BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à $n-1$ dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 172-190
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__172_0>

SUR LES DROITES FONDAMENTALES DANS LES COLLINÉATIONS DE L'ESPACE A $n-1$ DIMENSIONS;

Par M. Léon Autonne.

Si l'on considère $2n$ variables x_i et u_i, $\{i=1, 2, \ldots, n\}$ comme les coordonnées homogènes d'un point x, ou d'un plan u, dans un espace à $n-1$ dimensions, la substitution linéaire n-aire, $\{j=1, 2, \ldots, n\}$

$$p=\left| x_i \qquad \sum_j p_{ij}x_j \right| = | x_i \qquad p[x_i] |,$$

de déterminant $|p| \neq 0$, est une collinéation. Le point $p[x]$, ayant les $p[x_i]$ pour coordonnées, est le *point-image par la collinéation p* du point x.

On a, comme on sait, un point *fondamental* x, si x et $p[x]$ coïncident. Une définition analogue donne les plans fondamentaux.

Mettant à profit quelques indications données, d'après Weierstrass, par M. Frobenius, dans son Mémoire *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV), j'ai pu ([1]) mettre p sous une expression *typique* simple, grâce à laquelle les points ou plans fondamentaux s'obtiennent par une règle générale facile.

Toutes ces théories peuvent recevoir de l'extension.

Appliquant au cas de $n-1$ dimensions la terminologie de l'espace ordinaire, $n=4$, on dira qu'une *droite* d_m, de *degré* m et de *classe* $n-m$, est l'intersection de $n-m$ plans. d_m est aussi le lieu des points x, qui dépendent linéairement de m points donnés b_g, $\{g=1, 2, \ldots, m\}$, $m<n$,

$$x_i=\sum_g t_g b_{gi} \qquad t_g = \text{param. variable.}$$

Un point est une d_1. Un plan est une d_{n-1}.

([1]) *Sur le connexe linéaire dans l'espace à $n-1$ dimensions* (*Comptes rendus*, 9 mai 1904). — *Sur les formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1905, Iʳᵉ Partie).

Une droite d_m sera *fondamentale* pour la collinéation p, si d_m est invariante par p, autrement dit : *d_m est le lieu, à la fois, du point x et du point $p[x]$*.

Le travail ci-après résout complètement le problème relatif à la construction des droites fondamentales. On fait encore usage de la forme typique de p.

La règle est analogue à celle qui a été donnée déjà pour les points et plans fondamentaux, mais, bien entendu, un peu plus compliquée.

1. Dans un espace à $n-1$ dimensions prenons

$$(j = 1, 2, \ldots, n),$$

un point x par ses n coordonnées homogènes x_j, coordonnées *ponctuelles;* | un plan u par ses n coordonnées homogènes u_j, coordonnées *planaires*.

m points b_g $(m \leqq n)$ sont dits *linéairement distincts* ou *indépendants*, si l'on ne peut satisfaire aux relations

$$(0) \qquad \sum_g t_g b_{gj} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} g = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{Bmatrix}$$

qu'en égalant tous les t_g à zéro, les b_{gj} étant les coordonnées du point b_g. Il faut et il suffit évidemment pour cela que le tableau à m lignes et à n colonnes

$$b = |b_{gj}| = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{g1} & \ldots & b_{gj} & \ldots & b_{gn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

ait son rang maximum m.

Si au contraire on peut satisfaire aux relations (0) sans annuler tous les t_g, il y aura, entre les m points b_g, une *dépendance linéaire*.

2. Considérons m points b_g linéairement distincts et m para-

mètres variables t_g. Le lieu du point x tel que

$$x_j = \sum_g t_g b_{gj}$$

sera, *par définition*, une *droite* d_m, de *degré* m.

On peut dire aussi que le point x est sur l'intersection de $n - m$ plans et que la droite d_m a pour degré m et pour *classe* le nombre $n - m$.

Un point est une droite d_1 de degré 1 et de classe $n - 1$. Un plan est une droite d_{n-1} de degré $n - 1$ et de classe 1.

3. Désignons, ce qui ne peut faire ambiguïté, par une même lettre p :

I. Une matrice n-aire

$$p = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad \{i, j = 1, 2, \dots, n\};$$

II. Une forme bilinéaire

$$p(x;\, u) = \sum_{ij} p_{ij} u_i x_j.$$

III. Une collinéation ou substitution linéaire

$$p = \left| x_i \qquad \sum_j p_{ij} x_j \right| = | x_i \qquad p[x_i] |;$$

J'écrirai plus simplement

$$p = | x \qquad p[x] |$$

et je dirai que le point $p[x]$ ayant pour coordonnées les

$$p[x_i] = \sum_j p_{ij} x_j,$$

est le *transformé* ou l'*image* par p du point x.

