BULLETIN DE LA S. M. F.

SUCHAR

Sur une transformation réciproque en mécanique

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 210-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__210_1>

SUR UNE TRANSFORMATION RÉCIPROQUE EN MÉCANIQUE;

Par M. Paul-J. Suchar.

M. Painlevé [1] a étudié des transformations de mouvement qui constituent la généralisation de la transformation homographique en Mécanique, indiquée par M. Appell [2]. On peut envisager des transformations de mouvement distinctes des précédentes, que je désigne sous le nom de *transformations réciproques,* et qui seront définies comme il suit : les mouvements de deux points qui ont lieu, l'un par rapport au temps t et l'autre par rapport au temps t_1, seront réciproques si, en deux points correspondants de leurs trajectoires, les coordonnées du premier point sont des fonctions des projections de la vitesse du second point sur les axes de coordonnées, et réciproquement, les coordonnées du second point sont les mêmes fonctions des composantes de la vitesse du premier point.

Si l'on suppose connues les fonctions qui caractérisent la réciprocité, et si, de plus, on se donne une relation entre les temps t

---

(1) Painlevé, *Journ. de Math.*, t. X, 1894.
(2) Appell, *American Journal*, t. XII.

et t_1, les équations du mouvement des deux points seront déterminées.

Inversement, et c'est le cas le plus intéressant, on se donne les équations du mouvement d'un point matériel et l'on se demande si le mouvement est transformable en un autre réciproque.

Le problème ainsi posé est, en général, impossible, si aucune hypothèse n'est faite sur la nature de la force qui sollicite le point, ainsi que sur la direction de la force.

Je me propose, dans ce travail, de montrer que le mouvement est toujours transformable en un autre réciproque, si le temps n'entre pas explicitement dans l'expression de la force et si, de plus, la direction de la force fait, avec une droite fixe, un angle dont la tangente est le quotient de deux fonctions linéaires et homogènes des coordonnées du point matériel; en d'autres termes, si les projections de la force sur les axes de coordonnées, quand on se borne au mouvement plan, sont de la forme

$$X = (ax + by)u, \qquad Y = (a'x + b'y)u,$$

où a, b, a', b' sont des constantes et u une fonction absolument quelconque des coordonnées du point et des composantes de la vitesse. Le problème comprend, comme cas particulier, le cas des forces centrales; c'est surtout ce dernier cas qui fera l'objet du présent Mémoire.

1. Soient M et M_1 deux points matériels de même masse, que pour simplifier nous supposons égale à 1. Nous supposons de plus que le mouvement se fait dans un plan et que les variables indépendantes pour les deux mouvements sont les temps t et t_1.

Appelons x, y les coordonnées du premier point, x', y' leurs dérivées par rapport à t et X, Y les projections de la force sur les axes de coordonnées; enfin, x_1, y_1 les coordonnées du second point, x'_1, y'_1 les dérivées de x_1, y_1 par rapport à t_1 et X_1, Y_1 les composantes de la force.

D'après l'hypothèse faite, les deux mouvements seront réciproques, si, entre x, y, x_1, y_1, x', y', x'_1, y'_1, on a les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x', y'), & x = f(x'_1, y'_1), \\ y_1 = \varphi(x', y'), & y = \varphi(x'_1, y'_1). \end{cases}$$

Si les fonctions f et φ sont connues, et si l'on pose

$$(2) \qquad \frac{dt_1}{dt} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} u,$$

où $\frac{D|f, \varphi|}{D|x', y'|}$ est le déterminant fonctionnel de f et φ, les équations du mouvement des deux points seront connues. Nous aurons, en effet,

$$x'_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} X + \frac{\partial f}{\partial y'} Y\right) \frac{dt}{dt_1}, \qquad x' = \left(\frac{\partial f}{\partial x'_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial y'_1} Y_1\right) \frac{dt_1}{dt},$$
$$y'_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} Y\right) \frac{dt}{dt_1}; \qquad y' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y'_1} Y_1\right) \frac{dt_1}{dt},$$

d'où l'on déduira X, Y, X_1, Y_1, en ayant égard à (1) et (2).

2. Considérons le problème inverse, c'est-à-dire le problème où l'on se donne les équations du mouvement du point M, et examinons tout de suite le cas où la force est centrale. Les équations du mouvement seront alors

$$(1) \qquad \begin{cases} x'' = ux, \\ y'' = uy, \end{cases}$$

Nous supposons seulement que le temps t n'entre pas implicitement dans l'expression de la force.

