

# BULLETIN DE LA S. M. F.

WEILL

## **Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 33 (1905), p. 82-87

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1905\\_\\_33\\_\\_82\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__82_1)>

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

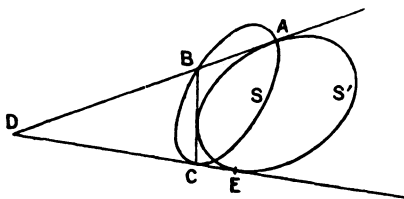
---

### SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS IRRÉDUCTIBLES DU CINQUIÈME DEGRÉ, RÉSOLUBLES PAR RADICAUX;

Par M. MATHIEU WEILL.

Soient (*fig. 1*) une conique  $S'$ , trois tangentes DCE, DBA, BC, et une autre conique  $S$  passant par A, B, C, et touchant DE au

Fig. 1.



point C. Le pentagone ABCCB a ses sommets sur la conique  $S$  et ses côtés tangents à la conique  $S'$ ; dès lors, il existe une infinité de pentagones inscrits dans  $S$  et circonscrits à  $S'$ .

On aura pour S' l'équation

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

et, pour S, l'équation

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 - \beta(2\lambda^2\gamma + \mu\alpha) = 0$$

(BC ayant pour équation  $\lambda^2\beta + 2\lambda\gamma + \alpha = 0$ ). Un point de la conique S est défini par

$$\alpha = 2\lambda \frac{t - \lambda^2}{\mu - t} \gamma,$$

$$\beta = -\frac{2\lambda}{t} \frac{\mu - \lambda^2}{\mu - t} \gamma.$$

La droite qui joint deux points a pour équation

$$\alpha[\mu - (t + t')] - \beta tt' - 2\lambda\gamma(t + t' - \lambda^2) = 0.$$

Cette droite sera tangente à S', dont un point est défini par

$$\alpha = \lambda\theta,$$

$$\beta = \frac{\lambda}{\theta},$$

si l'équation

$$\theta^2[\mu - (t + t')] - tt' - 2\lambda\theta(t + t' - \lambda^2) = 0$$

a ses racines égales, ce qui donne

$$t^2(\lambda^2 - t') + t[2\lambda^2(t' - \lambda^2) - t'^2 + \mu t'] + \lambda^2(t' - \lambda^2)^2 = 0.$$

Considérons un pentagone inscrit dans la conique S et circonscrit à la conique S', et soient  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  les valeurs correspondantes du paramètre  $t$ . On aura

$$(1) \quad \begin{cases} t_2 + t_3 = \frac{2\lambda^2(t_1 - \lambda^2) - t_1^2 + \mu t_1}{t_1 - \lambda^2}, \\ t_2 t_3 = \lambda^2(\lambda^2 - t_1). \end{cases}$$

Transportons ces valeurs dans l'équation de la droite qui joint les points correspondant à  $t_2$  et  $t_3$ , nous aurons  $t_1$  au second degré, nous en déduirons, immédiatement, l'équation de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets du pentagone

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 + \beta(2\lambda^2\gamma + \mu\alpha) + (\mu - \lambda^2)(\gamma^2 - \alpha\beta) = 0.$$

Cette conique passe par les points communs aux deux premières, résultat bien connu.

D'autre part, en éliminant  $t_1$  entre les relations (1), nous aurons, entre  $t_2$  et  $t_3$ , la relation

$$\lambda^2(t_2 t_3)(t_2 + t_3) + \mu \lambda^6 - \lambda^8 - \mu \lambda^2 t_2 t_3 - t_2^2 t_3^2 = 0.$$

