BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SPARRE

Note au sujet du valet de menuisier

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 41-47
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__41_1>

NOTE AU SUJET DU VALET DE MENUISIER;

Par M. le Comte de Sparre.

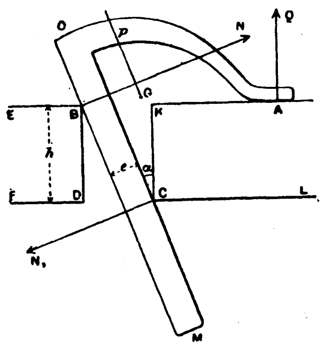
M. Painlevé avait signalé un certain nombre de problèmes où les lois du frottement de glissement semblent à première vue conduire à une impossibilité ou à une indétermination.

Toutefois, M. Lecornu a montré dans deux communications des 6 et 27 mars 1905, à l'Académie des Sciences, que cette impossibilité disparaît si l'on admet que, lorsque deux corps en mouvement sont mis en contact, le coefficient de frottement prend la valeur limite relative au mouvement, à moins qu'il n'existe une valeur plus petite de ce coefficient de frottement qui rende certaines des réactions infinies, auquel cas il se produit des percussions entraînant un arcboutement dynamique, entièrement semblable aux arcboutements statiques depuis longtemps connus.

J'ai eu également occasion de revenir sur cette question dans une communication du 31 juillet 1905 et de montrer que l'indétermination disparaît, aussi bien que l'impossibilité, si l'on tient compte du mouvement antérieur qui a produit les conditions initiales.

Je me propose dans cette petite Note de revenir, en quelques mots, sur la théorie d'un appareil bien connu, le valet de menuisier, qui présente ce phénomène remarquable de pouvoir présenter soit l'arcboutement statique seul, soit en même temps l'arcboutement statique et l'arcboutement dynamique; de plus, cet appareil se prêterait facilement à des expériences sur la question, si l'on jugeait utile d'en organiser.

Fig. 1.



Soient EBKALCDF l'établi, MOA le valet et G son centre de gravité. Désignons de plus par :

P son poids;
m sa masse;
α l'inclinaison de la partie rectiligne sur la verticale;
e le diamètre de cette partie rectiligne;

Q la force verticale et dirigée de bas en haut, appliquée en A à la pince;

N et N_1 les composantes normales au valet des réactions qui s'exercent en B et C;

a, δ, δ_1 et l les distances du centre de gravité du valet à sa partie rectiligne ainsi qu'à N, N_1 et Q;

h l'épaisseur de l'établi;

f le coefficient de frottement.

Supposons d'abord que le valet puisse prendre un déplacement rectiligne parallèle à sa partie rectiligne dans le sens ascendant.

Si l'on considère un axe Gx parallèle à cette direction, on aura, pour les équations du mouvement,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{c} mx'' = Q\cos\alpha - (N + N_1)f - P\cos\alpha, \\ N + Q\sin\alpha - N_1 - P\sin\alpha = 0, \\ N\delta + N_1\delta_1 - Ql - Nf(a+e) - N_1 fa = 0; \end{array}\right.$$

d'ailleurs

$$(2)\qquad \delta + \delta_1 = \frac{h}{\cos\alpha} + e\tang\alpha.$$

On tire des deux dernières équations (1) :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{r} N[\delta + \delta_1 - (2a+e)f] = Ql - (Q-P)(\delta_1 - af)\sin\alpha, \\ N_1[\delta + \delta_1 - (2a+e)f] = Ql + (Q-P)[\delta - (a+e)f]\sin\alpha, \\ (N+N_1)[\delta + \delta_1 - (2a+e)f] = 2Ql - (Q-P)(\delta_1 - \delta + ef)\sin\alpha. \end{array}\right.$$

De plus, pour que ces équations soient applicables, il faut que les valeurs de N et de N_1 soient positives, puisque les réactions en B et C ne peuvent s'exercer que dans un sens.