Si ce mouvement est transformable en un autre réciproque, il existera deux fonctions f et φ, telles qu'en désignant par x_1, y_1 les coordonnées d'un point M_1, on ait

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x', y'), & x = f(x'_1, y'_1), \\ y_1 = \varphi(x', y'), & y = \varphi(x'_1, y'_1). \end{cases}$$

Il s'agit de trouver ces deux fonctions. Supposons le problème résolu et différentions les premières relations (2) par rapport à t_1; on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} x'_1 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x'} X + \dfrac{\partial f}{\partial y'} Y\right) \dfrac{dt}{dt_1}, \\ y'_1 = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x'} X + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y'} Y\right) \dfrac{dt}{dt_1}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} u,$$

et qu'on remplace X, Y, par ux, uy, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x'} x + \dfrac{\partial f}{dy'} y, \\ y'_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'} x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y'} y; \end{cases}$$

or, les fonctions f et φ étant supposées connues, x'_1, y'_1 seront d'après (2) des fonctions de x et y; en les substituant dans ces dernières relations, on aura évidemment une identité, ce qui exige que ces relations soient indépendantes de x' et y'; il faut donc que f et φ soient linéaires par rapport à x' et y', et les relations (2) seront de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = ax' + by' + c, \\ y_1 = a'x' + b'y' + c', \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= ax'_1 + by'_1 + c, \\ y &= a'x'_1 + b'y'_1 + c', \end{aligned}$$

où l'on pose

$$ab' - ba' = \mathrm{K}^2.$$

Si l'on substitue dans (4) les valeurs de x'_1, y'_1 déduites de (5), on trouve les relations suivantes entre les coefficients

$$b' - a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad a' = 0, \qquad c' = 0,$$

et comme on a

$$ab' - ba' = \mathrm{K}^2,$$

la transformation la plus générale sera

$$x_1 = \mathrm{K}x', \qquad y_1 = \mathrm{K}y'.$$

Donc, si un point matériel est sollicité par une force centrale dont l'expression ne contient pas explicitement le temps, le mouvement sera toujours transformé en un autre réciproque, par la transformation

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = \mathrm{K}x', \\ y_1 = \mathrm{K}y', \end{cases} \qquad \frac{dt_1}{dt} = \mathrm{K}^2 u,$$

les équations du mouvement étant

$$x'' = ux, \qquad y'' = uy.$$

3. Le point M_1, transformé du premier, sera aussi sollicité par une force centrale. En effet, si nous différentions les relations (6) par rapport à t_1, on aura

$$x'_1 = \mathrm{K} x'' \frac{dt}{dt_1}, \qquad y'_1 = \mathrm{K} y'' \frac{dt}{dt_1};$$

en ayant égard aux équations du mouvement et à la relation qui lie t à t_1, on aura

$$x'_1 = \frac{x}{\mathrm{K}}, \qquad y'_1 = \frac{y}{\mathrm{K}}; \tag{7}$$

une nouvelle différentiation nous donne

$$x''_1 = \frac{x_1}{\mathrm{K}^4 u}, \qquad y''_1 = \frac{y_1}{\mathrm{K}^4 u},$$

où u s'exprime à l'aide de (6) et (7) en fonction de x_1, y_1, x'_1, y'_1.

4. Remarquons que la trajectoire transformée, si on la rapporte aux mêmes axes que le premier mouvement, n'est autre chose qu'une courbe homothétique de la courbe hodographe correspondant au premier mouvement, la constante d'homothétie étant K, et le centre d'homothétie étant le centre des forces. Si, en particulier, $\mathrm{K} = 1$, la trajectoire transformée est la courbe hodographe du premier mouvement, et la transformation est, dans ce cas, corrélative, comme nous l'avons fait voir dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 27 octobre 1902, c'est-à-dire que *la trajectoire transformée est la polaire réciproque de la trajectoire du mouvement donné par rapport au cercle ayant le centre des forces pour centre et $\sqrt{\mathrm{C}}$ pour rayon, tournée d'un angle droit autour de ce centre dans un sens convenable,* la constante C étant celle des aires. On obtient une démonstration immédiate de cette proposition en partant du théorème des aires mis sous la forme $pv = \mathrm{C}$, si l'on remarque que l'extrémité du segment vitesse, porté sur la droite qui mesure p, a pour polaire, par rapport au cercle dont le centre est le centre des forces, la tangente à la trajectoire; donc, si l'on fait tourner cette polaire réciproque d'un angle droit autour du centre et dans un sens convenable, elle coïncidera avec la courbe hodographe correspon-

dante, c'est-à-dire, dans le cas présent, avec la trajectoire transformée.

