BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BRICARD

Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur des systèmes articulés qui s’y rattachent

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 269-284

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__269_0>

SUR UNE CERTAINE CLASSE DE CUBIQUES GAUCHES ET SUR DES SYSTÈMES ARTICULÉS QUI S'Y RATTACHENT;

Par M. R. Bricard.

1. J'ai signalé, dans un travail antérieur (¹), certaines relations entre les cubiques *focales* (cubiques planes circulaires qui contiennent leur foyer singulier) et le quadrilatère articulé. Ces résultats s'appliquent en particulier à la strophoïde, qui est une cubique focale à point double.

Je me propose d'étudier ici une classe de cubiques gauches, auxquelles je donne le nom de *cubiques strophoïdales*, parce que leurs propriétés généralisent celles de la strophoïde, qu'elles comprennent d'ailleurs comme cas particulier. Le principal intérêt de ces courbes me paraît résider dans le fait qu'on peut y rattacher divers systèmes articulés gauches : en premier lieu, *l'octaèdre aplatissable* auquel j'ai été conduit autrefois par des considérations toutes différentes (²) et c'est l'obtention de ces systèmes articulés qui constituera l'objet essentiel de cette Note. J'attirerai cependant l'attention sur un résultat d'un caractère analogue au théorème de Poncelet, qui se trouve énoncé au n° 7.

2. Voici la définition des *cubiques gauches strophoïdales* (ou, plus simplement, des *strophoïdales*). J'appelle ainsi une cubique gauche jouissant des propriétés suivantes :

1° *Elle rencontre l'ombilicale en deux points i et i'*;

2° *Sa projection orthogonale sur un plan* (Π) *ayant pour droite de l'infini ii' a son point double à tangentes rectangulaires :* cette projection, qui contient les points cycliques du plan (Π), est donc une strophoïde (³).

(¹) Ce *Bulletin*, t. XXVIII, 1900, p. 39.

(²) *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé* (*Journal de Math. pures et appl.*, 1897).

(³) Il existe une corde unique de la strophoïdale, perpendiculaire au plan (Π); si les deux extrémités de cette corde viennent à se confondre, la strophoïdale se réduit à une cubique plane circulaire, ayant un point double à tangentes rectangulaires, c'est-à-dire à une strophoïde.

Une cubique gauche, pour être strophoïdale, est assujettie, on le voit, à trois conditions. La strophoïdale la plus générale dépend donc de $12 - 3 = 9$ paramètres, dont *trois* seulement sont des paramètres de grandeur, les six autres étant des paramètres de position.

3. Soient Γ une strophoïdale, et, conservant les désignations précédentes, i et i' les points où elle rencontre l'ombilicale, (Π) un plan dont la droite à l'infini est ii'. Il existe une corde unique de Γ perpendiculaire au plan (Π). Soient α et β les extrémités de cette corde.

Les points α, β, i, i' *forment une division harmonique sur la strophoïdale* Γ (*les deux premiers points étant conjugués*).

Soient, en effet, αt et βu les tangentes à Γ, en α et β. Les plans $(\alpha\beta t)$ et $(\alpha\beta u)$ sont rectangulaires, d'après la définition même des strophoïdales. Autrement dit, les quatre plans $(\alpha\beta t)$, $(\alpha\beta u)$, $(\alpha\beta i)$, $(\alpha\beta i')$ forment un faisceau harmonique (les deux premiers plans étant conjugués); mais le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal à celui des points α, β, i, i'; donc, etc.

La plupart des propriétés ultérieures se rattachent à l'involution définie sur Γ par cette condition que α et β sont ses points doubles. Je dirai que deux points de Γ qui se correspondent dans cette involution sont *associés*.

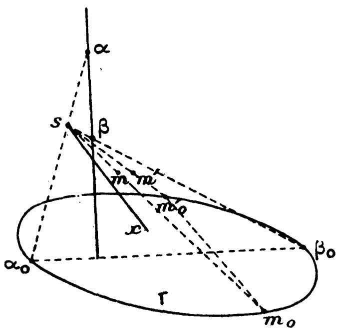
Le théorème précédent apprend que les points i et i' sont associés.