L'équation symbolique

$$p[x] = 0$$

sera, par définition, équivalente aux n équations

$$p[x_i] = \sum_j p_{ij} x_j = 0.$$

4. Prenons une substitution p de déterminant $|p| \neq 0$. On sait qu'un point x, ou un plan u, est *fondamental* si son image par p se confond avec lui-même.

$$p[x] = \rho x \qquad \text{ou} \qquad p[u] = \rho u.$$

Le point fondamental x est invariant par rapport à p. En vertu de la relation

$$\rho x - p[x] = 0,$$

on voit qu'il y a dépendance linéaire (1) entre les *deux* points x et $p[x]$.

Je me propose de généraliser cette notion de point fondamental.

5. Une droite d_m de degré m sera *fondamentale* pour la substitution linéaire n-aire p, si d_m est invariante vis-à-vis de p. Autrement dit p ne fait que permuter entre eux les différents points de d_m.

La construction des fondamentales d_m est le principal objet du présent travail.

6. Considérons une d_m. Elle est définie par m quelconques de ses points, pourvu qu'ils soient linéairement indépendants. Réciproquement une d_m ne peut contenir plus de m points linéairement indépendants ou distincts.

Prenons maintenant la suite indéfinie de points

$$(\Xi) \qquad p^\sigma[x], \qquad \sigma = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty.$$

Je montrerai plus loin (9) qu'ils sont tous situés sur une droite $\overline{x}$, de degré *fini* h.

Il y aura entre différents points de la suite des dépendances linéaires, de façon que la suite contient seulement h points linéairement distincts.

Une droite $\overline{x}$ est évidemment fondamentale.

7. Soit maintenant une fondamentale d_m quelconque. Si d_m contient le point x, elle contient évidemment toute la droite $\overline{x}$, qui compte pour h points linéairement distincts. d_m est évidemment une collection de droites $\overline{x}$ et l'on a

$$m = \sum h.$$

Notre problème revient donc à la construction des droites $\overline{x}$, de degré h.

8. Prenons un polynome

$$f(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots, \qquad c_0,\ c_1,\ \ldots = \text{const.}$$

Frobenius (p. 9 du Mémoire cité) appelle l'expression

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots,$$

fonction entière de la matrice n-aire p et désigne cette expression par $f(p)$.

Puisque dans la suite des points

$$(\Xi) \qquad\qquad p^\sigma[x]$$

il n'y a que h points linéairement distincts (6), c'est qu'entre différents points de la suite Ξ existent des relations telles que celle-ci

$$(1) \qquad\qquad C_0 p^\alpha[x] + C_1 p^{\alpha+\alpha_1}[x] + \ldots = 0,$$

où les C sont des constantes, tandis que les α sont des entiers *positifs,* puisque l'on peut toujours multiplier le premier membre de (1) par une puissance de p.

Désignons maintenant par $f(r)$ le polynome

$$f(r) = C_0 r^\alpha + C_1 r^{\alpha+\alpha_1} + \ldots,$$

car nous verrons plus loin que la relation (1) ne contient qu'un nombre fini de termes (9), et posons

$$P = f(p).$$

La condition (1) s'écrit

$$(2) \qquad\qquad P[x] = 0$$

et entraîne diverses sujétions entre :

les coordonnées du point x;
les coefficients de polynome $f(r)$;
la substitution n-aire p.

Je me propose d'étudier ces sujétions.

9. On sait (Frobenius, p. 26) que toute n-aire p satisfait à une *équation de degré minimum*

$$\psi(p) = 0,$$

où le polynome $\psi(r)$, de degré $n_0 \leqq n$, a l'expression construite plus loin (21). Posons

$$Q = \psi(p);$$

la n-aire Q sera identiquement zéro et, pour *tout* point x, on a

$$Q[x] = e_0 x + e_1 p[x] + \ldots + e_{n_0} p^{n_0}[x] = 0,$$
$$\psi(r) = e_0 + e_1 r + \ldots + e_{n_0} r^{n_0} \qquad (e_{n_0} \neq 0).$$

De plus, pour tout entier σ non négatif, on a

$$p^\sigma = \sum_\tau p^\tau L_{\sigma\tau},$$
$$\tau = 0, 1, \ldots, n_0 - 1; \qquad L_{\sigma\tau} = \text{const.}$$

