

BULLETIN DE LA S. M. F.

FOUCHÉ

Sur la déviation des graves et les champs de force

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 150-156

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__150_0

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉVIATION DES GRAVES ET LES CHAMPS DE FORCE;

Par M. MAURICE FOUCHÉ.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 23 janvier dernier, j'ai montré, à propos de la déviation des graves, que la courbure des lignes de force ne dépend nullement de la variation de la force, dans le sens de sa direction, mais seulement de la variation de l'intensité de la force quand on se déplace sur une surface de niveau (1). Malheureusement, j'ai laissé échapper, dans cette Note, des erreurs qui m'ont été signalées par M. de Sparre et qu'il importe de rectifier. En premier lieu, la concavité des lignes de force, ainsi que je le montrerai tout à l'heure, et contrairement à ce que j'avais dit, est dirigée du côté où la force *crott*. Dans le champ de la pesanteur, cela fait une déviation vers le nord. De plus, j'avais omis, dans la dérivée de la formule de Clairaut, un facteur 2, ce qui fait que la valeur trouvée pour la déviation due à la courbure des lignes de force est deux fois plus grande que je l'avais annoncé, et qu'elle doit être retranchée de la déviation due à la force centrifuge composée au lieu de lui être ajoutée. Comme cette dernière a une valeur absolue plus grande, il reste une déviation résiduelle qui est dirigée vers le sud et qui est la même, soit qu'on abandonne le corps d'un lieu élevé, soit qu'on le laisse tomber dans un puits.

M. de Sparre a calculé le coefficient de cette déviation dans une Note présentée à la Société mathématique, ce qui me dispense d'insister plus longtemps sur ce sujet particulier. Cependant, je crois qu'il n'est pas inutile de donner quelques indications complémentaires sur ce problème de la déviation des graves qui a occupé de nombreux géomètres, et qui, si je ne me trompe, vient seulement d'être élucidé complètement. Il n'y a rien à dire de la

(1) M. Darboux m'a dit qu'il avait donné dans son enseignement le moyen de trouver le plan osculateur et le rayon de courbure d'une quelconque des trajectoires orthogonales à une famille de surfaces, ce qui est évidemment la même question; mais j'ignore la forme définitive qu'il a donnée à la formule et les détails de la démonstration.

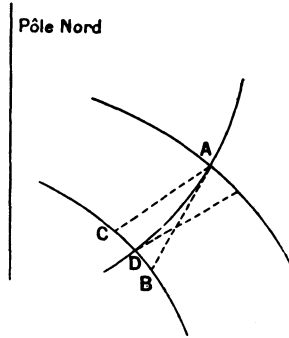
déviations vers l'est, calculées depuis longtemps. La déviation vers le sud a montré plus de difficultés, parce que les auteurs qui l'ont abordée ont cherché à déterminer la courbure des lignes de force de l'attraction, pour composer ensuite cette attraction avec la force centrifuge et avec la force centrifuge composée. De là vient qu'ils ont été conduits à faire des hypothèses sur la constitution interne de la Terre, et à distinguer le cas où le corps tombe sur le sol de celui où il pénètre à l'intérieur du globe, parce que, dans les deux cas, la loi d'attraction est différente. Il semblait pourtant, *a priori*, qu'une différence entre les résultats des deux manières d'opérer était bien invraisemblable, et je dois dire que c'est cette invraisemblance qui m'a déterminé à envisager autrement le problème. En fait, on trouve une différence si l'on fait le calcul dans l'hypothèse où la surface de la Terre n'est pas une surface de niveau ; mais c'est là une supposition inadmissible si l'on opère sur un sol horizontal. Si l'on voulait étudier ce qui se passe dans le cas où l'on ferait l'expérience sur le flanc d'une montagne, il faudrait faire intervenir les attractions locales, ce qui fait que la question perdrait tout intérêt théorique, et, comme elle n'a aucun intérêt pratique à cause de l'extrême petitesse du résultat, je ne pense pas qu'il y ait lieu de s'y arrêter plus longtemps.