4. Considérons deux points associés variables, m et m'. La corde mm' engendre une quadrique (P) qui, ayant une génératrice ii' rejetée tout entière à l'infini, est un paraboloïde. Je dirai que les cordes mm' sont, dans ce paraboloïde, *les génératrices* (1). Les autres génératrices seront dites : *génératrices* (2); chacune de ces dernières ne rencontre Γ qu'en un seul point.

Soient alors s un point quelconque de Γ, sx la génératrice (2) de (P) qui passe en ce point. *Cette génératrice* sx *est un axe principal du cône* (S) *qui a son sommet en* s *et qui a pour directrice* Γ.

Considérons en effet (*fig.* 1) la trace T du cône (S) sur le plan (Π). T, qui contient les points cycliques i et i' de ce plan, est un cercle. Menons $s\alpha$ et $s\beta$ et soient α_0 et β_0 les traces de ces droites sur le plan (Π); i et i' doivent être conjugués, sur le cercle T, dans une involution $\mathfrak{I}_0$ qui a pour points doubles α_0 et β_0; *cela exige que les points α_0 et β_0 soient diamétralement opposés sur* T.

Fig. 1.



Cela posé, soient m et m' deux points associés de Γ; sm et sm' ont pour traces sur le plan (Π) les points m_0 et m'_0, qui appartiennent au cercle T et sont conjugués dans l'involution $\mathfrak{I}_0$; la corde $m_0 m'_0$ est donc perpendiculaire au diamètre $\alpha_0\beta_0$. On voit ainsi que tous les plans tels que $(sm_0 m'_0)$ contiennent la droite sx, menée par le point s perpendiculairement au plan $(s\alpha\beta)$: toutes les cordes mm' rencontrent cette droite sx, *qui est par conséquent la génératrice* (2) *de* (P), *issue de s.*

Mais le plan $(s\alpha\beta)$ est un plan principal de (S); *sx est donc bien un axe principal de ce cône.* C. Q. F. D.

Les considérations précédentes mettent encore en évidence les faits suivants, dont il suffit d'énoncer les deux premiers :

Si m et m' sont deux points associés de Γ, *les droites sm et sm' qui joignent ces deux points à un point quelconque s de* Γ *sont également inclinées sur le plan* (Π) *et font, par conséquent, des angles égaux avec $\alpha\beta$.*

Tout point de $\alpha\beta$ est équidistant des droites sm et sm'.

Enfin, *si (m, m'), (n, n') sont deux couples quelconques de* *points associés, s un point quelconque de* Γ, *les angles* $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ *sont égaux ou supplémentaires, et, de même, les angles* $\widehat{m'sn}$, $\widehat{msn'}$.

Cela résulte immédiatement de ce que la droite sx est bissectrice, intérieure ou extérieure, de chacun des angles $\widehat{msm'}$, $\widehat{nsn'}$. Ce dernier énoncé peut, d'ailleurs être précisé.

Remarquons, à cet effet, que la cubique Γ ayant deux asymptotes imaginaires, n'a qu'une seule branche réelle, et que (m, m'), (n, n'), formant sur Γ deux couples de points conjugués harmoniques par rapport aux points *réels* α, β, se succèdent nécessairement dans un ordre tel que les arcs mm', nn' n'aient aucune partie commune, ou bien que l'un de ces deux arcs soit entièrement contenu dans l'autre. On peut évidemment supposer les notations tellement choisies que l'ordre dans lequel les quatre points en question se succèdent sur Γ soit l'un des deux suivants :

$$m,\ n,\ n',\ m' \qquad \text{ou} \qquad m,\ m',\ n,\ n'.$$

Considérons, par exemple, la première hypothèse; si le point s est très éloigné sur Γ, les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ sont tous deux très voisins de zéro et sont, par suite, égaux; il en est ainsi, par raison de continuité, jusqu'au moment où le point s franchit le point m pour entrer dans l'arc mn. Alors l'angle $\widehat{msn}$ passe brusquement d'une valeur à la valeur supplémentaire tandis que l'angle $\widehat{m'sn'}$ varie toujours d'une façon continue. On a donc, à partir de ce moment, et tant que le point s reste dans l'arc mn,

$$\widehat{msn} = \pi - \widehat{m'sn'},$$

et ainsi de suite. On raisonnera de même sur la seconde hypothèse, et l'on se rend aisément compte que l'énoncé suivant s'applique à tous les cas possibles : *les angles* $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ *sont égaux si le point s appartient à la fois aux arcs* mm', nn' *ou s'il n'est sur aucun de ces arcs; les mêmes angles sont supplémentaires si le point s est sur un seul des arcs* mm', nn'.