On doit supposer la force Q très considérable, par rapport au poids P du valet ([1]). Nous supposerons donc cette force assez grande pour que l'on puisse négliger P devant elle et, de plus, ainsi que cela a lieu en réalité, l'angle α assez petit pour que l'on puisse négliger les termes qui le contiennent en facteur, devant ceux qui en sont indépendants.

([1]) On réalise cette condition dans la pratique en assujettissant le valet au moyen d'un coup de maillet appliqué sur sa tête.

Dans ces conditions les équations (1), (2) et (3) donnent

$$\delta + \delta_1 = h,$$

$$(4) \qquad N = N_1 = \frac{Ql}{h-(2a+e)f},$$

$$(5) \qquad mx'' = Q - \frac{2Qlf}{h-(2a+e)f} = Q\frac{h-(2l+2a+e)f}{h-(2a+e)f}.$$

Cherchons d'abord la condition d'arcboutement statique; pour cela, il faut que l'on puisse satisfaire à l'équation obtenue en faisant $x'' = 0$ dans (5) par une valeur f' de f plus petite que celle qui correspond au mouvement, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait

$$f' = \frac{h}{2l+2a+e} < f;$$

la condition de l'arcboutement statique est donc

$$(6) \qquad f > \frac{h}{2l+2a+e},$$

condition à laquelle on pourra toujours facilement satisfaire en prenant l assez grand.

Toutefois cette condition (6), nécessaire et suffisante pour qu'il y ait arcboutement statique, n'est pas suffisante pour qu'il y ait arcboutement dynamique. Si, en effet, on a

$$(7) \qquad \frac{h}{2a+e} > f > \frac{h}{2l+2a+e},$$

le mouvement ne pourra pas se produire à partir du repos, quelque grande que soit la force Q, puisqu'il y a arcboutement statique; mais imprimons au valet une vitesse parallèle à Gx [1]: le mouvement se continuera. Ce mouvement sera un mouvement uniformément retardé, si nous supposons Q constant, puisque la valeur de x'' est constante et négative; une fois la vitesse du valet devenue nulle, il restera indéfiniment au repos, quelque grande

(1) Condition toujours facile à réaliser, car il suffit pour cela de ne pas appliquer au début la force Q et de faire glisser le valet parallèlement à MO, en l'appuyant en B, mais sans qu'il touche le point C, tout en en étant très voisin, et d'appliquer ensuite la force Q en A, lorsque le valet a pris la vitesse voulue, parallèle à Gx.

que soit la force Q, puisque nous sommes alors dans le cas de l'arcboutement statique.

On remarquera d'ailleurs que les valeurs de N et de N_1 données par (4) sont positives, condition indispensable pour que les formules soient applicables.

Supposons maintenant [1]

$$f > \frac{h}{2a+e}. \tag{8}$$

Si, dans ce cas, on appliquait telles quelles les formules (4) et (5) on aurait un résultat évidemment absurde et même doublement absurde, à savoir que, quelque grande que soit la force Q qui tend à faire tourner le valet de droite à gauche, autour de son centre de gravité, les réactions N et N_1 tendraient à le faire tourner dans le même sens, et ensuite que le mouvement, qui était retardé, pour une valeur de f satisfaisant aux conditions (7), deviendrait accéléré dans le cas actuel où f est plus grand, x'' étant alors positif.

Mais, ainsi que l'a fait remarquer M. Lecornu, cette impossibilité apparente tient simplement à ce qu'il y a alors arcboutement dynamique; en effet, lorsque après avoir fait prendre au valet une vitesse déterminée parallèlement à Gx on fait intervenir la force Q, les réactions N et N_1 croissent au delà de toute limite puisque la valeur du coefficient de frottement

$$f' = \frac{h}{2a+e},$$

qui les rend l'une et l'autre infinies, est plus petite que celle de ce coefficient qui correspond au mouvement.