Tout point $p^\sigma[x]$, $\sigma \geqq 0$, dépend donc linéairement des n_0 points

(1) $$x, \quad p[x], \quad \ldots, \quad p^{n_0-1}[x].$$

Passons aux points $p^{-\sigma}[x]$, $\sigma > 0$, c'est-à-dire aux points

$$\varpi^\sigma[x] \qquad \text{où} \qquad \varpi = p^{-1}.$$

Dans le polynome $\psi(r)$ on a $e_0 \neq 0$, car, autrement, on pourrait diviser $\psi(p)$ par p, car $|p| \neq 0$, et l'équation $\psi(p) = 0$ aurait son degré inférieur à n_0, ce que nous excluons.

Posons

$$\psi(r) = e_0 + r\pi(r), \qquad \pi(r) = e_1 + e_2 r + \ldots.$$

On a

$$0 = \psi(p) = e_0 E + p\pi(p),$$

E étant la n-aire unité.

Enfin

$$\varpi = p^{-1} = -\frac{1}{e_0}\pi(p).$$

Les points $\varpi^\sigma[x]$ dépendent encore linéairement des n_0 points (1).

Le présent raisonnement montre que :

I. La droite $\overline{x}$ du n° 6 a un degré fini, égal ou inférieur à n_0;

II. Le premier membre de la relation (1) du n° 8 contient un nombre fini de termes.

Je suis maintenant à même d'étudier les conditions (8)

$$P[x] = 0, \qquad P = f(p),$$

$f(r)$ étant un polynome.

10. Désignons par des minuscules grecques des polynomes

$$\alpha(r), \quad \beta(r), \quad \gamma(r), \quad \ldots$$

et par des majuscules latines

$$A = \alpha(p), \qquad B = \beta(p), \qquad C = \gamma(p), \qquad \ldots$$

les n-aires correspondantes, fonctions entières de la n-aire p.

A, B, ... sont échangeables entre elles et tous les calculs de multiplication et d'addition se font suivant les règles de l'Algèbre élémentaire, comme les calculs analogues sur les polynomes $\alpha(r)$, $\beta(r)$, ...

Lemme I. — *Si*

$$\gamma(r) = \alpha(r)\beta(r) \qquad et \qquad B[x] = 0,$$

on a aussi

$$C[x] = 0.$$

En effet

$$C = AB, \qquad C[x] = AB[x] = 0.$$

Ainsi *la condition*

$$C[x] = 0$$

est une conséquence *de la relation*

$$B[x] = 0.$$

Supposons que $\beta(r)$ a un degré supérieur ou égal à celui de $\alpha(r)$. Divisons β par α; nommons $\varpi(r)$ le quotient et $\rho(r)$ le reste,

$$\beta(r) = \varpi(r)\alpha(r) + \rho(r).$$

Lemme II. — *Les deux relations*

$$A[x] = 0 \qquad \textit{et} \qquad B[x] = 0,$$

si elles coexistent, ont pour conséquence la relation

$$R[x] = 0.$$

On a, en effet,

$$B = PA + R \qquad \text{et} \qquad 0 = B[x] = (PA + R)[x] = PA[x] + R[x] = R[x],$$

car

$$PA[x] = 0 \qquad (\text{lemme I}).$$

On peut recommencer le raisonnement sur les deux relations $A[x] = 0$ et $R[x]$ et sur les deux polynomes $\alpha(r)$ et $\rho(r)$. On continuera jusqu'à ce qu'on parvienne au plus grand commun diviseur $\delta(r)$ de $\alpha(r)$ et $\beta(r)$.

Corollaire. — *Les deux relations* $A[x] = 0$ *et* $B[x] = 0$, *si elles coexistent, sont conséquences de la relation unique* $D[x] = 0$.

En effet, on vient de voir (lemme II) que $D[x] = 0$. Or $A = LD$ et $B = MD$, si $\alpha = \lambda\delta$, $\beta = \mu\delta$, et le raisonnement s'achève par le corollaire du lemme I.

11. Soient α, β, γ, ... divers polynomes en r et $\delta(r)$ leur plus grand commun diviseur.

Théorème. — *Les relations* $A[x] = 0$, $B[x] = 0$, $C[x] = 0$, ... *sont, si elles coexistent, conséquences de la relation* unique $D[x] = 0$.

La proposition découle immédiatement du corollaire du lemme II. Remarquons par contre deux choses.

