h = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{\frac{1}{24(1-t)}}}{\sqrt{1-t}} = \frac{T}{2\sqrt{\pi}}.$$

Lorsque t tend vers o par valeurs constamment décroissantes à partir de 1, T tend vers 1 par valeurs constamment décroissantes, donc $h^{\frac{3}{2}} v_h$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ par valeurs constamment décroissantes. *Ainsi,* T_n *désignant la valeur de* T *pour* $h=n$, *on a, pour* $h>n$,

$$h^{\frac{3}{2}} u_h < h^{\frac{3}{2}} v_h < \frac{T_n}{2\sqrt{\pi}}.$$

On a, par exemple,

$$T_2 = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{24}}.$$

En intervertissant les limites, on trouve de même

$$u_h > \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,h\sqrt{h-1}\;e^{\frac{t}{6(h-1)}}} = v'_h$$

et, en posant $h=\frac{1}{t}$,

$$h^{\frac{3}{2}} v'_h = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-t}\;e^{\frac{1}{6(1-t)}}} = \frac{T'}{2\sqrt{\pi}}.$$

La dérivée de $\frac{1}{T'}$ a le signe de $t-\frac{5}{6}$. Donc, lorsque t tend vers o par valeurs constamment décroissantes à partir de $\frac{1}{2}$, T' tend vers 1 par valeurs constamment tendre z vers -1 dans le développement (absolument et uniformément convergent pour $-1 \leqq z \leqq 1$) de la fonction continue $\sqrt{1+z}$, j'obtiens, à la limite,

$$0 = 1 - \sum_{h=1}^{h=\infty} u_h,$$

d'où, comme $u_0 = 1$, je conclus

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} u_h = 2;$$

alors

$$R_1 = 2 - (u_0 + u_1) = \frac{1}{2}.$$

Si maintenant la formule est vraie pour R_n, on a

$$u_{n+1} = \frac{(2n-1)u_n}{2n+2} = \frac{R_n}{2n+2};$$

or

$$R_{n+1} = R_n - u_{n+1} = \frac{(2n+1)R_n}{2n+2} = (2n+1)\,u_{n+1} \quad (^1).$$

---

décroissantes. *On a donc, pour* $h \geqq 2$,

$$h^{\frac{3}{2}} u_h > h^{\frac{3}{2}} v'_h > \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

et, par suite, pour $h > n \geqq 2$,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} < h^{\frac{3}{2}} u_h < \frac{T_n}{2\sqrt{\pi}}.$$

(1) On peut encore écrire

$$R_n = \frac{(2n)!}{(2.4\ldots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Or $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, nombre des combinaisons de $2n$ objets n à n, est entier, donc *la fraction irréductible égale à* R_n *a pour dénominateur une puissance de* 2. Comme $u_n = R_{n-1} - R_n$, *il en est de même pour* u_n. En procédant de proche en proche, on voit qu'*en général, si l'on pose*

$$u_{n,p} = \frac{1.3\ldots(2p-1).1.3\ldots(2n-2p-1)}{2.4\ldots 2n} \qquad \left(p < \frac{n+1}{2},\ u_{n,0} = R_n,\ u_{n,1} = u_n\right),$$

on a

$$u_{n,p} = u_{n-1,p-1} - u_{n,p-1},$$

et que la fraction irréductible égale à $u_{n,p}$ *a pour dénominateur une puis-*

Je conclus de là

$$R_n < \frac{2n-1}{(2n)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour avoir $R_n < \frac{1}{2q^3}$, il suffit donc de prendre $\frac{(2n-1)^2}{2n^3} \leqq \frac{1}{q^6}$. Soit $n = \alpha q^\beta$ (α et β entiers, $\beta \neq 0$), il faut

$$2\alpha^3 q^{3\beta} - q^6(2\alpha q^\beta - 1)^2 \geqq 0.$$

Pour que cette inégalité ait lieu pour toute valeur de q, il faut que le terme de plus haut degré en q ait son coefficient positif, ce qui exige d'abord

$$3\beta \geqq 2\beta + 6 \quad \text{ou} \quad \beta \geqq 6,$$

puis, en supposant $\beta = 6$,

$$2\alpha^3 - 4\alpha^2 \geqq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha \geqq 2.$$

Comme d'ailleurs $\frac{2h-1}{(2h)^{\frac{2}{3}}}$ peut s'écrire $\frac{1}{(2h)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(2h)^{\frac{3}{2}}}$, en faisant $h = 2q^6$, cette expression devient

$$\frac{1}{2q^3} - \frac{1}{8q^9}.$$

On a donc bien une solution de l'inégalité en prenant $n = 2q^6$.