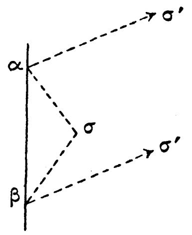
5. Outre les points i et i', la strophoïdale Γ possède un point à l'infini σ'. Soit σ le point de Γ associé à σ'. Je vais montrer que :

Le cône (Σ), *qui a pour sommet* σ *et pour directrice* Γ, *est de révolution; son axe est parallèle à* $\alpha\beta$.

Joignons, en effet (*fig.* 2), chacun des points α et β au point σ et au point σ'.

D'après un résultat précédent, $\alpha\sigma$ et $\alpha\sigma'$ sont également incli-

Fig. 2.



nées sur $\alpha\beta$, de même $\beta\sigma$ et $\beta\sigma'$; mais $\alpha\sigma'$ et $\beta\sigma'$ sont parallèles : le triangle $\sigma\alpha\beta$ est donc isoscèle ($\sigma\alpha = \sigma\beta$).

.Par conséquent, si l'on construit à nouveau la figure 1, en remplaçant le point s par le point σ, on voit que le triangle $\sigma\alpha_0\beta_0$ est aussi isoscèle ($\sigma\alpha_0 = \sigma\beta_0$), et que le point σ se projette, sur le plan (Π), au centre du cercle T. Le cône (Σ) est donc de révolution, et son axe est parallèle à $\alpha\beta$. C. Q. F. D.

Tous les cônes du second ordre qui contiennent Γ ont, comme on l'a vu, une série de plans cycliques perpendiculaires à $\alpha\beta$. On est donc conduit à la nouvelle définition que voici des cubiques strophoïdales :

Une telle cubique est l'intersection incomplète d'un cône de révolution et d'un cône du second ordre ayant une série de plans cycliques parallèles à l'axe du premier cône, les deux cônes ayant, d'ailleurs, une génératrice commune.

Un cas particulier remarquable est celui où le sommet du cône de révolution est rejeté à l'infini : la strophoïdale est alors le *cercle cubique* dont M. Schœnflies a signalé l'intérêt pour l'étude du déplacement infiniment petit d'une figure de grandeur invariable ([1]). M. Schœnflies avait reconnu l'existence des couples de points associés sur le cercle cubique, et démontré, relativement à ces couples, le théorème obtenu plus haut, à la fin du n° 4.

6. Soient (m, m'), (n, n') deux couples de points associés de Γ.

Le quadrilatère $mnm'n'$ *est circonscrit à une infinité de sphères dont chacune a son centre sur* $\alpha\beta$.

En effet, comme on l'a vu au n° 4, tout point ω de $\alpha\beta$ est équidistant de mn et de mn'. Il existe donc une sphère de centre ω qui touche les quatre côtés du quadrilatère $mnm'n'$.

On peut dire aussi que *le quadrilatère* $mnm'n'$ *est tracé sur un hyperboloïde de révolution ayant pour axe* $\alpha\beta$.

En rapprochant ce résultat du théorème obtenu à la fin du n° 4, on voit que :

Étant donné un quadrilatère $mnm'n'$ *tracé sur un hyperboloïde de révolution (ou, ce qui revient au même, circonscriptible à une infinité de sphères), le lieu des points* s *tels que les angles* $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ *soient égaux ou supplémentaires, et, de même, les angles* $\widehat{msn'}$, $\widehat{m'sn}$, *comprend une strophoïdale* Γ *qui passe par les points* m, m', n, n' ([2]).

Ce théorème ne peut encore être considéré comme démontré en toute rigueur : on pourrait craindre, en effet, que le quadrilatère $mnm'n'$, ayant pour sommets deux couples de points associés d'une strophoïdale, ne possède quelque propriété autre que celle d'être circonscriptible à une infinité de sphères. Il faut montrer qu'il n'en est pas ainsi et, à cet effet, établir directement le théorème énoncé.

