

BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PÉTROVITCH

Remarques sur les zéros des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 65-67

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__65_0

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUE SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

Soit $F(z)$ une fonction entière d'un genre fini p . Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r , r étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif α , le produit

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de 0 à ∞ .

Je me propose d'indiquer comment la connaissance :

1° *D'une limite supérieure du nombre N correspondant à une valeur donnée de α ;*

2° *De la valeur que prend $F(z)$ pour $z = 0$;*

3° *Du genre p de cette fonction,*

Permet de calculer des limites inférieures des modules des zéros de $F(z)$ et, d'une manière plus générale, des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend une valeur C donnée à l'avance.

Tout d'abord l'égalité

$$(1) \quad M(r)e^{-\alpha r^{p+1}} < N$$

entraîne, comme l'on sait, la suivante : en posant

$$(2) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

on aura

$$(3) \quad |a_n| < N \frac{\beta^n}{n^{cn}}$$

où c et β sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$(4) \quad c = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \left(\frac{\alpha e}{c}\right)^c.$$

D'autre part, d'après un résultat que j'ai démontré dans un

travail antérieur (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312) : si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série (2) et si l'on forme la fonction

$$(5) \quad u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_0^{\infty} |\alpha_n|^2 r^{2n}.$$

on aura

$$(6) \quad \lambda > \frac{|\alpha_0|}{\sqrt{u(r)}}$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive r .

L'inégalité (6) subsistera manifestement si l'on substitue aux coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ les quantités définies par le second membre de l'inégalité (3), de sorte qu'on peut prendre

$$(7) \quad u(r) = \frac{|\alpha_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \sum_1^{\infty} \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2uc}};$$

le second membre de (6) fournira une limite inférieure de λ quelle que soit la valeur réelle et positive r . Et en particulier en faisant $r = \frac{1}{\beta}$ on arrive à la proposition suivante :

Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction $F(z)$ est donnée par l'expression

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha x^{\rho+1} \sqrt{1 + b \left(\frac{K}{A}\right)^2}}$$

où K désigne une limite supérieure de N ; A le module de $F(0)$; a et b deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$a = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}} \quad b = \theta\left(\frac{\lambda}{p+1}\right),$$

$\theta(t)$ désignant la transcendante

$$\theta(t) = \sum_1^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes a et b restent les mêmes pour toutes les fonc-

tions $F(z)$ d'un même genre p et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

Pour $p = 0$,

$$a = e = 2,7183; \quad b = \theta(2) = 1,0639;$$

Pour $p = 1$,

$$a = \sqrt{2e} = 2,3316; \quad b = \theta(1) = 1,2913;$$

Pour $p = 2$,

$$a = \sqrt[3]{3e} = 2,0128; \quad b = \theta\left(\frac{2}{3}\right) = 1,5383; \quad \dots$$

En remplaçant dans (8) A par $|F(o) - C|$ cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C.