D'abord, dans la présente théorie, il est licite, en vertu du n° 9, d'introduire seulement des polynomes α, β, γ, ... de degré limité, égal ou inférieur à n_0 (9).

En second lieu le théorème ne serait pas infirmé si les relations $A[x] = o$, $B[x] = o$, ... étaient en nombre illimité ou même infini.

12. Reprenons (9) l'équation

$$\psi(p) = o$$

de degré minimum à laquelle satisfait p.

Soient un point x de l'espace et une droite x, qui part de x. On a (8, *in fine*) des relations en nombre illimité

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} P_1[x] = o, & P_2[x] = o, & \ldots, \\ P_1 = F_1(p), & P_2 = F_2(p), & \ldots, \\ F(r), \quad F_2(r), & \ldots = \text{polynomes}. & \end{array}$$

On a sûrement, pour ce point x là,

$$Q[x] = o$$

puisque

$$Q = \psi(p) = o.$$

Nommons $f(r)$ le plus grand commun diviseur des divers polynomes $F(r)$ et du polynome $\psi(r)$ et écrivons

$$P = f(p).$$

Toutes les relations (1) sont conséquences de la relation *unique*

$$P[x] = o.$$

Dès lors notre problème se décompose en deux problèmes réciproques $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{A}$. *Après avoir choisi, parmi les diviseurs du polynome $\psi(r)$, le polynome $f(r)$ de degré h, trouver à quelles conditions doit satisfaire un point x pour que l'on ait*

$$P[x] = o, \qquad P = f(p),$$

sans avoir, pour ce même point x, *pour un autre diviseur f_1 de* $\psi(r)$

$$P_1[x] = o, \qquad P_1 = f_1(p),$$

à moins que le diviseur f_1 ne soit divisible par f.

$\mathfrak{B}$. *Un point x étant donné, trouver parmi les diviseurs de $\psi(r)$ un polynome $f(r)$ de degré minimum h, tel que l'on ait*

$$P[x] = o, \qquad P = f(p).$$

La solution du problème $\mathfrak{B}$ est exempte d'ambiguïté : si l'on trouvait deux diviseurs f et f_1 du même degré h, ils ne sauraient être distincts, car leur plus grand commun diviseur aurait aussi le degré h.

13. Passons à la construction des droites $\overline{x}$ (6). Une pareille droite est connue dès qu'on possède le point x dont elle est issue.

Donnons-nous un point x et introduisons la suite Ξ (6). Le problème $\mathfrak{B}$, une fois résolu, donne un polynome de degré h

$$f(r) = c_0 + c_1 r + \ldots + c_h r^h$$

diviseur de $\psi(r)$. Entre des points de la suite Ξ existe la relation

$$o = P[x] = c_0 x + c_1 p[x] + \ldots + c_h p^h[x]$$

qui permet d'exprimer, de proche en proche, tous les points de Ξ linéairement à l'aide des h points

$$x, \quad p[x], \quad \ldots, \quad p^{h-1}[x].$$

Ces derniers points eux-mêmes sont d'ailleurs linéairement distincts, car si l'on avait par exemple

$$o = P'[x] = c'_0 x + \ldots + c'_{h'} p^{h'}[x], \qquad h' < h,$$

le polynome $f(r)$ fourni par la solution du problème $\mathfrak{B}$ ne serait pas de degré minimum, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc *le degré h du polynome $f(r)$ est précisément aussi le degré de la droite $\overline{x}$ issue du point x.*

Réciproquement, donnons-nous h et cherchons les droites $\overline{x}$ qui ont ce degré, ou, ce qui revient au même, les points x, origines de ces droites $\overline{x}$.

Parmi les diviseurs, de degré h, que possède le polynome $\psi(r)$, choisissons $f(r)$. Le problème $\mathfrak{A}$, supposé résolu, donne tous les points x cherchés.

On a toutes les $\bar{x}$, en passant en revue les degrés h et, pour chaque h, les différents diviseurs de $\psi(r)$ qui ont ce degré.

Il est évident que h ne peut dépasser le degré n_0 de $\psi(r)$.

En résumé : *si l'on sait résoudre les problèmes* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$, *on saura construire toutes les droites* $\bar{x}$.

14. Une droite fondamentale d_m, de degré m, est une collection (7) de droites $\bar{x}$, de degré h, avec $m = \sum h$.

Donnons-nous m et cherchons tous les systèmes d'entiers positifs h tels que

$$m = \sum h, \qquad h \leq n_0, \qquad n_0 = \text{degré de } \psi(r).$$

On n'a qu'un nombre limité de systèmes.