Soient donc (H) l'hyperboloïde dont il est question dans l'énoncé, X son axe. Effectuons une projection orthogonale sur le

---

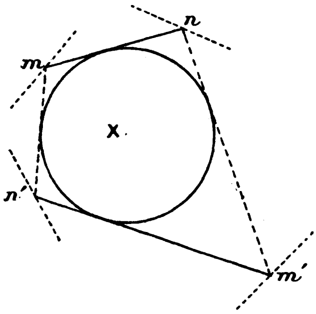
([1]) *Voir* la *Géométrie du mouvement*, de M. Schœnflies, pp. 119-122 de la traduction française.

([2]) Le lieu complet comprend, outre la strophoïdale Γ, une courbe dont il y aurait peut-être lieu de faire l'étude.

plan équatorial (Π) de (H), supposé horizontal, pour simplifier le langage (*fig*. 3).

Le quadrilatère $mnm'n'$ est circonscrit, en projection, au cercle de gorge de l'hyperboloïde.

Fig. 3.



Menons, dans l'espace, les tangentes en m, m', n, n', aux parallèles de (H) qui passent par ces points respectifs. Les quatre droites ainsi obtenues sont celles des bissectrices des angles m, n, m', n', qui ne rencontrent pas X.

Elles appartiennent à un même paraboloïde (P) : en effet, toutes sont parallèles à (Π) et rencontrent les deux droites de l'espace mm', nn'.

Menons les perpendiculaires communes à X et aux diverses génératrices horizontales du paraboloïde (P). Le lieu des pieds de ces perpendiculaires sur les génératrices de (P) est, comme l'on sait, une cubique gauche Γ, qui contient évidemment les points m, m', n, n'. *Je dis que c'est une strophoïdale.*

En effet, et tout d'abord, Γ contient les points cycliques du plan (Π) : ce sont les points qui correspondent aux génératrices horizontales isotropes de (P). En outre, X est une corde de Γ, parce qu'il existe deux génératrices horizontales D et D', rencontrant X, en des points α et β qui appartiennent visiblement à Γ. Les plans tangents menés à Γ par X sont respectivement perpendiculaires à D et à D'. Je dis *que ces plans tangents ou, ce qui revient au même, que les génératrices* D *et* D' *sont rectangulaires.*

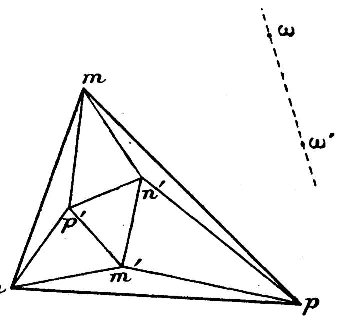
En effet, les droites mm', nn' sont conjuguées par rapport à (H), puisque l'une de ces droites est l'intersection des plans tangents à l'hyperboloïde aux points où l'autre droite le rencontre. Il en résulte que D et D' sont aussi conjuguées par rapport à H. En effet, D rencontre mm', nn', X et la droite à l'infini du plan (Π). Sa conjuguée doit rencontrer les conjuguées de ces droites, qui sont respectivement nn', mm', la droite à l'infini du plan Π, et X : ce ne peut être que D'.

D' doit donc contenir en particulier le pôle du plan (D, X). Or, ce pôle est rejeté à l'infini dans la direction horizontale perpendiculaire à celle de D. D et D' sont donc bien rectangulaires.

Il résulte de là que Γ a bien les caractères d'une strophoïdale; (m, m') et (n, n') sont, sur cette courbe, deux couples de points associés, puisque mm' et nn' sont deux génératrices non horizontales de (P), et tout point s de Γ est tel que $\widehat{msn} = \widehat{m'sn'}$ ou $\pi - \widehat{m'sn}$, $\widehat{m'sn} = \widehat{msn'}$ ou $\pi - \widehat{msn'}$. La proposition que nous avions en vue est ainsi complètement établie.

7. Considérons maintenant sur Γ *trois* couples de points associés (m, m'), (n, n'), (p, p'). Joignons ces six points deux à deux, en évitant de joindre les points d'un même couple. On forme ainsi un octaèdre à faces triangulaires : je l'appellerai l'*octaèdre* $(mnpm'n'p')$.

Fig. 4.



Cet octaèdre est circonscrit à deux sphères dont les centres ω *et* ω' *appartiennent à* Γ.

