BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL PETROVITCH

**Remarques sur les zéros des fonctions entières**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 32 (1904), p. 65-67

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__65_0>

# MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

## REMARQUE SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. Michel Petrovitch.

Soit $F(z)$ une fonction entière d'un genre fini $p$. Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de $z$ est égal à $r$, $r$ étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif $\alpha$, le produit

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque $r$ varie de o à $\infty$.

*Je me propose d'indiquer comment la connaissance :*

1° *D'une limite supérieure du nombre* N *correspondant à une valeur donnée de* $\alpha$;

2° *De la valeur que prend* $F(z)$ *pour* $z = 0$;

3° *Du genre* $p$ *de cette fonction,*

*Permet de calculer des limites inférieures des modules des zéros de* $F(z)$ *et, d'une manière plus générale, des valeurs de* $z$ *pour lesquelles* $F(z)$ *prend une valeur* C *donnée à l'avance.*

Tout d'abord l'égalité

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}} < N \tag{1}$$

entraîne, comme l'on sait, la suivante : en posant

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{2}$$

on aura

$$|a_n| < N \frac{\beta^n}{n^{cn}} \tag{3}$$

où $c$ et $\beta$ sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$c = \frac{1}{p+1}, \qquad \beta = \left(\frac{\alpha e}{c}\right)^c. \tag{4}$$

D'autre part, d'après un résultat que j'ai démontré dans un travail antérieur (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312) : si l'on désigne par $\lambda$ le plus petit module des zéros de la série (2) et si l'on forme la fonction

$$u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_{0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \tag{5}$$

on aura

$$\lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}} \tag{6}$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive $r$.

L'inégalité (6) subsistera manifestement si l'on substitue aux coefficients $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... les quantités définies par le second membre de l'inégalité (3), de sorte qu'on peut prendre

$$u(r) = \frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2nc}}; \tag{7}$$

le second membre de (6) fournira une limite inférieure de $\lambda$ quelle que soit la valeur réelle et positive $r$. Et en particulier en faisant $r = \frac{1}{\beta}$ on arrive à la proposition suivante :

*Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction* $F(z)$ *est donnée par l'expression*

$$\frac{1}{a\alpha^{\frac{1}{p+1}} \sqrt{1 + b\left(\frac{K}{A}\right)^2}} \tag{8}$$

*où* K *désigne une limite supérieure de* N ; A *le module de* $F(0)$ ; *a et b deux constantes numériques ayant pour valeurs*

$$a = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}} \qquad b = \theta\left(\frac{2}{p+1}\right),$$

$\theta(t)$ *désignant la transcendante*

$$\theta(t) = \sum_{1}^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes $a$ et $b$ restent les mêmes pour toutes les fonctions $F(z)$ d'un même genre $p$ et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

Pour $p = 0$,

$$a = e = 2,7183; \qquad b = \theta(2) = 1,0639;$$

Pour $p = 1$,

$$a = \sqrt{2e} = 2,3316; \qquad b = \theta(1) = 1,2913;$$

Pour $p = 2$,

$$a = \sqrt[3]{3e} = 2,0128; \qquad b = \theta(\tfrac{2}{3}) = 1,5383; \qquad \ldots$$

En remplaçant dans (8) A par $|F(0) - C|$ cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de $z$ pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C.