BULLETIN DE LA S. M. F.

E. ESTANAVE

Sur un hyperbolographe à liquide

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 58-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__58_1>

SUR UN HYPERBOLOGRAPHE A LIQUIDE;

Par M. E. Estanave.

Considérons une courbe C dont l'équation, rapportée à deux axes rectangulaires, est $y=f(x)$ et une sécante AB, soient A et B deux points consécutifs d'intersection de la droite et de la courbe C. Cherchons l'enveloppe de la droite AB qui limite sur la courbe C une surface d'aire donnée.

Tout d'abord, on peut remarquer que si l'aire ACB est constante le point de contact de AB et de son enveloppe sera au milieu de AB; il suffit pour s'en convaincre de considérer la position infiniment voisine de la droite AB.

Par suite, x_0, y_0, x_1, y_1 étant les coordonnées de A et de B, les coordonnées d'un point de la courbe Γ, enveloppe de AB, seront

$$(1) \qquad X = \frac{x_0+x_1}{2},$$

$$(2) \qquad Y = \frac{y_0+y_1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}.$$

On peut considérer l'aire constante S comprise entre la droite AB et la courbe C comme la différence entre l'aire du trapèze $AabB$ et celle de la courbe C, a, b étant les projections de A et B sur l'axe des x. On a, par suite,

$$(3) \qquad (x_1-x_0)\frac{f(x_1)+f(x_0)}{2} - \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = S.$$

On obtiendra l'équation de la courbe Γ enveloppée par la droite AB en éliminant x_0 et x_1 entre les trois équations (1), (2) et (3).

Nous examinerons en particulier le cas où la courbe C est du second degré.

Si C est une conique, la courbe Γ est une conique homothétique. La courbe Γ est donc un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la courbe C est un cercle, une ellipse, une parabole, une hyperbole ou même un système de deux droites constitué par les asymptotes de l'hyperbole.

D'après cela, on voit que la courbe C n'est pas, en général, plus simple que la courbe Γ, sauf dans le cas où la courbe C est formée par un système de deux droites.

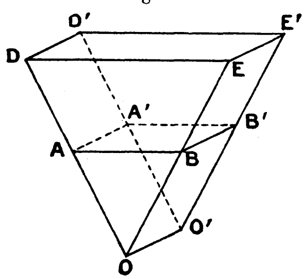
Considérons en particulier ce cas qui va nous conduire à l'hyperbolographe, qui est le but de cette Communication. Le principe de cet appareil est, en effet, fondé sur une propriété bien connue de la tangente à l'hyperbole.

Si l'on considère une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont OA, OB, on sait que l'aire du triangle AOB, déterminée par la tangente AB sur les asymptotes, est constante quelle que soit la tangente AB à l'hyperbole considérée.

Cette branche d'hyperbole peut donc être considérée comme l'enveloppe du troisième côté d'un triangle AOB d'aire constante.

Si nous considérons (*fig.* 1) une cuve prismatique DOE, D′O′E′

Fig. 1.



contenant un volume V de liquide, l'aire du triangle AOB découpé par la surface libre AB, A′B′ sur la face DOE restera constante lorsque l'on fera pivoter la cuve autour de l'arête OO′ supposée horizontale, car

$$AOB \times OO' = V.$$

Par suite, dans ce mouvement de pivotement autour de OO′ la surface libre du liquide enveloppe un cylindre hyperbolique dont les génératrices sont parallèles à OO′. Toute section normale à OO′ sera une branche d'hyperbole identique à celle qu'enveloppe la droite AB.

Cela posé, on peut déterminer les relations qui existent entre le volume V de liquide, l'angle 2ω au sommet de la cuve et les longueurs a, b des axes de l'hyperbole enveloppée par AB.

En désignant par λ la longueur de l'arête OO′, S la surface constante du triangle AOB, a et b les axes de l'hyperbole, l'on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a}, \qquad V = S\lambda = \frac{ab}{4}\lambda,$$

d'où l'on tire

$$a = 2\sqrt{\frac{V}{\lambda \operatorname{tang}\omega}}, \qquad b = 2\sqrt{\frac{V}{\lambda}\operatorname{tang}\omega}.$$

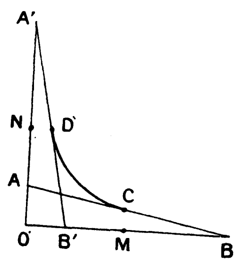
Si nous voulons obtenir une hyperbole qui a pour axes non plus a et b, mais Ka, Kb, les formules précédentes nous montrent que ω aura la même valeur et que le volume V′ de liquide à introduire dans la cuve sera

$$V' = K^2 V.$$

Donc, les volumes de liquide à introduire dans une *même* cuve pour obtenir deux hyperboles homothétiques sont entre eux comme le carré du rapport d'homothétie.

Remarque. — La courbe dessinée par le liquide sur la section droite n'est pas à considérer dans son entier. Si, par exemple, pour fixer les idées, on considère une cuve prismatique à angle

Fig. 2.



droit, tous les points de la courbe dessinée (*fig.* 2) ne font pas partie de l'hyperbole équilatère.

En effet, AB étant la tangente à la courbe menée par le point B, point extrême de la course du liquide, le milieu de AB sera un point extrême de l'hyperbole. Nous devons limiter la courbe par deux parallèles aux asymptotes menées par les milieux M et N de OB et OA', les points B et A' étant les positions extrêmes de la nappe liquide.