Ainsi, on peut toujours prendre pour $\Pi_k(x)$ l'expression

$$1 + \sum_{h=1}^{h=2q^6} (-1)^{h+1} u_h \left[\left(x - \frac{k}{q}\right)^2 - 1\right]^h,$$

de degré $4q^6$ en x. Ordonnons-la par rapport à x.

---

sance de 2. On voit aussi que

$$\sum_{h=n+1}^{h=\infty} u_{n,p} = u_{n,p-1} = u_{n,p} \frac{2n-2p+1}{2p-1}.$$

Pour les grandes valeurs de n, $u_{n,p}$ est donc de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$.

4. On a, en supposant d'abord $k(k-q)\neq 0$,

$$\left[\left(x-\frac{k}{q}\right)^2-1\right]^h=\left[x^2-2\frac{k}{q}x+\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)\right]^h=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{h!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}x^{2\alpha}\left(-2\frac{k}{q}x\right)^\beta\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)^\gamma,$$

$$(\alpha+\beta+\gamma=h);$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum_{\alpha,\beta}\frac{h!(-1)^{h-\alpha}}{\alpha!\,\beta!\,(h-\alpha-\beta)!}\left(\frac{2k}{q}\right)^\beta\left(1-\frac{k^2}{q^2}\right)^{h-\alpha-\beta}x^{2\alpha+\beta},\qquad(\alpha+\beta\leqq h).$$

Le coefficient de x^μ dans cette expression s'obtient en réunissant les termes correspondants aux systèmes (α,β) de solutions entières et positives de

$$2\alpha+\beta=\mu,\qquad \alpha+\beta\leqq h.$$

On voit aisément que ces solutions n'existent que pour

$$\mu\leqq\begin{cases}2h & \text{si } \mu \text{ est pair,}\\ 2h-1 & \text{si } \mu \text{ est impair,}\end{cases}\qquad\text{ou}\qquad h\geqq\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}[1-(-1)^\mu]=l_\mu.$$

Je les désignerai par $(\alpha_{h,\mu},\beta_{h,\mu})$. Le coefficient de x^μ dans $\Pi_k(x)$ est donc, si $\mu>0$,

$$C_{\mu,k}=\sum_{h=l_\mu}^{h=2q^6}h!\,u_h\sum_{\alpha_{h,\mu},\beta_{h,\mu}}(-1)^{\alpha+1}\frac{1}{\alpha_{h,\mu}!\beta_{h,\mu}!(h-\alpha_{h,\mu}-\beta_{h,\mu})!}\left(\frac{2k}{q}\right)^{\beta_{h,\mu}}\left(1-\frac{k^2}{q^2}\right)^{h-\alpha_{h,\mu}-\beta_{h,\mu}},$$

ou bien en désignant simplement par α_μ, β_μ deux entiers positifs, solutions de $2\alpha+\beta=\mu$ $(0\leqq\mu\leqq 4q^6)$

$$C_{\mu,k}=\sum_{\alpha_\mu,\beta_\mu}\frac{(-1)^{\alpha_\mu+1}\left(\dfrac{2k}{q}\right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu!\,\beta_\mu!}\sum_{h=\alpha_\mu+\beta_\mu}^{h=2q^6}u_h\frac{h!}{(h-\alpha_\mu-\beta_\mu)!}\left(1-\frac{k^2}{q^2}\right)^{h-\alpha_\mu-\beta_\mu}.$$

On peut encore écrire

$$(2)\qquad C_{\mu,k}=\sum_{\alpha_\mu,\beta_\mu}\frac{\left(-\dfrac{2k}{q}\right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu!\,\beta_\mu!}\sum_{h=\alpha_\mu+\beta_\mu}^{h=2q^6}(-1)^{h+1}u_h\frac{h!}{(h-\alpha_\mu-\beta_\mu)!}\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)^{h-\alpha_\mu-\beta_\mu}.$$

On a d'ailleurs directement

$$(3)\qquad C_{0,k}=1+\sum_{h=1}^{h=2q^6}(-1)^{h-1}u_h\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)^h.$$

On peut alors écrire, quel que soit μ,

$$C_{\mu,k} = \sum_{\alpha_\mu,\beta_\mu} \frac{\left(-\frac{2k}{q}\right)^{\beta_\mu}}{\alpha_\mu!\,\beta_\mu!}\,\frac{d^{\alpha_\mu+\beta_\mu} C_{0,k}}{d^{\alpha_\mu+\beta_\mu}\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)},$$

et remarquer que $C_{0,k}$ *se compose des* $2q^6+1$ *premiers termes du développement de* $\frac{k}{q}$ *par rapport aux puissances croissantes de* $\left(\frac{k^2}{q^2}-1\right)$.