Les h une fois choisis, on construira, comme il vient d'être dit, les droites $\bar{x}$ dont la collection constitue d_m.

La conclusion est celle-ci : *la construction des droites fondamentales se ramène à la construction des droites* $\bar{x}$, *c'est-à-dire à la résolution des problèmes* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$.

C'est ce dont on va s'occuper, après une discussion préalable d'algèbre élémentaire que voici.

15. Considérons deux suites $\bar{K}$ et $\bar{Z}$ de λ quantités chacune, rangées par ordre croissant d'indices

$$\begin{array}{ll} \bar{K} & K_0, \ K_1, \ \ldots, \ K_g, \ \ldots, \ K_{\lambda-1}, \\ \bar{Z} & z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_\alpha, \ \ldots, \ z_\lambda. \end{array}$$

Supposons les 2λ quantités K_g et z_α liées par les λ équations Ω

$$\Omega \quad \left\{ \begin{array}{r} K_0 z_1 + \ldots + K_g z_{g+1} + \ldots + K_{\lambda-1} z_\lambda = 0, \\ K_0 z_2 + \ldots + K_g z_{g+2} + \ldots + K_{\lambda-2} z_\lambda = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_0 z_{\lambda-1} + K_1 z_\lambda = 0, \\ K_0 z_\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Prenant successivement pour inconnues soit les z, soit les K, on a les deux matrices λ — aires

$$K = \begin{vmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & K_3 & . & K_{\lambda-2} & K_{\lambda-1} \\ o & K_0 & K_1 & K_2 & . & \dots & K_{\lambda-2} \\ o & o & K_0 & K_1 & . & \dots & K_{\lambda-3} \\ . & . & \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ o & o & \dots & \dots & o & K_0 & K_1 \\ o & o & o & \dots & o & o & K_0 \end{vmatrix}$$

et

$$Z = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & \dots & \dots & z_{\lambda-2} & z_{\lambda-1} & z_\lambda \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & \dots & z_{\lambda-2} & z_{\lambda-1} & z_\lambda & o \\ z_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & z_{\lambda-1} & z_\lambda & o & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{\lambda-1} & z_\lambda & o & o & \dots & o & \dots & \dots & o \\ z_\lambda & o & o & . & \dots & o & \dots & \dots & o \end{vmatrix}.$$

Dans K, la g-ième colonne contient les coefficients que possède dans le système Ω l'inconnue z_{g+1}. Dans Z, la α-ième colonne est celle des coefficients que possède, dans Ω, l'inconnue $K_{\alpha-1}$.

16. Discutons la façon dont le système Ω détermine les inconnues z_α. On s'assure aisément de ce qui suit.

Si $K_0 \neq o$, toutes les z_α sont nulles. Si $K_0 = o$, mais $K_1 \neq o$, l'inconnue z_1 ne figure plus dans Ω et reste arbitraire, mais les $\lambda - 1$ autres inconnues sont nulles.

....

En général : *si la suite* $\overline{K}$ *débute exactement par σ zéros,* $\sigma \leqq \lambda$,

$$K_0 = K_1 = \ldots = K_{\sigma-1} = o, \qquad K_\sigma \neq o,$$

alors les σ premières inconnues $z_1, \ldots, z_\sigma$ ne figurent plus dans Ω et restent arbitraires, tandis que les $\lambda - \sigma$ dernières

$$z_{\sigma+1}, \quad z_{\sigma+2}, \quad \ldots, \quad z_\lambda$$

sont des zéros.

La suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros *au moins*, car le système Ω ne nous apprend rien sur les valeurs de $z_1, \ldots, z_\sigma$ et est satisfait indépendamment d'elles.

17. Étudions la façon dont le système Ω détermine les λ inconnues K_g. Une discussion analogue à celle ci-dessus montre ce qui suit :

Si la suite $\overline{Z}$ *se termine exactement par* $\lambda - \sigma$ *zéros*

$$z_\lambda = z_{\lambda-1} = \ldots = \lambda_{\sigma+1} = 0, \qquad z_\sigma \neq 0,$$

alors la suite $\overline{K}$ *débute par* σ *zéros* au moins

$$K_0 = K_1 = \ldots = K_{\sigma-1} = 0,$$

tandis que les $\lambda - \sigma$ *derniers termes de la suite*

$$K_\sigma, \quad K_{\sigma+1}, \quad \ldots, \quad K_{\lambda-1}$$

ne figurent plus dans Ω *et restent indéterminées.*

Les équations Ω ne nous apprennent plus rien sur les valeurs de $K_\sigma, \ldots, K_{\lambda-1}$.

