BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Sur les courbes gauches de quatrième ordre et de quatrième classe

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 18-25
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__18_1>

SUR LES COURBES GAUCHES DE 4^e ORDRE ET DE 4^e CLASSE;

Par M. Ch. Bioche.

I. — Détermination des équations des courbes en question.

1. Si l'on projette une courbe gauche d'ordre n et de classe k sur un plan, le centre de projection étant un point O de la courbe ne présentant aucune singularité, on obtient une courbe d'ordre $n-1$. Celle-ci admet pour points d'inflexion :

1° Les projections des points de contact des $k-3$ plans osculateurs qu'on peut mener de O à la courbe;
2° Les projections des points d'*inflexion linéaire,* c'est-à-dire des points où la tangente a trois points confondus avec la courbe.

Si $n=4$, la courbe est une biquadratique ou une quartique, intersection partielle d'une quadrique et d'une surface de 3^e ordre. Dans ce dernier cas, la courbe admet des sécantes triples et elle est unicursale, un plan passant par une sécante triple ne coupant plus la courbe qu'en un point. Si la courbe est une biquadratique, elle ne peut admettre de point d'inflexion linéaire; sa projection a donc $k-3$ points d'inflexion; si $k=4$, cette projection est une cubique à point de rebroussement, elle est donc unicursale et il en est de même de la courbe de l'espace.

Les coordonnées des points d'une courbe gauche de 4^e ordre et de 4^e classe étant exprimables rationnellement en fonction d'une variable λ, l'équation qui donne les points d'intersection de cette courbe avec un plan contient un paramètre de moins que n'en comporte l'équation générale du 4^e degré; il en résulte qu'il existe entre les coefficients de l'équation une relation linéaire indépendante du plan considéré. On peut écrire cette relation

$$(1) \qquad \alpha + \beta S_1 + \gamma S_2 + \delta S_3 + \varepsilon S_4 = 0,$$

S_p représentant la somme des produits p à p des racines.

Si le plan devient osculateur, soit λ la valeur de la variable correspondant au point de contact et λ' la valeur correspondant au point où le plan coupe la courbe, la relation précédente peut s'écrire

$$(2) \qquad \alpha + \beta(3\lambda + \lambda') + 3\gamma\lambda(\lambda + \lambda') + \delta\lambda^2(\lambda + 3\lambda') + \varepsilon\lambda^3\lambda' = 0.$$

2. Pour que la courbe considérée soit de 4^e classe, il faut et il suffit que la relation précédente se réduise à une relation homographique entre λ et λ'. Or on peut, par une transformation homographique à coefficients réels ou imaginaires, effectuée sur la variable λ, ramener la relation homographique qui doit exister entre λ et λ' à la forme

$$(3) \qquad \lambda' = h\lambda.$$

La relation (2) devant se réduire à la relation (3), on doit obtenir une identité si l'on remplace dans la première λ' par $h\lambda$; on voit facilement qu'on ne peut obtenir que les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0, &\qquad h = -3, \\ \alpha = \beta = \delta = \varepsilon = 0, &\qquad h = -1, \\ \alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 0, &\qquad h = -\tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

La relation homographique entre λ et λ' doit donc être l'une des suivantes :

$$\lambda' + 3\lambda = 0, \qquad \lambda' + \lambda = 0, \qquad 3\lambda' + \lambda = 0$$

et la relation (1) se réduit alors, suivant les cas, à l'une des relations

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0.$$

On voit immédiatement que le premier et le troisième cas reviennent l'un à l'autre si l'on change λ en $\frac{1}{\lambda}$; on n'a donc à considérer que les deux premiers cas. Ceux-ci sont d'ailleurs essentiellement distincts, puisque, dans le second cas, la relation entre λ et λ' est involutive, tandis qu'elle ne l'est pas dans le premier cas.

3. Dans le premier cas, l'équation en λ qui donne les points d'intersection de la courbe et d'un plan, n'ayant jamais de terme du 3ᵉ degré, les coordonnées d'un point de la courbe ont des expressions de la forme

$$X_i = A_i\lambda^4 + B_i\lambda^2 + C_i\lambda + D_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Des quatre équations on déduit que λ^4, λ^2, λ, 1 sont proportionnels à des fonctions linéaires des coordonnées, par suite que les courbes en question sont des transformées homographiques de

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}.$$

On voit de même que les courbes correspondant au second cas sont des transformées homographiques de

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}\ ^{(1)}.$$

II. — Propriétés des deux sortes de courbes de 4ᵉ ordre et de 4ᵉ classe.

4. On voit immédiatement que la courbe

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}$$

---

(1) Bien que cette Note soit consacrée à des propriétés projectives, je signalerai en passant une propriété métrique curieuse d'une des courbes en question.