5. Supposons toujours la constante $K = 1$. Il est intéressant de déterminer la relation à laquelle la force donnée et la force transformée doivent satisfaire. On a, en effet, en désignant par F la force donnée et par F_1 la force transformée,

$$FF_1 = rv, \tag{8}$$

que l'on obtient par différentiation des formules (6) et (7) où r est la distance du point M au centre des forces. Une autre remarque intéressante est qu'il y a échange entre les coordonnées polaires r et θ et la vitesse v et la direction α de cette vitesse; c'est-à-dire que, dans les deux mouvements transformés et en deux points correspondants, les coordonnées polaires de l'un des points représentent la vitesse et la direction de la vitesse de l'autre point, ce qui résulte des formules mêmes de transformation. Il s'ensuit alors qu'en désignant par p_1 la distance du centre des forces à la tangente à la courbe transformée, c'est-à-dire à l'hodographe, le théorème des aires pourra se mettre aussi sous la forme $p_1 r = C$, la constante C étant la même que dans le premier mouvement; il suffit pour s'en convaincre de remarquer que, si φ est l'angle de la vitesse avec le rayon vecteur, cet angle se conserve dans les deux transformations, et l'on déduit de la relation des aires

$$C = rv\sin\varphi = p_1 r = pv. \tag{9}$$

A l'aide des formules (8) et (9), nous allons établir les équations différentielles de la trajectoire et de la courbe hodographe. Remarquons que le rayon vecteur r est la diagonale d'un rectangle ayant pour côtés les distances de l'origine à la tangente et à la normale à la trajectoire; or ces deux distances sont données par p et $\frac{dp}{d\alpha}$; on aura donc, en ayant égard à (9),

$$r^2 = C^2\left[\frac{1}{v^2} + \left(\frac{d\frac{1}{v}}{d\alpha}\right)^2\right],$$

et, par analogie, pour la courbe hodographe

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

Différentions ces formules et remarquons que la différentielle de la force vive dans le premier mouvement est

$$v\,dv = F\,dr,$$

et dans le mouvement transformé est

$$r\,dr = F_1\,dv.$$

Puisque r est la vitesse et v le rayon vecteur, nous aurons la formule de Binet

$$F = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) \tag{10}$$

et la formule suivante

$$F_1 = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right);$$

d'où, en ayant égard à (8), on conclura finalement,

$$\frac{rv}{F} = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right). \tag{11}$$

6. Les formules (10) et (11) nous montrent que, si l'on sait déterminer la trajectoire ainsi que le mouvement lorsque la loi de la force est de la forme

$$F = rf(r, \theta, v),$$

on saura encore déterminer la trajectoire et le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$F = \frac{r}{f(v, \alpha, r)},$$

où, dans la fonction précédente f, nous avons fait l'échange entre r, θ et v. La remarque est évidente; on sait d'ailleurs que r s'exprime en fonction de $\frac{1}{v}$ et $\frac{d\frac{1}{v}}{dx}$, d'après le numéro précédent. Si, alors, nous supposons les deux mouvements rapportés aux mêmes axes et l'origine placée au centre des forces, le second mouvement nous donnera d'abord la courbe hodographe correspondant à cette dernière force; alors, pour obtenir la trajectoire, il faudra la faire tourner d'un angle droit autour de l'origine des axes, et prendre la polaire réciproque de cette courbe par rapport au cercle dont nous avons déjà parlé.

Considérons, comme exemple, les lois de forces trouvées par MM. Darboux et Halphen (¹) et qui font décrire à leurs points d'application des coniques:

$$\frac{\mu r}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\mu r}{(ax+by+c)^3}, \quad \frac{\mu r}{(ax+by)^3}.$$

On sait déterminer le mouvement ainsi que la trajectoire pour chacune de ces forces; il résulte alors de notre remarque qu'on saura encore déterminer le mouvement ainsi que la trajectoire, pour les lois de forces

$$\frac{1}{\mu} r(ax'^2+2bx'y'+cy'^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{\mu} r(ax'+by'+c)^3, \quad \frac{1}{\mu} r(ax'+by')^3,$$

où x', y' sont les dérivées de x et y, par rapport à t. Les trajectoires correspondantes seront des coniques, puisque les courbes hodographes sont aussi des coniques.