Cette même relation existe évidemment, entre  $t_1$  et  $t_3$ , et aussi entre  $t_1$  et  $t_4$ ; on a donc

$$t_2 + t_3 = \lambda^2 \frac{\mu - t_1}{\lambda^2 - t_1},$$

$$t_2 t_3 = \lambda^6 \frac{\mu - \lambda^2}{t_1(\lambda^2 - t_1)}.$$

Désignons par  $\theta$  la somme des produits 2 à 2 des 5 quantités  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ , c'est-à-dire la quantité

$$(t_2 + t_3 + t_4 + t_5)t_1 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + (t_3 + t_4)(t_2 + t_5),$$

on aura donc

$$\theta = \frac{f(t_1)}{\varphi(t_1)}$$

ou

$$\theta \varphi(t_1) - f(t_1) = 0,$$

relation où  $t_1$  pourra être remplacé par chacune des valeurs  $t_2, t_3, t_4, t_5$ ; on obtient ainsi l'équation

$$t^5 - t^4(2\lambda^2 + \mu) + \theta t^3 - \lambda^2 t^2(2\theta - \mu\lambda^2 - \mu^2 - 3\lambda^4) \\ - \lambda^6 t(2\lambda^4 + \mu\lambda^2 - \theta) + \lambda^8(\lambda^2 - \mu) = 0.$$

Cette équation donnera, par la variation de  $\theta$ , les 5 valeurs de  $t$  qui définissent le pentagone. Or, 2 quelconques de ces valeurs étant données, les autres en sont des fonctions rationnelles, comme le montre l'analyse précédente, c'est donc une équation de Galois, c'est à-dire que les 5 racines s'expriment par des radicaux portant sur des fonctions rationnelles des 3 paramètres  $\theta, \mu, \lambda^2$ . On a donc le théorème suivant :

### *L'équation*

$$t^5 - t^4(2a + b) + ct^3 - at^2(2c - ab - b^2 - 3a^2) \\ - a^2 t(2a^2 + ab - c) + a^4(a - b) = 0,$$

dans laquelle  $a, b, c$  sont 3 quantités quelconques, est résoluble par radicaux.

Soient  $t_1$  et  $t_2$  deux des racines, les autres auront pour valeurs

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{a(a - t_1)}{t_1}, \\ t_4 &= a^2 \frac{t_1 + t_2 - a}{t_2}, \\ t_5 &= \frac{a(a - t_2)}{t_2}. \end{aligned}$$

On peut employer une autre méthode. Considérons deux coniques ayant pour équations

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 0, \\ Ax^2 + By^2 - z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Un point de la première est défini par les équations

$$x = z \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = z \frac{2t}{1 + t^2},$$

et la droite qui joint 2 points a pour équation

$$x(1 - tt') + y(t + t') - z(1 + tt') = 0.$$

En exprimant que cette droite touche la seconde conique, on trouve facilement

$$\frac{(t + t')^2}{B} + \frac{(1 - tt')^2}{A} - (1 + tt')^2 = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} t^2(1 + \lambda t'^2) + 2\mu tt' + t'^2 + \lambda &= 0, \\ \left( \lambda = \frac{B - AB}{A}, \quad \mu = \frac{A - B - AB}{A} \right). \end{aligned}$$

Considérons un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde, et soient  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  les paramètres qui correspondent aux sommets. On aura

$$t_2 + t_3 = \frac{-2\mu t_1}{1 + \lambda t_1^2}, \quad t_2 t_3 = \frac{\lambda + t_1^2}{1 + \lambda t_1^2}.$$

Il en résulte entre  $t_2$  et  $t_3$  une relation de la forme

$$t^2(1 + \lambda_1 t'^2) + 2\mu_1 t t' + t'^2 + \lambda = 0,$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{4\lambda\mu^2}{(\lambda^2 - 1)^2}; \quad \mu_1 = 1 - \frac{2\mu^2(\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 - 1)^2}.$$

On aura donc

$$t_3 + t_4 = \frac{-2\mu_1 t_1}{1 + \lambda_1 t_1^2}, \quad t_3 t_4 = \frac{\lambda_1 + t_1^2}{1 + \lambda_1 t_1^2}.$$

Appelons  $\theta$  le produit  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ , nous aurons

$$\theta = t_1 \frac{\lambda + t_1^2}{1 + \lambda t_1^2} \frac{\lambda_1 + t_1^2}{1 + \lambda_1 t_1^2}.$$

Donc l'équation

$$t(\lambda + t^2)(\lambda_1 + t^2) - \theta(1 + \lambda t^2)(1 + \lambda_1 t^2) = 0$$

aura pour racines les 5 valeurs de  $t$ ; cette équation développée est

$$t^5 - \theta\lambda_1 t^4 + t^3(\lambda + \lambda_1) - \theta(\lambda + \lambda_1)t^2 + \lambda\lambda_1 t - \theta = 0.$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $\lambda_1$  sont liés par une relation qu'il faut trouver.