Soient, en effet (*fig.* 4), ω et ω' les deux points où les plans bissecteurs du dièdre $\widehat{mn}$ de l'octaèdre rencontrent la droite αβ. Considérons, par exemple, le point ω : il est équidistant des plans (mnp), (mnp'). D'autre part, le plan $(m\alpha\beta)$ qui, on l'a vu, est un plan bissecteur de chacun des angles $\widehat{nmn'}$, $\widehat{pmp'}$, est un plan de symétrie pour l'angle tétraèdre $m.npn'p'$. Le point ω, qui appartient à ce plan, est donc équidistant des faces (mnp) et $(mn'p')$, ainsi que des faces (mnp') et $(mn'p)$. En résumé, le point ω est équidistant des quatre faces de l'octaèdre qui se rencontrent au sommet m, et il existe une sphère (Ω), de centre ω, et tangente à ces quatre faces. En appliquant le même raisonnement aux autres angles tétraèdres, on voit que (Ω) est tangente aux quatre autres faces de l'octaèdre. On reconnaîtra de même qu'il existe une sphère (Ω'), de centre ω', tangente aux huit faces de l'octaèdre $(mnpm'n'p')$.

Remarque I. — Toute face de l'octaèdre, étant tangente aux deux sphères (Ω) et (Ω'), doit contenir un de leurs centres de similitude. Or, deux faces qui ont en commun une arête de l'octaèdre, mn par exemple, ne peuvent, en général, contenir un même centre de similitude : il faudrait en effet que mn rencontrât $\alpha\beta$, ce qui n'a pas lieu, si m et n sont arbitraires sur Γ. On en conclut l'énoncé suivant :

Les faces de l'octaèdre peuvent être réparties en deux groupes de quatre faces, deux faces quelconques d'un même groupe ayant en commun un sommet et un seul de l'octaèdre; les quatre faces d'un même groupe contiennent un même centre de similitude des deux sphères (Ω) *et* (Ω'), *et les quatre autres faces contiennent l'autre centre de similitude.*

Remarque II. — Il existe ∞^3 octaèdres ayant pour sommets opposés des couples de points associés de Γ. Les sphères qui leur sont inscrites, en vertu du théorème démontré plus haut, ont toutes leurs centres sur $\alpha\beta$, elles ne sont par conséquent qu'en nombre ∞^2. On en conclut le théorème suivant :

Soit (Ω) *une sphère ayant son centre sur* $\alpha\beta$: *il existe* ∞^1 *octaèdres inscrits à* Γ *et circonscrits à* (Ω).

On peut rapprocher ce résultat, dont le caractère est analogue à celui du théorème de Poncelet, de ceux que MM. Humbert et Fontené ont obtenus dans des travaux récents.

8. J'arrive maintenant aux propriétés métriques et aux relations avec certains systèmes articulés qui, ainsi que je l'ai dit, me paraissent donner aux strophoïdales leur principal intérêt.

Soient encore (m, m'), (n, n'), (p, p') trois couples de points associés sur Γ, et $(mnpm'n'p')$ l'octaèdre considéré au n° 7.

Imaginons que les arêtes mn, mp, mn', mp', np, pn', $n'p'$, $p'n$ (marquées en traits plus forts sur la figure 4) soient réalisées par des tiges rigides, articulées en leur point de rencontre. Les quatre triangles mnp, mpn', $mn'p'$, $mp'n$ sont invariables, mais leur ensemble constitue un angle tétraèdre $m.npn'p'$, évidemment déformable (la déformation dépendant d'un paramètre).

Le quadrilatère $npn'p'$ étant, comme on l'a vu, circonscriptible à une infinité de sphères, on sait qu'il existe entre les longueurs de ses quatre côtés une relation de la forme

$$np \pm pn' \pm n'p' \pm p'n = 0. \tag{1}$$

Imaginons que l'on déforme *d'une façon continue* l'angle tétraèdre $m.npn'p'$. La relation (1) étant constamment satisfaite, le quadrilatère $npn'p'$ sera, à un moment quelconque, circonscrit à une infinité de sphères. D'autre part, on aura toujours

$$\widehat{nmp} = \widehat{n'mp'} \quad \text{ou} \quad \pi - \widehat{n'mp'}$$

et

$$\widehat{nmp'} = \widehat{n'mp} \quad \text{ou} \quad \pi - \widehat{n'mp};$$

par conséquent, le point m appartient toujours à la strophoïdale, lieu partiel des points d'où l'on voit les côtés opposés du quadrilatère $npn'p'$, sous des angles égaux ou supplémentaires (le point m ne peut appartenir à une branche de ce lieu autre que la strophoïdale, parce qu'il était sur cette dernière courbe, dans les conditions initiales, et que l'on suppose continue la déformation).