On peut se rendre compte de la nature des trajectoires décrites sous l'action de ces dernières lois de forces. Il suffit pour cela de remarquer que, quelles que soient les conditions initiales, les lois de MM. Darboux et Halphen donnent des coniques qui sont tangentes à chacune des deux droites $ax^2+2bxy+cy^2=0$, ou bien qui ont la même droite $ax+by+c=0$ pour droite polaire par rapport au centre des forces, ou enfin qui passent toutes par

(¹) *Comptes rendus*, t. LXXXIV.

le centre attractif. Or, ces courbes sont les courbes hodographes correspondant aux dernières lois de forces; donc, d'après des théorèmes bien connus sur les pôles et polaires, les coniques trajectoires auront un genre indépendant des conditions initiales et dépendant du signe de $b^2 - ac$, ou bien seront des coniques ayant toutes pour centre le point dont les coordonnées homogènes sont $x = a$, $y = b$, $z = c$, ou enfin seront des paraboles.

7. La remarque du numéro précédent nous a suggéré l'idée de chercher s'il n'existe pas, outre les lois de forces classiques qu'on rencontre dans tous les Traités de Mécanique, d'autres lois de forces pour lesquelles le mouvement s'obtienne par des quadratures. En effet, outre les lois qui ne dépendent que de la position du mobile, savoir $f(r)$ et la loi de Jacobi $\frac{f(\theta)}{r^2}$, on peut encore envisager les lois

$$\frac{1}{r^2} f\left(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta + \frac{\gamma}{r}\right), \tag{12}$$

$$r f(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) \tag{13}$$

où α, β et γ sont des constantes données et f une fonction arbitraire. Il est facile de voir que le mouvement peut s'obtenir par des quadratures.

La proposition est immédiate pour la première loi de force, qui rentre dans le type de Jacobi si $\gamma = 0$; pour $\gamma \gtrless 0$, si l'on fait dans la formule de Binet le changement de fonction

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma}{r_1} - \alpha \cos\theta - \beta \sin\theta,$$

on obtient l'équation différentielle de la trajectoire d'un mobile sollicité par une force centrale et ne dépendant que de la distance r_1 au centre; par conséquent le mouvement s'obtiendra par des quadratures.

La démonstration de la proposition pour la deuxième loi de force peut se faire à l'aide d'un théorème dû à M. Appell [1] et qui s'énonce ainsi :

---

(1) Appell, *loc. cit.*

Toute transformation homographique, faite sur les coordonnées d'un point sollicité par une force centrale qui ne dépend que de la position du mobile, transforme le mouvement en un autre où la force transformée est également centrale et ne dépend que des coordonnées du point transformé.

Nous allons effectuer la transformation particulière

$$x = ax_1 + by_1, \qquad y = a'x_1 + b'y_1, \qquad ab' - ba' = 1,$$

que nous supposons seulement n'être pas équivalente à un changement des axes de coordonnées; enfin, la variable indépendante dans les deux mouvements est toujours le temps t. On trouve que la force transformée est du même type que la précédente, savoir

$$r_1 f(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2),$$

mais la transformation contient encore trois constantes arbitraires; on pourra alors disposer de ces constantes de manière à annuler le coefficient β_1 et à rendre égaux à 1 les coefficients α_1 et γ_1; alors la force transformée ne dépendra plus que de la distance.

Remarquons en passant qu'à l'égard des deux forces (12) et (13) on peut se proposer le problème suivant :

Sachant qu'un point matériel est sollicité par une force centrale du type (12) *ou du type* (13), *et que la trajectoire est algébrique, trouver la fonction f.*

On trouvera que les seules courbes algébriques sont des coniques et que les deux types (12) et (13) se ramènent aux lois de MM. Darboux et Halphen. En effet, le mouvement se transforme par la transformation précédente en un autre où la trajectoire est encore algébrique; de même, si l'on emploie la transformation du même numéro en posant

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma}{r_1} - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta,$$

il est évident que la trajectoire transformée est encore algébrique; or, pour les deux transformations, les forces se transforment en d'autres qui ne dépendent que de la distance, et l'on sera ainsi amené au problème énoncé et résolu par M. Kœnigs ([1]), qui a trouvé que les seules lois de forces sont μr et $\frac{\mu}{r^2}$.