Si $k=0$, on a

$$(x^2-1)^h = \sum_\alpha \frac{h!(-1)^{h-\alpha}}{\alpha!(h-\alpha)!} x^{2\alpha}.$$

Le coefficient de x^μ dans $\Pi_0(x)$ est donc 0 si μ est impair, et, si μ est pair et $\neq 0$,

$$C_{\mu,0} = \sum_{h=\frac{\mu}{2}}^{h=2q^6} (-1)^{h+1} h!\, u_h \frac{(-1)^{h-\frac{\mu}{2}}}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!\left(h-\frac{\mu}{2}\right)!}$$

ou bien

$$(4)\qquad C_{\mu,0} = \frac{1}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!} \sum_{h=\frac{\mu}{2}}^{h=2q^6} (-1)^{h+1} u_h \frac{h!}{\left(h-\frac{\mu}{2}\right)!} (-1)^{h-\frac{\mu}{2}}.$$

On a d'ailleurs directement

$$(5)\qquad C_{0,0} = 1 - \sum_{h=1}^{h=2q^6} u_h \quad (^1).$$

On voit que $C_{0,0}$ *se compose des* $2q^6+1$ *premiers termes du développement de* $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ *où l'on fait* $z=-1$ *et que* $C_{\mu,0}$ *est*

---

(1) On a déjà vu que

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} u_h = 1.$$

Donc

$$\sum_{h=1}^{h=2q_6} = 1 - R_{2q_6}, \qquad C_{0,0} = R_{2q^6} = (4q_6+1)\,u_{2q^6}.$$

le quotient par $\frac{\mu}{2}!$ *de la* $\left(\frac{\mu}{2}\right)^{ième}$ *dérivée de cette expression, pour* $z = -1$. On peut faire rentrer ce résultat dans les formules (2) et (3) en y faisant $\beta_\mu = 0$ et remplaçant $\frac{(-2k)^{\beta_\mu}}{\beta_\mu!}$ par $\frac{1+(-1)^\mu}{2}$.

Si $k = q$, on a

$$[(x-1)^2 - 1]^h = x^h(x-2)^h = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=h} \frac{h!}{\alpha!(h-\alpha)!} x^{h+\alpha}(-2)^{h-\alpha}.$$

Pour avoir le coefficient de x^μ dans $\Pi_q(x)$, remarquons qu'un terme de rang h de $\Pi_q(x)$ fournit un terme en x^μ toujours et seulement si

$$h \leqq \mu \leqq \begin{cases} 2h, & \text{si } \mu \text{ est pair,} \\ 2h-1, & \text{si } \mu \text{ est impair,} \end{cases}$$

en sorte que, si $\mu \neq 0$,

$$(6) \qquad C_{\mu,q} = \sum_{h=l_\mu}^{h=\mu} (-1)^{h-1} u_h h! \frac{(-2)^{2h-\mu}}{(\mu-h)!(2h-\mu)!}$$

(si $\mu > 2q^6$, la limite supérieure de h sera $2q^6$). On a d'ailleurs directement

$$(7) \qquad C_{0,q} = 1.$$

5. Désignons maintenant par $D_{\mu,p,q}$ le coefficient de x^μ dans $P_{p,q}(x)$; les formules (1) donnent

$$(8) \quad \begin{cases} D_{\mu,0,q} = -\frac{q-1}{2} C_{\mu,0} + \frac{q}{2} C_{\mu,1} + \frac{1}{2} C_{\mu,q}, \\ D_{\mu,p,q} = \frac{q}{2}(C_{\mu,p-1} + C_{\mu,p+1}) - q\, C_{\mu,p}, \qquad p = 1, 2, \ldots, q-1. \\ D_{\mu,q,q} = \frac{1}{2} C_{\mu,0} + \frac{q}{2} C_{\mu,q-1} - \frac{q-1}{2} C_{\mu,q}. \end{cases}$$

Ces formules (8), jointes aux formules (2)-(7), déterminent complètement les polynomes $P_{p,q}(x) = \sum_{\mu=0}^{h=4q^6} D_{\mu,p,q} x^\mu$.