

BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL PETROVITCH

Remarques sur les zéros des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 65-67

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904_32_65_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904_32_65_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUE SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

Soit $F(z)$ une fonction entière d'un genre fini p . Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r , r étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif α , le produit

$$M(r)e^{-\alpha rp+1}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de 0 à ∞ .

Je me propose d'indiquer comment la connaissance :

1^o D'une limite supérieure du nombre N correspondant à une valeur donnée de α ;

2^o De la valeur que prend $F(z)$ pour $z = 0$;

3^o Du genre p de cette fonction,

Permet de calculer des limites inférieures des modules des zéros de $F(z)$ et, d'une manière plus générale, des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend une valeur C donnée à l'avance.

Tout d'abord l'égalité

$$(1) \quad M(r)e^{-\alpha rp+1} < N$$

entraîne, comme l'on sait, la suivante : en posant

$$(2) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

on aura

$$(3) \quad |a_n| < N \frac{\beta^n}{n^c}$$

où c et β sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$(4) \quad c = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \left(\frac{\alpha e}{c}\right)^c.$$

D'autre part, d'après un résultat que j'ai démontré dans un

travail antérieur (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312) : si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série (2) et si l'on forme la fonction

$$(5) \quad u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

on aura

$$(6) \quad \lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}}$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive r .

L'inégalité (6) subsistera manifestement si l'on substitue aux coefficients a_1, a_2, a_3, \dots les quantités définies par le second membre de l'inégalité (3), de sorte qu'on peut prendre

$$(7) \quad u(r) = \frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \sum_1^{\infty} \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2ac}};$$

le second membre de (6) fournira une limite inférieure de λ quelle que soit la valeur réelle et positive r . Et en particulier en faisant $r = \frac{1}{\beta}$ on arrive à la proposition suivante :

Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction $F(z)$ est donnée par l'expression

$$(8) \quad \frac{1}{a z^{\frac{1}{p+1}} \sqrt{1 + b \left(\frac{K}{A} \right)^2}}$$

où K désigne une limite supérieure de N ; A le module de $F(0)$; a et b deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$a = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}} \quad b = \theta \left(\frac{2}{p+1} \right),$$

$\theta(t)$ désignant la transcendante

$$\theta(t) = \sum_1^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes a et b restent les mêmes pour toutes les fonc-

tions $F(z)$ d'un même genre p et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

Pour $p = 0$,

$$a = e = 2,7183; \quad b = \theta(2) = 1,0639;$$

Pour $p = 1$,

$$a = \sqrt{2e} = 2,3316; \quad b = \theta(1) = 1,2913;$$

Pour $p = 2$,

$$a = \sqrt[3]{3e} = 2,0198; \quad b = \theta\left(\frac{2}{3}\right) = 1,5383; \quad \dots$$

En remplaçant dans (8) A par $|F(0) - C|$ cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C .