Si l'on pose

$$\lambda = e^{i\theta},$$
$$X = t + iz, \qquad Y = x + iy, \qquad Z = x - iy, \qquad T = t - iz,$$

on obtient

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\sin 2\theta} = \frac{t}{\cos 2\theta}.$$

Si l'on rejette le plan $t = 0$ à l'infini, on obtient une courbe ayant pour axes de symétrie Ox, Oy, Oz et n'ayant ni centre ni plan de symétrie.

est une biquadratique, tandis que la courbe

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}$$

est située sur une seule quadrique, non développable,

$$YZ - XT = 0$$

dont un système de génératrices, celles qui rencontrent les droites $X = 0$, $Z = 0$ et $Y = 0$, $T = 0$, est formé de sécantes triples de la courbe.

Il faut 8 équations de condition pour exprimer qu'une quadrique contient la première courbe et 9 pour exprimer qu'une quadrique contient la seconde courbe. Plus généralement les équations de condition, pour qu'une surface d'ordre m contienne l'une des courbes en question, sont au nombre de $4m$ dans le premier cas, et de $4m + 1$ dans le second.

En effet, soit

$$F(X, Y, Z, T) = 0$$

l'équation générale de degré m; on a à écrire que l'une des expressions

$$F(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1) \quad \text{ou} \quad F(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1)$$

est identiquement nulle. Or, la première expression est un polynome en λ où manque le terme d'ordre $4m - 1$, tandis que la seconde est un polynome complet de degré $4m$.

5. La biquadratique a un point de rebroussement

$$Y = Z = T = 0,$$

la tangente en ce point étant

$$Z = 0, \qquad T = 0.$$

La projection de la courbe, faite d'un point quelconque de celle-ci, est une cubique à rebroussement dont l'unique tangente d'inflexion est la trace du plan osculateur mené par le centre de projection.

La quartique à sécantes triples a deux points d'inflexion linéaire,

$$X = Y = Z = 0, \qquad Y = Z = T = 0.$$

les tangentes étant

$$X = 0, \qquad Y = 0 \qquad \text{et} \qquad Z = 0, \qquad T = 0.$$

La projection faite d'un point de la courbe est, en général, une cubique à point double dont les tangentes d'inflexion sont : la trace du plan osculateur mené du centre de projection, et les projections des tangentes aux points d'inflexion linéaire.

Si la projection se fait d'un des points d'inflexion linéaire, on obtient une cubique à rebroussement; l'unique tangente d'inflexion est la projection de la tangente au second point d'inflexion linéaire.

6. Il est facile de reconnaître que la développable formée par les tangentes d'une biquadratique de 4^e classe est du 5^e ordre; tandis que la développable des tangentes à l'autre quartique de 4^e classe est du 6^e ordre.

Les cordes qui joignent le point de contact d'un plan osculateur à cette dernière courbe au point d'intersection engendrent une surface du 3^e ordre à directrices rectilignes distinctes

$$XZ^2 - Y^2T = 0;$$

les courbes asymptotiques sont des courbes de même nature que la quartique considérée. Cette propriété est bien connue.

Les cordes de la biquadratique qui joignent le point de contact d'un plan osculateur au point d'intersection engendrent une surface du 5^e ordre. Il est facile d'exprimer les coordonnées des points de cette surface au moyen de λ et d'une autre variable; si la biquadratique est donnée par

$$X = \lambda^4, \qquad Y = \lambda^2, \qquad Z = \lambda,$$

la surface en question se représente par

$$X = \lambda^4 + 20\lambda^3\mu, \qquad Y = \lambda^2 + 2\lambda\mu, \qquad Z = \lambda - \mu,$$

ou, si l'on élimine λ et μ entre ces équations, par

$$8Z^2(2XZ^2 - 5Y^3 + XY) + (7Y^2 - 3X)^2 = 0.$$

On constate facilement que la ligne double de la surface, qui doit être du 6^e ordre, puisque les sections planes sont des courbes unicursales du 5e ordre, se compose de la biquadratique et de la conique

$$Z = 0, \qquad 7Y^2 - 3X = 0,$$

conique qu'on obtient d'ailleurs dans le premier mode de représentation en faisant $\mu = \lambda$.

La surface contient une autre conique contenue dans le plan $X = 0$.

Les lignes asymptotiques sont données par les équations

$$X = \lambda^4 + \frac{40\lambda^4}{A\lambda^4 - 1}, \qquad Y = \lambda^2 + \frac{4\lambda^2}{A\lambda^4 - 1}, \qquad Z = \lambda - \frac{2\lambda}{A\lambda^4 - 1},$$

A étant une constante. Elles sont en général du 8e ordre; pour A infini, on retrouve la biquadratique et pour $A = 0$ une courbe de même nature.