18. Pour résoudre les problèmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ (12), je supposerai (ce qui ne restreint en rien la généralité) la n — aire p, de déterminant $|p| \neq 0$, ramenée à l'expression *typique* dont j'ai fait usage ailleurs [1] déjà.

Supposons la fonction caractéristique

$$\varphi(r) = |rE - p|$$

de p, où E est la n — aire unité, décomposée en ses *Elementarteiler* ou *successifs*

$$\varphi(r) = \prod (r - l)^\lambda, \qquad n = \sum \lambda,$$

l étant une racine de l'équation caractéristique ω, $\varphi(r) = 0$.

Au successif $(r - l)^\lambda$ correspondent :

1° Une matrice *partielle* ou *composante* λ — aire L ; 2° 2λ variables z_α et w_α $\{\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda\}$ choisies parmi les $2n$ variables x_j et u_j $\{j = 1, 2, \ldots, n\}$.

---

[1] *Sur les connexes linéaires dans l'espace à* $n - 1$ *dimensions* (*Comptes rendus* du 9 mai 1904). — *Sur les formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1905) : première Partie du Mémoire.

Nommons $\chi(s)$ un symbole, tel que

$$\begin{cases} \chi(s) = 0, & \text{pour } s \text{ négatif}, \quad s < 0, \\ \chi(s) = 1, & \text{pour } s \text{ positif ou nul}, \quad s \geqq 0. \end{cases}$$

La forme bilinéaire $L(z; w)$ est (3)

$$L(z; w) = \sum_\alpha w_\alpha z_\alpha + \sum_\alpha w_\alpha z_{\alpha+1} \chi(\lambda - 1 - \alpha).$$

Dans chaque composante L les variables z_α, par exemple, *sont rangées dans un ordre déterminé.*

L'expression typique est, pour la n — aire p,

$$p(x; u) = \sum L(z; w),$$

$\sum$ s'étendant aux diverses composantes L.

Je range dans un même *hypersystème* (l) les diverses composantes où le l est égal à une même racine distincte de l'équation caractéristique.

19. Reprenons le polynome $f(r)$ et la n — aire $P = f(p)$, déjà considérés plus haut (problèmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$). Puisque, dans l'expression typique, $p = \sum L$, on a

$$P = f(p) = \sum \Lambda, \qquad \Lambda = f(L).$$

Les relations $P[x] = 0$ se traduisent, sur les variables z_α de la composante L, par les relations

$$\Lambda[z] = 0,$$

qu'on a à étudier.

20. On peut écrire

$$L = lE + S,$$

où la n — aire S est, $\{\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda\}$,

$$S = | z_\alpha \quad z_{\alpha+1} \chi(\lambda - 1 - \alpha) |,$$

tandis que E est la n — aire unité. De plus $S^\lambda = 0$.

Un calcul simple montre que

$$\Lambda = f(\mathrm{L}) = f(l\mathrm{E} + \mathrm{S}) = \sum_g \mathrm{K}_g \mathrm{S}^g,$$

$$g = 0, 1, \ldots, \lambda - 1, \qquad \mathrm{K}_g = \frac{1}{g!} \frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g}.$$

Les conditions $\Lambda[z] = 0$ s'écrivent

$$\Lambda[z_\alpha] = \sum_g \mathrm{K}_g z_{\alpha+g} \chi(\lambda - \alpha - g) \qquad \{\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda\},$$

puisque

$$\mathrm{S}^g = | z_\alpha \qquad z_{\alpha+g} \chi(\lambda - g - \alpha) |.$$

On est conduit entre les 2λ quantités K_g et z_α précisément au système Ω déjà étudié (**15**, **16**, **17**).

21. Construisons le polynome $\psi(r)$, de degré n_0, tel que $\psi(p) = 0$ soit l'équation de degré minimum à laquelle satisfait p.

Frobenius (p. 26) enseigne à construire $\psi(r)$. Voici la règle, traduite dans la terminologie actuelle.

Nommons, pour l'hypersystème (l), λ_0 l'ordre maximum des composantes L, $\lambda \leqq \lambda_0$. Il viendra

$$\psi(r) = \prod (r - l)^{\lambda_0}, \qquad n_0 = \sum \lambda_0,$$

la somme et le produit s'étendant aux divers hypersystèmes (l) de p.