On sait, d'autre part, que le rayon de courbure de l'hyperbole $xy = m^2$ en des points d'abscisse $x = m, 2m, 3m, \ldots$ va très rapidement en grandissant et, par suite, la portion d'hyperbole située après le point C d'abscisse $4m$ se confond sensiblement avec une parallèle à l'asymptote. La partie intéressante de la courbe est justement celle comprise entre les points C et D que dessine le liquide.

Grâce aux résultats signalés par M. C.-A. Laisant dans un Mémoire (¹) sur la segmentation des figures planes où il indique le moyen de représenter, par une équation, un fragment d'une courbe à l'exclusion de toute autre partie, nous pouvons donner la représentation analytique de la portion CD de l'hyperbole dessinée par le liquide. Il suffit de poser, avec M. Laisant,

$$x = m\left(\frac{b}{m}\right)^{-\sin t}, \qquad y = m\left(\frac{b}{m}\right)^{\sin t},$$

avec la relation $ab = m^2$, ab étant les coordonnées du point C, ba celles du point D.

On a encore, en éliminant le paramètre t,

$$\arcsin\frac{\mathrm{L}x - \mathrm{L}m}{\mathrm{L}b - \mathrm{L}m} + \arcsin\frac{\mathrm{L}y - \mathrm{L}m}{\mathrm{L}b - \mathrm{L}m} = 0.$$

Dispositif expérimental. — Le dispositif que j'ai adopté se compose essentiellement d'une cuve prismatique triangulaire (DOE, D'O'E') (*fig.* 1) ayant au sommet l'angle des asymptotes de l'hyperbole à tracer. La cuve est mobile autour d'un axe horizontal parallèle à l'arête au sommet OO'. Son mouvement de

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII, p. 123.

pivotement, qui doit être assez lent et continu, est obtenu à l'aide d'un mouvement d'horlogerie approprié.

Pour fixer sur une surface plane les diverses positions de la surface du liquide de la cuve, j'ai pris, dans une première série d'expériences, des plaques de cuivre et, comme liquide, une dissolution d'un sel de mercure. Le bichlorure ou l'azotate donnent des dépôts très nets de mercure sur le cuivre préalablement décapé, avec de l'émeri, par exemple.

Dans une autre série d'expériences, j'ai pris des plaques de fer avec une dissolution de sulfate de cuivre.

Les plaques ont la même forme que la cuve et viennent s'appuyer, parallèlement aux faces triangulaires de la cuve, sur les faces DO D′O′, EO E′O′. Elles sont maintenues par des taquets placés en DD′, EE′ et OO′. Le liquide approprié étant introduit dans la cuve, on dispose la plaque et l'on fait pivoter lentement la cuve jusqu'à ce que la surface libre du liquide vienne dans le voisinage du bord EE′ et ensuite du bord DD′. On retire alors la plaque sur laquelle se trouve dessinée la branche d'hyperbole. La courbe dessinée doit, comme je l'ai dit, être limitée par des parallèles aux asymptotes menées par les milieux de OD et de OE.

Dans les expériences faites, j'ai utilisé des cuves de zinc verni, d'angle au sommet de 90° et 60°, mais on pourrait se servir de cuves à angle variable, analogues au prisme à angle variable utilisé en Optique. On a ainsi à sa disposition deux variables ω et V, ce qui permet de tracer des hyperboles d'axes donnés à l'avance a et b.

Remarques. — Si l'on voulait avoir non plus sur une surface métallique, mais sur du papier les images de ces hyperboles, on pourrait prendre une plaque photographique qu'on a préalablement voilée en l'exposant à la lumière et la placer dans la cuve où l'on a mis un volume V d'un révélateur quelconque. Après fixation du cliché, on pourra tirer sur papier des épreuves de l'hyperbole tracée par le révélateur.

On peut aussi remarquer qu'on peut prendre pour profil C des fragments de courbes simples dont le tracé est facile. Par exemple, si le profil C est constitué par une branche de parabole et la tangente au sommet, le contour Γ est une courbe du quatrième degré.

Flotteurs. — En terminant, nous rattacherons le principe expérimental, qui nous a servi de point de départ, à la théorie des flotteurs.

Si nous considérons, en effet, un solide pesant qui flotte à la surface d'un liquide, la surface libre du liquide détache dans le solide, supposé homogène, un volume constant (le poids de son égal volume de liquide est égal au poids du corps). Les plans de flottaison qui découpent ainsi dans le corps des volumes égaux enveloppent une surface dite *surface d'isocarène* qui est, en général, une surface compliquée. Dans le cas d'un corps prismatique cette surface est simple.

Si nous considérons, en effet, un corps de forme prismatique (*fig.* 2) DOE D′O′E′, si on le fait flotter verticalement, la ligne de flottaison sera AB A′B′. La surface d'isocarène sera un cylindre hyperbolique qui est aussi le lieu des intersections des plans de flottaison.

On peut imaginer qu'on passe d'une position à la position voisine en faisant tourner le corps d'un angle infiniment petit autour de cette génératrice. Pratiquement, on peut incliner le flotteur en déplaçant la charge : on aurait là un autre mode de génération de l'hyperbole, mais il paraît physiquement moins commode à réaliser que celui que nous avons adopté.