Or, si nous joignons  $t_1$  à  $t_3$ , puis  $t_3$  à  $t_5$ , la droite  $t_1 t_5$  sera telle que l'on aura entre  $t_1$  et  $t_5$  la relation

$$t^2(1 + \lambda_2 t'^2) + 2\mu_2 t t' + t'^2 + \lambda_2 = 0,$$

avec

$$\lambda_2 = \frac{4\lambda_1\mu_1^2}{(\lambda_1^2 - 1)^2}, \quad \mu_2 = 1 - \frac{2\mu_1^2(\lambda_1^2 + 1)}{(\lambda_1^2 - 1)^2}.$$

On aura, si le polygone se ferme,

$$\lambda_2 = \lambda, \quad \mu_2 = \mu.$$

Exprimant ces conditions, on trouve

$$16\mu^2[(\lambda^2 - 1)^2 - 2\mu^2(\lambda^2 + 1)]^2(\lambda^2 - 1)^2 = [16\lambda^2\mu^4 - (\lambda^2 - 1)^4]^2,$$

$$1 - \mu = \frac{[(\lambda^2 - 1)^2 - 2\mu^2(\lambda^2 + 1)]^2[(\lambda^2 - 1)^4 + 16\lambda^2\mu^4]}{[16\lambda^2\mu^4 - (\lambda^2 - 1)^4]^2 8\mu^2(\lambda^2 - 1)^2}.$$

La première donne

$$\{ \mu(\lambda^2 - 1) | (\lambda^2 - 1)^2 - 2\mu^2(\lambda^2 + 1) | \pm [16\lambda^2\mu^4 - (\lambda^2 - 1)^4] \} = 0.$$

et la seconde, combinée avec la première, donne

$$8\mu^2(1-\mu)(\lambda^2-1)^2 - [(\lambda^2-1)^4 + 16\lambda^2\mu^4] = 0.$$

On voit facilement que, dans la première, il faut prendre le signe +.

En posant  $\lambda^2 - 1 = z$ , les 2 relations deviennent

$$\begin{aligned} (z-2\mu)[-z^2+2\mu z^2+(4\mu^2-8\mu^2)z-8\mu^2] &= 0, \\ (z+2\mu)(-z^2+2\mu z^2+\dots) &= 0. \end{aligned}$$

La relation cherchée est donc, en posant  $2\mu = t$ ,

$$z^3 - tz^2 + (t^2 - t^2)z + t^3 = 0.$$

Elle donne, sous une forme simple, la condition entre A et B pour qu'il existe un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde; elle peut s'écrire

$$(\lambda^2-1)^3 - 2\mu(\lambda^2-1)^2 + (8\mu^3-4\mu^2)(\lambda^2-1) + 8\mu^3 = 0,$$

elle permet d'exprimer  $\mu$  en fonction de  $\lambda$  par des radicaux, et par suite,  $\lambda_1$  en fonction de  $\lambda$  par des radicaux, donc l'équation du 5<sup>e</sup> degré envisagée plus haut est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles des deux paramètres indépendants  $\lambda$  et  $\theta$ . On trouve, d'ailleurs, entre  $\lambda$  et  $\lambda_1$ , la relation

$$(\lambda\lambda_1-1)^2\lambda\lambda_1 - (\lambda-\lambda_1)^2 = 0.$$

Posons

$$\lambda\lambda_1 = a, \quad \lambda + \lambda_1 = b,$$

il vient

$$b = \sqrt{a^2 - 2a^2 + 5a},$$

on a donc l'énoncé suivant .

*L'équation*

$$t^3 - act^2 + (t^3 - ct^2)\sqrt{a^2 - 2a^2 + 5a} + ta - c = 0,$$

où  $a$  et  $c$  sont deux paramètres indépendants, est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles de  $a$  et  $c$ .