Je dirai que dans un hypersystème (l) une composante L est *principale,* si l'ordre λ de L est précisément égal au maximum λ_0.

Un polynome $f(r)$, de degré h, diviseur de $\psi(r)$, est évidemment

$$f(r) = \prod (r - l)^\mu, \qquad h = \sum \mu,$$

$$0 \leqq \mu \leqq \lambda_0.$$

L'exposant μ, que possède dans $f(r)$ le facteur $r - l$, ne peut dépasser l'ordre λ d'une composante principale dans l'hypersystème (l).

22. On a vu (**20**) que, dans une même composante L, les z_α et les K_g sont liées par le système Ω.

Supposons que :

la suite $\overline{K}$ débute par τ zéros

$$K_0 = \ldots = K_{\tau-1} = 0, \qquad K_\tau \neq 0;$$

la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros

$$z_\sigma \neq 0, \quad z_{\sigma+1} = \ldots = z_\lambda = 0.$$

Si l'on se donne τ (cas du nº 16) la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \tau$ zéros *au moins;* par suite $\lambda - \tau \leqq \lambda - \sigma$, $\tau \geqq \sigma$, $\sigma = \tau - \varepsilon$, ε étant un entier non négatif.

Si l'on se donne σ (cas du nº 17), la suite $\overline{K}$ débute par σ zéros au moins, $\sigma \leqq \tau$ et encore $\sigma = \tau - \varepsilon$.

Donc *la formule* $\sigma = \tau - \varepsilon$ *est générale,* à condition bien entendu que $\tau \leqq \lambda$, $\sigma \leqq \lambda$.

23. Comme (20)

$$K_g = \frac{1}{g!}\frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g} \qquad \text{et} \qquad f(r) = \prod (r - l)^\mu,$$

on a

$$\tau = \mu \quad \text{si} \quad \mu \leqq \lambda,$$
$$\tau = \lambda \quad \text{si} \quad \mu > \lambda;$$

ce qu'on exprime par la formule unique

$$(1) \qquad \tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda),$$

$\chi(s) = 0$ ou 1 suivant que $s < 0$ ou $s \geqq 0$.

Si l'on a affaire à une composante principale (21, *in fine*) $\mu \leqq \lambda$ et $\tau = \mu$. Enfin, pour une composante principale, il vient (22)

$$(2) \qquad \tau = \mu = \sigma + \varepsilon.$$

Problème $\mathfrak{A}$.

24. Le polynome

$$f(r) = \prod (r - l)^\mu, \qquad h = \sum \mu,$$

une fois choisi, on possède les exposants μ, ainsi que les quantités

$$K_g = \frac{1}{g!}\frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g}$$

et le nombre τ, du n° **23**,

$$\tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda).$$

Parmi les λ inconnues z_α, les $\lambda - \sigma$ dernières sont nulles, les σ premières arbitraires (cas du n° **16**). Enfin $\sigma = \tau - \varepsilon$, $\varepsilon =$ non négatif.

Pour une composante principale $\tau = \mu$, $\sigma = \mu - \varepsilon$.

La solution du problème $\mathfrak{A}$ se formule ainsi : *après avoir choisi le polynome*

$$f(r) = \prod (r - l)^\mu, \qquad h = \sum \mu,$$

c'est-à-dire l'exposant μ *afférent à chaque hypersystème* (l), *on annule, dans la composante* λ — *aire* L *de* (l), *les*

$$(0) \quad \lambda - \tau = \lambda - \{\mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda)\} = (\lambda - \mu)\{1 - \chi(\mu - \lambda)\}$$

dernières variables z_α, *en laissant aux*

$$(1) \qquad \tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda)$$

premières des valeurs quelconques.

25. La solution du problème $\mathfrak{A}$ ainsi énoncée répond-elle à l'énoncé du problème donné au n° **12**? Autrement dit : existe-t-il, pour le même point x (ou les mêmes z_α), un autre polynome, non divisible par $f(r)$,

$$f_1(r) = \prod (r - l)^{\mu_1},$$

tel que (avec des notations faciles à comprendre) on ait encore

$$A_1 | z] = 0, \qquad A_1 = f_1(p)?$$

Non, tant que les z_α, non forcément nulles, conservent des valeurs *quelconques*. Voici comment on s'en assure.

Puisque $f(r)$ ne divise pas $f_1(r)$, on trouvera au moins un hypersystème (l) dans lequel $\mu_1 < \mu$ ou $\mu_1 = \mu - \theta$, $\theta =$ entier positif. Prenons une composante principale L de cet hypersystème (l). On aura à la fois à tenir compte de A et de A_1.

