BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Remarques sur un cas de symétrie dans l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 13-14

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__13_0>

REMARQUES SUR UN CAS DE SYMÉTRIE DANS L'ESPACE;

Par M. Ch. Bioche.

1. Il est facile de voir que, si une figure de l'espace admet pour axes de symétrie deux droites rectangulaires OX et OY, elle admet un troisième axe OZ perpendiculaire aux deux premiers; mais elle n'admet pas nécessairement pour centre de symétrie le sommet O du trièdre, ou pour plan de symétrie le plan d'une des faces. Le paraboloïde équilatère

$$XY = aZ$$

donne l'exemple le plus simple de surface admettant cette symétrie.

Je vais indiquer, relativement aux courbes gauches, quelques résultats curieux.

2. D'abord, je ferai remarquer que les équations

$$X = F_1(\operatorname{tang}^2\theta)\cos\theta, \qquad Y = F_2(\operatorname{tang}^2\theta)\sin\theta, \qquad Z = F_3(\operatorname{tang}^2\theta)\operatorname{tang}\theta,$$

où F_1, F_2, F_3 sont des fonctions arbitraires, représentent des courbes ayant pour axes de symétrie OX, OY, OZ; les points symétriques du point correspondant à une valeur θ du paramètre variable correspondent aux valeurs $-\theta$, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$ de ce paramètre.

On peut voir qu'une courbe représentée par les équations précédentes n'admet pas, en général, l'origine comme centre de symétrie. Il en résulte qu'elle n'a pas non plus pour plan de symétrie le plan d'une des faces, car l'existence d'un plan de symétrie et d'un axe perpendiculaire entraînerait celle d'un centre, pied de cet axe sur le plan.

3. Mais une courbe ayant pour axes de symétrie OX, OY, OZ et n'ayant pas pour centre de symétrie O, peut avoir des plans de symétrie autres que les faces du trièdre. Ainsi, tandis que la courbe

$$X = a\cos\theta, \qquad Y = b\sin\theta, \qquad Z = c\operatorname{tang}\theta,$$

n'a aucun plan de symétrie, la courbe

$$X = a\cos\theta, \qquad Y = a\sin\theta, \qquad Z = c\sin 2\theta,$$

a pour plans de symétrie ([1]) les plans

$$X - Y = 0, \qquad X + Y = 0.$$

4. Parmi les courbes ayant trois axes de symétrie rectangulaires et pas de centre ou de plan de symétrie, je citerai les lignes de striction des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. Ces lignes ont pour équations

$$\frac{X}{a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cos\theta} = \frac{Y}{b\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\sin\theta} = \frac{Z}{c\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \pm\frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}+\frac{1}{c^2}},$$

le signe à prendre dans la dernière expression dépendant du système de génératrices; θ est ici l'anomalie excentrique du pied de la génératrice sur le plan du cercle de gorge.

5. Il est encore curieux de noter que, parmi les courbes algébriques à torsion constante obtenues par M. E. Fabry (*Annales de l'École Normale,* juin 1892), il y en a possédant trois axes de symétrie rectangulaires, sans avoir un centre ou un plan de symétrie.

([1]) Les points symétriques correspondent aux valeurs θ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ ou θ et $\frac{3\pi}{2}-\theta$ du paramètre.