7. Si sur une biquadratique de 4e classe on prend un point M_0, si l'on mène le plan osculateur dont le point de contact n'est pas M_0, on obtient un point M_1; en continuant cette construction on obtient des points M_2, M_3, ..., M_n, ... en nombre infini. Le $n^{\text{ième}}$ point tend vers celui pour lequel le plan osculateur coupe la courbe en 4 points confondus, qui correspond à $\lambda = 0$.

Si, au contraire, l'on mène le plan osculateur en M_0 qui coupe la courbe en M'_1, on obtient des points M'_2, ..., M'_n en nombre infini, le $n^{\text{ième}}$ point tendant vers le point de rebroussement, qui correspond à $\lambda = \infty$.

On a ainsi une propriété analogue à une propriété des courbes planes du 3e ordre et de 3e classe étudiée par Clebsch (1).

Pour l'autre quartique de 4e classe le point de contact et le point d'intersection d'un plan osculateur se correspondant involutivement, ces points se déduisent alternativement l'un de l'autre.

III. — Remarques relatives a des théorèmes de M. Halphen.

8. Dans un Mémoire inséré au Tome III des *Acta mathematica,* M. Halphen déduit de l'étude des équations différentielles

(1) *Leçons de Géométrie,* trad. Benoist, t. II, p. 345.

du 4^e ordre, sans second membre, diverses conséquences géométriques. Il donne en particulier des propriétés des courbes *anharmoniques,* c'est-à-dire des courbes pouvant se transformer homographiquement en elles-mêmes; les courbes anharmoniques algébriques peuvent se représenter par les équations

$$\frac{X}{\lambda^\alpha} = \frac{Y}{\lambda^\beta} = \frac{Z}{\lambda^\gamma} = \frac{T}{1},$$

α, β, γ étant des entiers positifs, premiers entre eux dans leur ensemble.

M. Halphen démontre que :

1° Si une courbe appartient par ses tangentes à un complexe linéaire et est anharmonique, elle est tracée sur une surface du second degré;

2° Si une courbe appartient par ses tangentes à un complexe linéaire et est tracée sur une surface du second degré, elle est anharmonique.

La condition pour qu'une courbe anharmonique appartienne par ses tangentes à un complexe linéaire s'exprime, si l'on suppose $\alpha > \beta > \gamma$, par

$$\alpha = \beta + \gamma;$$

on voit alors que la courbe est située sur la quadrique, non développable,

$$YZ - XT = 0.$$

Les courbes que j'ai étudiées sont anharmoniques; la biquadratique n'appartient pas à un complexe linéaire, l'autre quartique appartient à un complexe linéaire.

9. On peut se proposer de chercher dans quels cas une courbe anharmonique algébrique tracée sur une quadrique n'appartient pas à un complexe linéaire.

Il suffit de former l'équation qui donne les λ des points d'intersection d'une courbe anharmonique avec une quadrique, et de chercher dans quel cas cette équation se réduit à une identité. En supposant, pour fixer les idées, $\alpha > \beta > \gamma$, ce qu'on peut toujours faire, on obtient les cas suivants :

$$\begin{array}{rcl}
\alpha = \beta + \gamma & \text{quadrique:} & YZ - XT = 0, \\
\alpha = 2\beta & \text{»} & XT - Y^2 = 0, \\
\alpha + \gamma = 2\beta & \text{»} & XZ - Y^2 = 0, \\
\alpha = 2\gamma & \text{»} & XT - Z^2 = 0, \\
\beta = 2\gamma & \text{»} & YT - Z^2 = 0.
\end{array}$$

On voit que, dans les quatre derniers cas, la quadrique est développable et qu'elle ne l'est pas dans le premier; et l'on peut conclure de ce qui précède que :

1° Si la courbe est sur une seule quadrique, *non développable,* elle appartient à un complexe linéaire;

2° Si la courbe est une sèule quadrique *développable,* elle n'appartient pas à un complexe linéaire;

Enfin, si la courbe est sur deux quadriques, ce ne peut être qu'une cubique gauche ou une biquadratique.

On sait qu'une cubique gauche appartient à un complexe linéaire; d'ailleurs pour la cubique gauche on aurait

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 1,$$

et l'équation

$$\alpha = \beta + \gamma$$

exprime la condition en question.

Pour une biquadratique on aurait $\alpha = 4$ et l'on ne pourrait prendre que

$$\beta = 3, \quad \gamma = 2 \qquad \text{ou} \qquad \beta = 2, \quad \gamma = 1,$$

ce qui donne les courbes

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda^2} = \frac{T}{1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}.$$

Or, si l'on change λ en $\frac{1}{\lambda}$, ces équations se déduisent les unes des autres en permutant X et T d'une part, Y et Z d'autre part.

On déduit de cette discussion que *la biquadratique de 4e classe est la seule courbe anharmonique algébrique par laquelle on puisse faire passer une quadrique, non développable, sans que les tangentes de la courbe appartiennent à un complexe linéaire.*