L'erreur que j'ai commise est regrettable à un autre point de vue. En disant que la déviation due à la courbure des lignes de force de la pesanteur est dirigée vers le sud, j'ai laissé entendre que sur toute planète, quels que soient l'aplatissement et la gravité à la surface, il y aurait toujours une déviation vers le sud. Puisque, au contraire, la courbure des lignes de force dévie les graves vers le nord, on peut concevoir que, sur une planète autrement constituée que la nôtre, cette cause de déviation l'emporterait sur la force centrifuge composée et produirait une déviation définitive dirigée vers le nord. Cependant, il n'est pas sûr que cela soit possible, parce qu'il y a des relations entre la force centrifuge, l'aplatissement et la gravité. C'est un point à examiner.

Quant au problème en lui-même, il peut être entendu de plusieurs manières différentes. La verticale d'un point est définie par un fil à plomb *infiniment court* attaché en ce point. Un fil à plomb *long* donne la verticale de son point inférieur qui n'a pas la même direction que celle du point d'attache. Soient A le point d'attache,

B le pied de la verticale de A sur la surface de niveau passant par l'extrémité C du fil à plomb long attaché en A et D le pied sur la surface de niveau inférieure de la ligne de force qui passe en A et qui est tangente à la verticale AB. En aucun des points B, C, D la verticale n'est parallèle à celle de A, et, par suite, aucun de ces points n'a la même latitude que A. De là vient qu'il y a quatre déviations différentes à considérer suivant qu'on entend la déviation par rapport au fil à plomb court, au fil à plomb long, par rapport à la ligne de force, ou enfin la déviation en latitude. C'est la déviation par rapport au fil à plomb court qui a fait l'objet des calculs de M. de Sparre et des miens. Il suffit de tracer une figure grossière, la ligne de force étant concave vers le nord, pour reconnaître les faits suivants (*fig. 1*) :

Fig. 1.



1° La verticale du point A (fil à plomb court) tombe au sud de la ligne de force ;

2° La verticale de D s'élève en passant au sud de A. Donc le fil à plomb long tombe au nord de la ligne de force ;

3° La latitude en C (pied du fil à plomb long) est plus faible qu'en A. Donc, le point de niveau inférieur qui a même latitude que A est au nord de C.

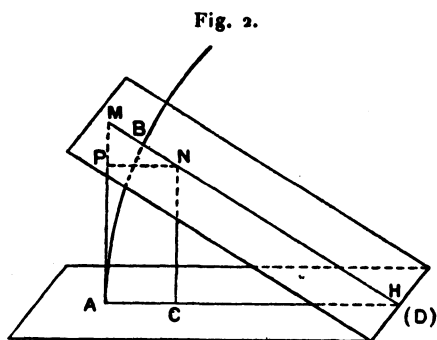
De là résulte que, de toutes les espèces de déviations, la plus petite est celle qui est rapportée au fil à plomb court ; viennent ensuite, par ordre de grandeur croissante, celle qui est rapportée à

la ligne de force, celle qui est rapportée au fil à plomb long, et enfin la déviation en latitude, la plus grande de toutes.

Remarquons enfin que, si l'on supprimait l'action de la force centrifuge composée, laquelle donne une déviation vers le sud, la trajectoire du mobile serait évidemment comprise entre la ligne de force AD et sa tangente AB (¹), d'où il suit que, quelle que soit la constitution de la planète, les trois dernières déviations sont toujours australes; seule la première pourrait peut-être se trouver boréale, comme je l'ai expliqué plus haut.

J'arrive maintenant à la détermination du plan osculateur et du rayon de courbure des lignes de force. La méthode analytique que j'ai suivie pour la seconde de ces déterminations a l'inconvénient de ne pas mettre en évidence le sens de la courbure. Voici une méthode géométrique, d'ailleurs très simple :

Soient A et B (*fig. 2*) deux points infiniment voisins d'une ligne



de force. Les plans normaux en A et B se coupent suivant une droite (D) qui est l'axe de la courbure de la ligne de force. Donc, le plan osculateur de cette ligne est perpendiculaire à D. Mais les deux plans normaux sont tangents aux surfaces de niveau qui passent en A et B; si, par chacun de ces points, on mène des parallèles à D, on aura deux tangentes parallèles aux surfaces de niveau, et telles, par conséquent, que, si l'on se déplace sur l'une des deux surfaces, en suivant une ligne tangente à l'une d'elles, la distance

(¹) Cette remarque m'a été faite par M. Lallemant.

du point mobile à l'autre surface ne subira qu'un accroissement du second ordre. Donc chacune de ces droites est tangente à la ligne de force constante tracée sur la surface correspondante, d'où ce théorème :

Le plan osculateur d'une ligne de force est, en chacun de ses points, normal à la ligne de force constante menée par ce point-là sur la surface de niveau correspondante.