Tenons compte de A. Sont forcément nulles les $\lambda - \tau = \lambda - \mu$ dernières z_α. Les μ premières conservant des valeurs *quelconques,* on fera

$$(1) \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_\mu \neq 0; \qquad z_{\mu+1} = \ldots = z_\lambda = 0.$$

Tenons compte de A_1. La formule (2) du nº **23** donne, avec des notations faciles à comprendre,

$$\sigma_1 = \mu_1 - \varepsilon_1 = \mu - \theta - \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 \geqq 0.$$

On doit faire $z_{\sigma_1+1} = 0$, ce qui est contraire à (1), car $\mu \leqq \mu - \theta - \varepsilon_1 + 1$.

On peut se demander si le raisonnement subsiste en particularisant les z_α arbitraires. Cela revient à se donner les z_α et l'on est ramené au problème $\mathfrak{B}$.

Problème $\mathfrak{B}$.

26. Donnons-nous le point x, c'est-à-dire les z_α, et cherchons à construire le polynome $f(r)$, de degré minimum, c'est-à-dire à calculer les exposants μ.

Supposons que dans la composante λ — aire L on ait

$$z_\sigma \neq 0, \qquad z_{\sigma+1} = \ldots = z_\lambda = 0,$$

c'est-à-dire que la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros. On possède le nombre σ puisqu'on possède les z_α. On a (nº **24**)

$$\tau = \sigma + \varepsilon$$

et, comme $f(r)$ est divisible par $(r - l)^\tau$, $f(r)$ est divisible par $(r - l)^{\sigma+\varepsilon}$. Donc

$$\mu \geqq \sigma.$$

Nommons σ_0 le maximum des nombres σ pour les différentes composantes L de l'hypersystème (l). On a $\mu \geqq \sigma_0$. Comme $f(r)$ doit avoir le degré minimum, on fera $\mu = \sigma_0$. Bien entendu, le μ ainsi calculé doit être $\mu \leqq \lambda_0$, $\lambda_0 =$ ordre maximum des composantes L de (l).

D'ailleurs, comme $0 \leqq \sigma \leqq \lambda$, $\sigma \leqq \sigma_0$, $\lambda \leqq \lambda_0$, la condition $\mu = \sigma_0 \leqq \lambda_0$ peut être satisfaite.

La solution du problème $\mathfrak{B}$ se formule donc ainsi : *quand on se donne le point x, c'est-à-dire, pour chaque composante λ — aire L de l'hypersystème (l), les valeurs de z_α, on possède le nombre σ tel que*

$$z_\sigma \neq 0, \qquad z_{\sigma+1} = \ldots = z_\lambda = 0;$$

nommons σ_0 le maximum des σ pour les différentes L *de (l); l'exposant du facteur $r - l$ dans le polynome $f(r)$ sera précisément* $\mu = \sigma_0$.

Pour un point x pris au hasard dans l'espace, aucune des z_α n'est zéro; $\sigma = \lambda$, $\sigma_0 = \lambda_0$, $f(r)$ se confond avec $\psi(r)$.

27. Appliquons la méthode, qui vient d'être exposée, à construire les points fondamentaux de p, c'est-à-dire les droites fondamentales d_1 de degré 1 (nos **2** et **3**).

On a $m = 1$. d_1 contient une seule droite $\bar{x}$ de degré $h = 1$. Le polynome $f(r)$ est de degré 1. L'exposant μ est zéro pour tous les hypersystèmes, sauf un, (l) par exemple. Pour (l), $\mu = 1$.

Prenons une composante λ — aire L de l'hypersystème (l'), $l' \neq l$. On a $\mu = 0$. La formule (o) du n° **24** (problème $\mathfrak{A}$) montre qu'il faut annuler les λ dernières z_α, c'est-à-dire les annuler toutes.

Supposons, au contraire, que L est dans l'hypersystème (l). Alors $\mu = 1$.

Si $\lambda > 1$, la règle du n° **24** (problème $\mathfrak{A}$) montre que l'on doit faire

$$z_1 = \text{arbitr.}, \qquad z_2 = z_3 = \ldots = z_\lambda = 0.$$

Si $\lambda = 1$, z_1 l'unique variable z_α, doit rester arbitraire.

Tout cela est d'accord avec la règle que j'ai déjà donnée dans ma Note aux *Comptes rendus* du 9 mai 1904.