Cela posé, construisons, à un moment quelconque, le point m', associé à m sur la strophoïdale dont il s'agit. On a

$$\widehat{p'nm'} = \widehat{pnm} \quad \text{ou} \quad \pi - \widehat{pnm},$$

et, toujours à cause de la continuité de la déformation, la relation à choisir est celle qui se trouve satisfaite dans les conditions initiales.

Autrement dit, *l'angle* $\widehat{p'nm'}$ *conserve une grandeur constante.*

On reconnaît qu'il en est de même pour tous les angles des quatre triangles, faces de l'angle tétraèdre $m'.npn'p'$: ces quatre triangles sont donc invariables, et il est démontré *que l'octaèdre* $(mnpm'n'p')$ *peut être déformé avec conservation de ses faces.*

9. Cet octaèdre prend un aspect particulièrement remarquable, quand l'un de ses dièdres, $\widehat{mn}$ par exemple, devient égal à o ou à π. On se rend immédiatement compte que tous ses autres dièdres devront prendre en même temps l'une ou l'autre de ces valeurs; autrement dit, l'octaèdre est complètement aplati. Cette circonstance pouvant se présenter de deux manières, suivant que l'on a

$$\widehat{mn} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \widehat{mn} = \pi,$$

on voit *que l'octaèdre* $(mnpm'n'p')$ *peut être aplati de deux manières.*

Considérons-le dans une de ces positions d'aplatissement. La cubique Γ est alors une strophoïde, et les quadrilatères $mnm'n'$, $npn'p'$, $mpm'p'$ sont chacun circonscrits à un cercle ayant pour centre le point double de la strophoïde.

Réciproquement, donnons-nous deux cercles concentriques et deux points quelconques m, m'. Construisons les quadrilatères $mnm'n'$, $mpm'p'$, circonscrits respectivement à ces deux cercles. Il est facile de voir que les (m, m'), (n, n'), (p, p') constituent trois couples de points associés sur une strophoïde ayant pour point double le centre commun des deux cercles; le quadrilatère $npn'p'$ est donc circonscrit à un cercle concentrique aux deux premiers. *On a ainsi construit simplement un octaèdre articulé, dans l'une de ses formes aplaties, et il est évident que la construction est aussi générale que possible.*

10. On peut établir la déformabilité de l'octaèdre $(mnpm'n'p')$ par une autre méthode, qui présente l'avantage de conduire à la connaissance de nouveaux systèmes articulés.

La courbe Γ étant unicursale, on peut faire correspondre, d'une façon univoque, un paramètre à un point variable de cette courbe, et cette correspondance peut être établie de manière qu'à trois points donnés de Γ soient attachées trois valeurs quelconques, données *a priori*, du paramètre. Supposons la correspondance telle qu'aux points α, β et au point réel à l'infini de Γ soient attachées respectivement les valeurs 0, ∞ et 1 du paramètre. Deux points associés m et m' étant conjugués harmoniques sur Γ par rapport à α et β, leurs paramètres μ et μ' satisfont à la relation

$$\mu + \mu' = 0. \tag{1}$$

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° *Soient* m, n, n', *trois points de* Γ, *les deux derniers étant associés. On a, entre les longueurs* mn *et* mn', *la relation*

$$\frac{mn}{mn'} = \frac{(\mu-\nu)(1-\nu')}{(\mu-\nu)(1-\nu)} = \frac{(\mu-\nu)(1+\nu)}{(\mu+\nu)(1-\nu)}, \tag{2}$$

μ et ν étant les paramètres des points m et n.