Nous voyons en résumé que le mouvement peut toujours s'obtenir par des quadratures, lorsque les forces sont de l'une des formes

$$f(r),\quad \frac{f(\theta)}{r^2},\quad \frac{1}{r^2}f\left(a\cos\theta + b\sin\theta + \frac{c}{r}\right),\quad rf(ax^2 + 2bxy + cy^2).$$

Il résulte alors de la remarque du n° 6, que le mouvement peut encore se ramener à des quadratures si les lois de forces sont de l'une des formes

$$rf(v),\quad rv^3f(\alpha),\quad rv^3f\left(a\cos\alpha + b\sin\alpha + \frac{c}{v}\right),\quad rf(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2),$$

où α est l'angle de la vitesse avec l'axe polaire.

8. Les types de lois de forces que nous avons considérés jusqu'à présent et pour lesquels le mouvement s'obtenait par des quadratures étaient représentés en général par des fonctions dépendant de r, θ et v et par l'échange de v, α et r. Il est facile de remarquer qu'il y aura encore réductibilité si, l'angle de la direction de la vitesse avec le rayon vecteur étant désigné par φ, la loi de la force rentre dans le type

$$f(r, v, \varphi).$$

En effet, il suffit de partir de l'équation différentielle de la force vive et du théorème des aires mis sous la forme $rv\sin\varphi = C$, pour ramener le problème à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et à des quadratures; on remarquera alors que si la loi de la force est de la forme

$$\frac{f(\varphi)}{r^3},$$

le problème se ramène à des quadratures. Considérons en particulier la loi

$$\frac{\cot\varphi}{r^3},$$

([1]) Kœnigs, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII.

qui rentre dans le type précédent; on remarque que si à cette expression on ajoute un terme de la forme $\frac{f(\theta)}{r^2}$ et que l'on considère la loi

$$\frac{K\cot\varphi}{r^3}+\frac{f(\theta)}{r^2},$$

où K est une constante arbitraire et f une fonction arbitraire, le mouvement s'obtiendra par des quadratures. En effet, on a

$$\frac{1}{r}\cot\varphi=-\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta},$$

et la formule de Binet nous donne

$$\frac{-C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right)=-\frac{K}{r^2}\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}+\frac{f(\theta)}{r^2},$$

d'où

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}-\frac{K}{C^2}\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}+\frac{1}{r}=-\frac{K}{C^2}f(\theta),$$

équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre; on aura donc la trajectoire par des quadratures, puis le temps par une nouvelle quadrature. De l'expression précédente de la force, en s'appuyant sur la remarque du n° 6 et en ayant égard à la formule (11) du n° 5, on déduit une autre loi

$$\frac{rv^4}{K\cot\varphi+vf(\alpha)},$$

pour laquelle le mouvement s'obtiendra encore par des quadratures.

9. Nous avons montré que le mouvement est toujours transformable en un autre réciproque, si la force est centrale. Il nous reste à montrer qu'en général le mouvement est transformable en un autre réciproque, si les équations du mouvement sont de la forme

$$(1)\qquad\begin{cases} x''=(ax+by)u,\\ y''=(a'x+b'y)u,\end{cases}$$

où u est une fonction arbitraire de x, y, x', y'. On trouve, en suivant la même marche qu'au n° 2, que les deux fonctions f et φ, qui permettent d'obtenir la transformation, doivent être linéaires; de plus, le déterminant $ab' - ba'$ étant différent de zéro, les deux fonctions f et φ seront homogènes; enfin, pour que le problème soit possible, il faut en outre que le déterminant $ab' - ba'$ soit égal à 1. Si cette condition est remplie, la transformation la plus générale sera, à un facteur constant près, qu'on peut supposer égal à 1,

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = (b'+1)x' - by' \\ y_1 = -a'x' + (a+1)y' \end{array}\right. \qquad \frac{dt_1}{dt} = \Delta u,$$

où Δ est le déterminant de cette transformation, qui doit être supposé différent de zéro. La condition $ab' - ba' = 1$ semble restreindre la généralité du type (1); mais il est facile de voir qu'il n'en est rien et de s'affranchir de cette condition; il suffit, si cette condition n'est pas remplie, de faire au préalable sur les équations (1) un changement convenable, et le plus simple est d effectuer un changement linéaire sur la variable indépendante t; les équations après ce changement seront du même type; on pourra alors profiter de la constante introduite pour que le déterminant correspondant soit égal à 1.

