CH. BIOCHE

Sur les permutations polyédriques

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 88-89
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__88_0>

SUR LES PERMUTATIONS POLYÉDRIQUES;

Par M. Ch. Bioche.

1. Les permutations ordinaires et les permutations circulaires ne sont autre chose que les dispositions qu'on peut réaliser avec n objets placés en ligne droite ou en cercle. Il semble assez naturel de considérer d'autres dispositions, telles que les différentes façons d'affecter n lettres aux n sommets d'un polyèdre. Ce sont ces dernières dispositions que j'appellerai *permutations polyédriques*. Je me propose de calculer leur nombre.

Pour préciser le problème j'en donnerai l'énoncé suivant :

On considère n lettres, et des polyèdres égaux ayant n sommets. On affecte à chaque sommet d'un polyèdre une des n lettres; combien peut-on obtenir de dispositions de ces lettres, deux dispositions étant les mêmes si l'on peut faire coïncider les polyèdres correspondants de façon que les sommets qui coïncident soient affectés de la même lettre?

2. Supposons toutes les dispositions réalisées, chacune ne l'étant qu'une seule fois; soit X leur nombre, il leur correspondra autant de polyèdres que je désignerai par

$$\Pi_1, \ \Pi_2, \ \ldots, \ \Pi_X.$$

J'imagine un polyèdre Π_0, égal aux polyèdres précédents et sur lequel je numérote les sommets de 1 à n, d'une façon d'ailleurs arbitraire. Si je fais coïncider Π_0 avec un des polyèdres considérés, Π_i par exemple, j'obtiens une permutation de n lettres en lisant sur Π_i les lettres dans l'ordre des numéros qui leur correspondent sur Π_0.

A toute permutation des n lettres correspond un polyèdre Π_i; qui se déduit de Π_0 en remplaçant les numéros correspondant aux sommets de Π_0 par les lettres de même rang de la permutation donnée; et l'on n'a qu'un polyèdre correspondant à une permutation donnée, puisqu'on suppose les permutations polyédriques distinctes.

Mais à un polyèdre Π_i il correspond autant de permutations des n lettres qu'il y a de façons de faire coïncider Π_0 avec Π_i; soit μ le nombre de ces *modes de coïncidence;* on voit qu'à toute permutation polyédrique correspondent μ permutations ordinaires. On a donc

$$X = \frac{n!}{\mu}.$$

3. En particulier, si les polyèdres Π sont réguliers et si p est le nombre des arêtes de chaque angle solide, on voit facilement que

$$\mu = np,$$

on a alors

$$X = \frac{(n-1)!}{p};$$

si les polyèdres Π sont des pyramides régulières, la base ayant $n-1$ sommets, on voit facilement que si $n > 4$ on a

$$\mu = (n-1),$$

et l'on a

$$X = \frac{n!}{(n-1)}.$$

On peut d'ailleurs facilement vérifier ces résultats ainsi que bien d'autres correspondant à des cas particuliers.

4. J'ai parlé, dans ce qui précède, de sommets d'un polyèdre pour plus de commodité; mais on peut considérer des systèmes de points tous situés dans un plan. Seulement, si l'on suppose toutes les figures situées dans le même plan, on pourra prendre pour μ soit le nombre des modes de coïncidence réalisables sans faire sortir les figures du plan commun, soit le nombre des modes de coïncidence réalisés quel que soit le déplacement. Le nombre X des permutations de trois lettres A, B, C, mises aux sommets d'un triangle isoscèle, serait alors de 6 dans le premier cas (où μ serait égal à 1), et de 3 dans le second (où μ serait égal à 2).