On peut ajouter que la trace du plan osculateur en un point d'une ligne de force sur la surface de niveau qui passe en ce point est la direction du maximum de variation de la force sur la surface de niveau. Enfin, il est manifeste que la concavité de la ligne de force est tournée du côté de la droite (D), c'est-à-dire du côté où les surfaces de niveau se rapprochent, ou enfin du côté où la force croît.

Abaissons de A et B les perpendiculaires AH et BH sur (D). AH sera le rayon de courbure ρ de la ligne de force. Prenons, sur AH, un point C infiniment voisin de A, et menons, sur le plan A(D), les deux perpendiculaires AM et CN, limitées au plan B(D).

Traçons enfin NP parallèle à AH. AM et CN représentent, aux infiniment petits près du second ordre, les distances de A et de C à la surface de niveau infiniment voisine. Ce sont deux quantités inversement proportionnelles aux intensités des forces qui s'exercent en A et C et MP en est la différence. Les triangles semblables MNP, MAH donnent

$$\frac{MP}{MA} = \frac{NP}{AH},$$

$NP = AC$ est le déplacement ds sur la droite AH. $AH = \rho$. On aura donc, MP étant un accroissement négatif,

$$-d \log(MA) = \frac{ds}{\rho},$$

ou, puisque MA est inversement proportionnelle à la force F,

$$d \log F = \frac{ds}{\rho},$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{F} \frac{dF}{ds}.$$

Ainsi, la courbure de la ligne de force est la dérivée du logarithme de la force prise dans la direction de la surface de niveau où l'accroissement de la force est maximum.

Si l'on trace dans le plan tangent à la surface de niveau deux axes rectangulaires Ax et Ay , on reconnaîtra sans peine que l'expression

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2$$

est un invariant, c'est-à-dire qu'elle conserve la même valeur quand on change les axes. Il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que cette expression représente l'intensité d'une force dans un champ plan dont le potentiel serait F . Si les axes sont dirigés suivant AH et la perpendiculaire à AH , la variation de la force le long de cette perpendiculaire est nulle, et l'invariant se réduit à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2.$$

Donc l'expression de la courbure se met aussi sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{F^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right],$$

qui est celle que j'ai donnée.

Dans la même séance où j'avais présenté ma Note sur la déviation des graves, M. Darboux avait présenté une Note de M. Carrus sur les familles de surface qui admettent des trajectoires orthogonales planes, et l'avait fait suivre de remarques complémentaires dans lesquelles il établit que le problème se ramène, en général, à l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du second ordre, et admet, de plus, une nouvelle intégrale première lorsque les plans des lignes de force sont astreints à passer par un point fixe ou à être parallèles à une droite fixe.

Interprétée dans le langage de la Mécanique, cette intégrale première exprime que les intersections des surfaces de niveau et des surfaces d'égal force sont sur des sphères concentriques dans

le premier cas, sur des plans parallèles dans le second. Il y a peut-être quelque intérêt à faire observer que ce résultat découle immédiatement du théorème relatif aux plans osculateurs des lignes de force.

Si, en effet, celles-ci sont planes, leurs plans seront normaux aux lignes d'égalité de force tracées sur les surfaces de niveau. Pour être plus précis, disons que chaque ligne d'égalité de force tracée sur une surface de niveau est une trajectoire orthogonale de tous les plans des lignes de force qui passent par ses divers points. Si donc tous ces plans passent par un point fixe O , leurs trajectoires orthogonales seront situées sur des sphères de centre O . Si les plans sont parallèles à une même droite, leurs trajectoires orthogonales seront dans des plans perpendiculaires à cette droite.

Si l'on prend trois axes rectangulaires passant par le point fixe ou un axe des x parallèle à la direction fixe, F désignant la force, et v le potentiel, on aura dans le premier cas

$$F = \varphi(x^2 + y^2 + z^2, v),$$

et dans le second

$$F = \varphi(x, v),$$

puisque la force ne varie pas quand, v restant constant, on reste sur une même sphère ayant son centre à l'origine, ou sur un plan perpendiculaire à Ox . Ces équations sont les intégrales premières dont il vient d'être question.