10. Dans un travail qui paraîtra prochainement (*Essais sur la réductibilité des équations du mouvement d'un point matériel dans un plan*), nous reviendrons en particulier sur le type (1). Nous terminerons ce travail par une dernière remarque. Le type (1) outre les forces centrales comprend aussi, comme il est évident, le cas d'une force qui fait avec le rayon vecteur un angle constant. L'analogie est complète entre les deux cas; la seule différence est que la transformation n'est pas corrélative dans le dernier cas. Afin de montrer l'analogie entre les deux cas, nous allons examiner le cas d'une force qui fait un angle constant avec le rayon vecteur, et, pour simplifier, nous supposerons que cet angle est droit; toutes les propriétés que nous déterminerons dans ce cas subsisteront pour toutes les valeurs de l'angle. Nous remarquons que pour obtenir les équations du mouvement, il suffit dans (1) de faire

$$a = 0, \qquad b = -1, \qquad a' = 1, \qquad b' = 0,$$

ce qui nous donne

$$(3) \qquad \begin{cases} x'' = -uy, \\ y'' = ux, \end{cases}$$

et d'après (2)

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = x' + y', \\ y_1 = -x' + y', \end{cases} \qquad \frac{dt_1}{dt} = 2u.$$

Différentiant les relations (4) par rapport à t_1 et ayant égard à (3), on trouve

$$x'_1 = (-y + x)\, u \frac{dt}{dt_1} = \frac{-y + x}{2},$$

$$y'_1 = (y + x)\, u \quad \frac{dt}{dt_1} = \frac{y + x}{2},$$

d'où

$$(5) \qquad \begin{cases} x = x'_1 + y'_1, \\ y = -x'_1 + y'_1. \end{cases}$$

Différentiant (5) par rapport à t, afin d'obtenir les composantes de la force transformée, on aura

$$x' = (X_1 + Y_1) \frac{dt_1}{dt},$$

$$y' = (-X_1 + Y_1) \frac{dt_1}{dt},$$

d'où

$$(6) \qquad X_1 = \frac{-y_1}{2u}, \qquad Y_1 = \frac{x_1}{2u}.$$

Les relations (4) nous montrent que la trajectoire transformée est la courbe hodographe correspondant au mouvement donné et rapportée à un système d'axes, qui sont les bissectrices des axes auxquels le mouvement est rapporté, l'origine des axes étant la même. Les relations (5) nous montrent que la vitesse en un point de la trajectoire transformée est le rayon vecteur correspondant de la trajectoire du mouvement donné ; c'est-à-dire qu'il y a échange entre r et v ; enfin si F et F_1 sont les deux forces dans les deux mouvements, on aura la relation

$$F F_1 = \frac{rv}{2}.$$

Il s'ensuit que, si l'on sait déterminer le mouvement pour une certaine loi de force, par exemple une loi de force de la forme

$$rf(x, y),$$

on saura encore déterminer le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$\frac{r}{f(x'+y',\ y'-x')}.$$

Remarquons enfin que l'angle que la direction de la force fait avec le rayon vecteur se conserve par la transformation; en effet, d'après (6), la force transformée a une direction perpendiculaire au rayon vecteur v de la courbe transformée.

11. Dans ce travail, nous n'avons considéré que le cas où la courbe hodographe est curviligne; on peut voir sans peine que, si la courbe hodographe est rectiligne, cas où le mouvement lui-même est rectiligne, ou bien la direction de la force est constante, le mouvement est encore transformable en un autre réciproque et cela d'une infinité de manières; ainsi, dans le cas d'un mouvement rectiligne, on peut se donner arbitrairement la fonction qui caractérise la réciprocité, puisqu'il n'y aura qu'une seule fonction et déduire de l'équation du mouvement la relation qui lie les temps t et t_1. On pourra aussi se proposer, en ayant égard à la relation qui lie la force donnée et la force transformée, le problème suivant :

Si dans un mouvement rectiligne la loi de la force ne dépend que de la distance et de la vitesse, le mouvement est tautochrone; on demande si le mouvement transformé le sera aussi.