En effet, mn et mn' sont, comme on l'a vu, également inclinées sur la droite $\alpha\beta$. Si donc l'on désigne par m_1, n_1, n'_1 les projections orthogonales des points m, n, n', sur $\alpha\beta$, on a

$$\frac{mn}{mn'} = \frac{m_1 n_1}{m_1 n'_1}.$$

Or, il est clair que, lorsqu'un point parcourt Γ, sa projection orthogonale sur mn lui correspond homographiquement. Soit donc σ'_1 le point à l'infini de $\alpha\beta$ (projection du point à l'infini σ' de Γ). On a l'égalité entre rapports anharmoniques

$$(m_1 n_1 n'_1 \sigma'_1) = (m n n' \sigma') \qquad \text{ou} \qquad \frac{m_1 n_1}{m_1 n'_1} = \frac{(\mu-\nu)(1-\nu')}{(\mu-\nu')(1-\nu)},$$

d'où résulte bien l'égalité (2).

Cette relation, on le voit, conduit à attribuer un signe au rapport $\frac{mn}{mn'}$. Ce rapport est positif quand le point m est extérieur à l'arc nn', et négatif dans le cas contraire.

2° *Soient* m, n, p *trois points quelconques de* Γ ; μ, ν, ϖ *leurs paramètres respectifs. On a, entre les longueurs* np, pm, mn, *la relation*

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{(1+\mu)(\nu+\varpi)}{(1-\mu)(\nu-\varpi)}\overline{np}^2+\frac{(1+\nu)(\varpi+\mu)}{(1-\nu)(\varpi-\mu)}\overline{pm}^2\\&\qquad+\frac{(1+\varpi)(\mu+\nu)}{(1-\varpi)(\mu-\nu)}\overline{mn}^2=0.\end{aligned}\right.$$

Soient, en effet, n' et p' les points de Γ, associés respectivement à n et à p. Les angles $\widehat{nmp}$, $\widehat{n'mp'}$ étant égaux ou bien supplémentaires, écrivons que leurs cosinus sont égaux ou bien égaux en valeur absolue et de signes contraires ; on a ainsi l'une des deux relations

$$\frac{\overline{mn}^2+\overline{mp}^2-\overline{np}^2}{|mn|\,|mp|}=\pm\frac{\overline{mn'}^2+\overline{mp'}^2-\overline{n'p'}^2}{|mn'|\,|mp'|},$$

ou

$$\overline{mn}^2+\overline{mp}^2-\overline{np}^2=\pm\frac{|mn|\,|mp|}{|mn'|\,|mp'|}\left(\overline{mn'}^2+\overline{mp'}^2-\overline{n'p'}^2\right);$$

les longueurs des segments mn, mp, etc., sont écrites entre traits verticaux pour montrer que, dans la relation précédente, elles ne figurent que par leurs valeurs absolues. Mais, d'après la discussion qui termine le n° 4, les angles $\widehat{nmp}$, $\widehat{n'mp'}$ sont égaux si le point m appartient à la fois aux arcs np, $n'p'$, ou bien s'il est extérieur à tous les deux ; les mêmes angles sont supplémentaires si le point m est sur un seul de ces arcs ; d'autre part, le rapport

$$\frac{mn.mp}{mn'.mp'}$$

est positif dans le premier cas, négatif dans le second. On a donc, dans tous les cas, *en grandeur et en signe :*

$$(4)\qquad \overline{mn}^2+\overline{mp}^2-\overline{np}^2=\frac{mn\,mp}{mn'\,mp'}\left(\overline{mn'}^2+\overline{mp'}^2-\overline{n'p'}^2\right).$$

Cela posé, on a

$$mn'=\frac{(\mu+\nu)(1-\nu)}{(\mu-\nu)(1+\nu)}mn,$$

$$mp'=\frac{(\mu+\varpi)(1-\varpi)}{(\mu-\varpi)(1+\varpi)}mp,$$

$$n'p'=\frac{(-\nu+\varpi)(1-\varpi)}{(-\nu-\varpi)(1+\varpi)}n'p,\qquad n'p=\frac{(\varpi+\nu)(1-\nu)}{(\varpi-\nu)(1+\nu)}np,$$

d'où

$$n'p' = -\frac{(1-\nu)(1-\varpi)}{(1+\nu)(1+\varpi)} np.$$

En remplaçant, dans la relation (4), mn', mp', $n'p'$ par les valeurs précédentes, on trouve, toutes réductions faites, la relation (3).

11. Cela posé, considérons, sur une strophoïdale Γ, variable, trois points m, n, p, *de paramètres fixes* μ, ν, ω. Comme on l'a remarqué au début, Γ dépend de trois paramètres de grandeur; on peut donc déformer cette cubique en l'assujettissant à deux conditions; je choisirai les suivantes : mn et mp restent de longueurs constantes.