On peut d'ailleurs facilement vérifier que, dans le cas actuel, le frottement peut produire une percussion capable d'arrêter le valet.

Soient en effet H et H_1 les composantes normales au valet des percussions qui se produisent en B et C au moment de l'introduction de la force Q; les composantes tangentielles seront Hf'

---

[1] Nous nous supposons toujours dans le cas où l'on peut négliger P devant Q, et aussi les termes qui contiennent α en facteur devant ceux qui en sont indépendants.

et $H_1 f'$, f' étant assujetti à la seule condition

$$f' \leqq f.$$

Si l'on applique alors le théorème de d'Alembert pour les forces de percussion, v désignant la vitesse de translation du valet au moment où la percussion se produit (la vitesse finale étant par hypothèse nulle), on aura

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} mv - Hf' - H_1 f' &= 0,\\ H - H_1 &= 0,\\ H\delta + H_1\delta_1 - Hf'(a+e) - H_1 f' a &= 0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} H = H_1 &= \frac{mv}{2f'},\\ H[\delta + \delta_1 - (2a+e)f'] &= 0,\end{aligned}\right.$$

où, comme $H > 0$,

$$f' = \frac{\delta + \delta_1}{2a + e},$$

c'est-à-dire, si l'on prend $\cos\alpha = 1$,

$$f' = \frac{h}{2a + e}.$$

Donc la condition pour qu'il y ait arcboutement dynamique est

$$f \geqq \frac{h}{2a + e}.$$

On voit donc que, suivant ses dimensions et sa construction, le valet de menuisier peut présenter ou simplement l'arcboutement statique ou à la fois l'arcboutement statique et l'arboutement dynamique.

On pourrait toutefois faire à ce qui précède l'objection suivante :

Nous pouvons supposer que l'on ait fait prendre au valet une vitesse initiale déterminée parallèle à Gx en lui appliquant pendant un temps voulu une force de direction et d'intensité convenables, le valet pendant cette période touchant l'*établi seulement en* B mais étant infiniment voisin du point C, sans toutefois toucher ce point. Pendant cette période, la réaction en C est nulle, et la réaction en B a pour composante, suivant la normale au valet,

$$N = F \cos\gamma - P \sin\alpha,$$

F étant la force qui sollicite le valet pendant cette période et γ son angle avec N, et pour composante tangentielle Nf, f étant la valeur du coefficient de frottement pour le mouvement.

Au moment où la force Q intervient il faut, pour que la percussion se produise, que le coefficient de frottement prenne une valeur

$$f' = \frac{h}{2a + e} < f,$$

si nous nous supposons dans le cas de l'arcboutement dynamique; or il peut paraître anormal de supposer que l'intervention de la force Q fasse diminuer la valeur du coefficient de frottement en B. Toutefois, bien que cette objection soit spécieuse, il est facile d'y répondre.

En effet, le coefficient de frottement est le rapport entre la composante tangentielle et la composante normale de la réaction; ce rapport est sensiblement constant, en vertu des lois de Coulomb, une fois que le mouvement est établi. Mais il n'en est pas de même pendant la période d'établissement du mouvement, ou au moment d'une variation brusque des forces qui entrent en jeu.

Le frottement en effet est dû, pour la majeure partie au moins, à la déformation des surfaces en contact, déformation qui est le résultat de l'action de forces en présence.

Si, par suite, la réaction normale éprouve une augmentation brusque, la déformation correspondante sera sans doute très rapide, mais elle exigera cependant un temps fini et, par suite, l'augmentation de la réaction tangentielle sera un peu en retard sur celle de la composante normale. Le coefficient de frottement qui est, comme nous l'avons rappelé, le rapport de la composante tangentielle à la composante normale, commencera donc par décroître, pendant un temps très court, pour reprendre ensuite sa valeur f relative au mouvement, *à moins qu'il n'existe une valeur plus petite f' rendant la réaction infinie,* et c'est précisément ce qui a lieu dans le cas actuel.