Il résulte alors de la relation (3) que np reste aussi de longueur constante, et de la relation (2), que toutes les autres arêtes de l'octaèdre $(mnp\,m'n'p')$ sont aussi de longueurs constantes; par exemple, il en est ainsi pour les arêtes mn', $n'm'$, $m'n$, à cause de

$$\frac{mn'}{mn} = \text{const.}, \qquad \frac{n'm'}{n'm} = \text{const.}, \qquad \frac{m'n}{m'n'} = \text{const.}$$

On a donc bien retrouvé que l'octaèdre $(mnp\,m'n'p')$ est déformable avec conservation de ses arêtes.

Mais ce n'est pas tout. Soit l un nouveau point de Γ, de paramètre fixe λ. On a

$$A_1\overline{lm}^2 + B_1\overline{ln}^2 + C_1\overline{mn}^2 = 0$$

ou

$$A_1\overline{lm}^2 + B_1\overline{ln}^2 = \text{const.},$$

A_1 et B_1 étant des constantes. Il en résulte (théorème de Stewart) que le point l reste à distance constante d'un certain point de mn; je dirai, plus brièvement, que le point l est *lié* à un certain point de mn.

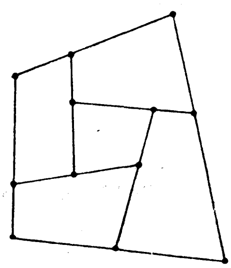
Le même raisonnement peut se répéter, en considérant, au lieu de mn, les diverses arêtes de l'octaèdre $(mnp\,m'n'p')$.

En résumé :

On peut, sans gêner la déformation de l'octaèdre $(mnp\,m'n'p')$, *lier un point l à douze points convenablement choisis sur les arêtes de l'octaèdre, et cela d'une infinité de manières.*

Les points des arêtes de l'octaèdre, qui sont liés au point l, forment une configuration qu'il faut signaler : les trois points qui appartiennent aux trois arêtes limitant une même face, par exemple aux arêtes np, pm, mn, sont nécessairement en ligne droite, sans quoi la figure formée par le triangle mnp et le point l seraient évidemment rigides. En partant de cette remarque, on reconnaît aisément que les douze points en question sont répartis trois par trois sur huit droites formant deux quadrilatères, tels que chaque côté de l'un rencontre un côté de l'autre, ainsi que l'indique le schéma suivant (*fig.* 5) :

Fig. 5.



Ces douze droites forment donc un système articulé gauche, analogue à celui que MM. Hart et Kempe ont étudié dans le plan [1].

12. On peut, pour l'obtention de nouveaux systèmes articulés, tirer un autre parti des relations (2) et (3), et du fait que Γ dépend de trois paramètres de grandeur. Par exemple, considérons sur Γ quatre couples de points associés (m, m'), (n, n'), (m_1, m'_1), (n_1, n_1), et supposons que, les paramètres μ, ν, μ_1, ν_1 des points m, n, m_1, n_1 ayant des valeurs fixes, on déforme Γ de telle manière que les longueurs mn, $m_1 n_1$ soient constantes. On voit, par

---

[1] M. Fontené (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1904, p. 105) a déjà déterminé les cas où le système articulé représenté par le schéma de la figure 5 est déformable, avec *deux* paramètres.

le raisonnement du n° **11**, que les deux quadrilatères $mnm'n'$, $m_1 n_1 m'_1 n'_1$ conservent tous deux des côtés de longueurs constantes; en outre, chaque sommet de l'un reste lié à un point de chaque côté de l'autre quadrilatère.

Considérons, par exemple, le côté mn du premier quadrilatère et le côté $m_1 n_1$ du second; le point m et le point n sont liés chacun à un certain point de $m_1 n_1$, le point m_1 et le point n_1 sont liés chacun à un certain point de mn; en définitive, quatre points de mn se trouvent liés à autant de points de $m_1 n_1$; mais on sait que si deux droites sont en déplacement relatif tel que *trois* points de l'une soient liés à trois points de l'autre, *tout* point de l'une est lié à un point de l'autre; les deux droites sont des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde articulé. Les considérations qui précèdent conduisent donc à une combinaison de *seize* hyperboloïdes articulés, sur laquelle je ne m'étendrai pas davantage.